ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

Под редакцией М. А. ЛЕОНТОВИЧА

ВЫПУСК 5

АТОМИЗДАТ
Москва 1967

УДК 533.9.

Пятый выпуск сборника «Вопросы теории плазмы» содержит материал, связанный с отдельными конкретными направлениями экспериментальных исследований по физике высокотемпературной плазмы. Исследуется устойчивость плазмы в ловушках с магнитными пробками и обсуждается возможность самоподдерживающейся термоядерной реакции в таких ловушках. Приведены результаты исследования кумуляции плазмы при пинч-эффекте. Излагаются методы и результаты анализа замкнутых конфигураций магнитного поля, пригодных для удержания плазмы. Рассматриваются неустойчивости плазмы и связанные с ними коллективные процессы в тороидальных системах.

2-3-7
29—67

ЗАМКНУТЫЕ МАГНИТНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ДЛЯ УДЕРЖАНИЯ ПЛАЗМЫ

Л. С. Соловьев, В. Д. Шафранов

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию конфигураций магнитного поля, пригодных для удержания плазмы. Как известно, такие конфигурации могут быть двух типов: открытые (к ним относятся адиабатические ловушки) и замкнутые, тороидальные [1]. Главное внимание уделим тороидальным конфигурациям, в которых силовые линии магнитного поля расположены на магнитных поверхностях

$$\psi(\mathbf{r}) = \text{const}, \tag{1.1}$$

образующих систему вложенных торов. Функцию $\psi(\mathbf{r})$, определяющую уравнение магнитных поверхностей, назовем функцией магнитных поверхностей или просто поверхностной функцией.

Основными характеристиками тороидальных конфигураций, от которых зависит как устойчивость самой структуры магнитных поверхностей, так и устойчивость плазмы, помещенной в тороидальную ловушку, являются объем

$$V = \int d\tau, \tag{1.2}$$

ограниченный поверхностью $\psi(\mathbf{r}) = \text{const}$, продольный поток Φ магнитного поля через поперечное сечение тороидальной поверхности $\psi(\mathbf{r}) = \text{const}$ и поперечный поток χ, проходящий в азимутальном направлении между *магнитной осью* и поверхностью $\psi(\mathbf{r}) = \text{const}$. Все указанные величины зависят друг от друга и, так же как и ψ, являются поверхностными функциями [2, 3].

Выражения для Φ и χ можно записать в инвариантной форме с помощью угловых переменных θ, ζ, выбранных на поверхности $\psi = \text{const}$ таким образом, что θ изменяется на 2π при прохождении по малому обходу тора, а ζ изменяется на 2π при прохожде-

нии по большому обходу тора:

$$\Phi = \frac{1}{2\pi}\int (\mathbf{B} \bigtriangledown \zeta)\, d\tau, \tag{1.3}$$

$$\chi = \frac{1}{2\pi}\int (\mathbf{B} \bigtriangledown \theta)\, d\tau. \tag{1.4}$$

Здесь, как и в формуле (1.2), интегрирование производится по объему, ограниченному заданной магнитной поверхностью $\psi = \text{const}$. В справедливости этих формул нетрудно убедиться, записав подынтегральные выражения как $\text{div}\mathbf{B}\zeta$ и $\text{div}\mathbf{B}\theta$ и переходя по теореме Гаусса к интегрированию по поверхности тороидальной магнитной трубки $\psi = \text{const}$ с разрезом $\zeta = 0{,}2\pi$ в первом интеграле и $\theta = 0{,}2\pi$ во втором.

Количественными интегральными характеристиками магнитных поверхностей, характеризующими степень устойчивости тороидальной конфигурации относительно статических возмущений поля и гидродинамическую устойчивость плазмы, являются производная поперечного потока по продольному

$$\mu = \chi'(\Phi) = \frac{d\chi}{d\Phi} \tag{1.5}$$

и производная объема по продольному потоку

$$V'(\Phi) = \frac{dV}{d\Phi}. \tag{1.6}$$

На *рациональных* магнитных поверхностях, где силовые линии магнитного поля замыкаются, сделав n оборотов по большому обходу тора и m оборотов по малому обходу, величина μ равна отношению чисел этих оборотов

$$\mu = \frac{n}{m} \tag{1.7}$$

и может быть названа числом вращения.

На *иррациональных* магнитных поверхностях, где силовая линия магнитного поля заполняет непрерывно всю поверхность не замыкаясь, величина μ равна пределу отношения числа оборотов при бесконечно кратном прохождении силовой линии по тору

$$\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{m}. \tag{1.8}$$

Задача об устойчивости конфигурации вложенных торов относится к классической задаче устойчивости движения в классической и небесной механике [4]. Устойчивость зависит от наличия в системе иррациональных значений μ и от скорости изменения μ при переходе от одной поверхности к другой, т. е. от производной

$$\mu'(\Phi) = \chi''(\Phi) \tag{1.9}$$

и от производных μ по Φ более высокого порядка.

Производная $V'(\Phi)$ характеризует «удельный объем» магнитного поля. Плазма, как и всякий газ, стремится расшириться и занять наибольший объем. При достаточно высокой электропроводности допустимы только такие перемещения, при которых поток магнитного поля в «жидком элементе» плазмы почти не меняется. Таким образом, плазма будет стремиться переместиться в область с максимальным удельным объемом, который поэтому должен находиться в центральной части конфигурации. Если ввести определение среднего значения магнитного поля $\overline{B}$ согласно формуле

$$V'(\Phi) = \frac{L}{\overline{B}}, \quad \overline{B} = L\frac{d\Phi}{dV}, \tag{1.10}$$

где L — длина оси тора, то условие устойчивости будет означать наличие минимума $\overline{B}$ внутри конфигурации, или наличие *магнитной ямы.*

Нетрудно видеть, что в замкнутых конфигурациях нельзя удовлетворить более жесткому требованию возрастания модуля магнитного поля $|\mathbf{B}|$ во всех направлениях от магнитной оси. Действительно, модуль поля в окрестности магнитной оси равен (см. § 4)

$$|\mathbf{B}| = B_0(s)[1 + k(s)\rho\cos\theta + \ldots], \tag{1.11}$$

где $k(s)$ — кривизна оси, ρ — расстояние от оси, а θ — азимутальный угол, отсчитываемый от главной нормали к оси. Таким образом, модуль поля растет в направлении главной нормали и убывает в противоположном направлении (тороидальный эффект). Для замкнутых конфигураций, очевидно, всегда имеются области, где кривизна магнитной оси $k(s) \neq 0$.

Точно так же модуль поля $|\mathbf{B}|$ не может возрастать наружу во всех точках замкнутой тороидальной магнитной поверхности. В самом деле, на замкнутой тороидальной поверхности всегда имеются участки силовых линий, где главная нормаль направлена внутрь тороидальной поверхности. Вследствие тороидального эффекта модуль $|\mathbf{B}|$ на таких участках будет убывать наружу.

В отдельных точках магнитное поле может возрастать во все стороны(см. задачу в конце параграфа). Окрестности таких точек представляют собой открытые ловушки для заряженных частиц с абсолютным минимумом $|\mathbf{B}|$.

Более тонкой характеристикой тороидальной магнитной конфигурации наряду с производной $V'(\Phi)$ является удельный объем магнитных силовых трубок $\delta V/\delta\Phi$. Площадь сечения силовой трубки изменяется обратно пропорционально напряженности магнитного поля $\delta S = \delta\Phi/B$. Следовательно, объем силовой трубки равен $\delta V = \int \delta S dl = \delta\Phi \int \frac{dl}{B}$.

Интеграл

$$U = \frac{1}{N}\int \frac{dl}{B}, \tag{1.12}$$

взятый вдоль силовой линии, замыкающейся после N обходов вдоль системы, назовем *приведенной длиной силовой линии* [5]. Связь функций U и $V'(\Phi)$ будет установлена в § 2.

Наличие минимума $\bar{B}$ затрудняет развитие наиболее быстрой и опасной конвективной неустойчивости плазмы, однако оно не спасает от более медленных, но также опасных дрейфовых неустойчивостей плазмы. Развитию дрейфовых неустойчивостей может препятствовать достаточно сильная перекрещенность магнитных силовых линий и, возможно, их гофрировка.

В задачу теории магнитных ловушек входит выяснение условий, при которых магнитная конфигурация ловушки является топологически устойчивой конфигурацией, имеет достаточно глубокую магнитную яму и сильную перекрещенность силовых линий, а также обладает другими свойствами, которые могут оказаться существенными для удержания высокотемпературной плазмы.

Полный анализ возможностей ловушек в этом смысле можно произвести для сравнительно гладких конфигураций с одной магнитной осью, когда поверхностную функцию $\psi(r)$ легко рассчитать методом разложения по степеням расстояния ρ от оси, которая является в общем случае пространственной замкнутой кривой, характеризующейся кривизной k и кручением $\varkappa$. Зная разложение ψ по степеням ρ, можно найти разложение функций V, Φ, χ по степеням ρ и разложение функций $\Phi(V)$, $\chi(V)$ по степеням V:

$$\left.\begin{aligned} \Phi(V) &= \Phi'(0)V + \frac{1}{2}\Phi''(0)V^2 + \ldots, \\ \chi(V) &= \chi'(0)V + \frac{1}{2}\chi''(0)V^2 + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

или разложение функций $V(\Phi)$, $\mu(\Phi)$ по степеням Φ:

$$\left.\begin{aligned} V(\Phi) &= V(0) + V'(0)\Phi + \frac{1}{2}V''(0)\Phi^2 + \ldots, \\ \mu(\Phi) &= \mu(0) + \mu'(0)\Phi + \frac{1}{2}\mu''(0)\Phi^2 + \ldots. \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

Прогресс в исследованиях магнитных конфигураций таким методом связан с введением Мерсье [6] удобной ортогональной системы координат с пространственной осью. В настоящей работе все расчеты, относящиеся к конкретным тороидальным системам, делаются в этой системе координат.

Некоторые общие вопросы теории магнитных конфигураций, такие, как вопрос о топологической устойчивости системы вложенных торов, удобнее исследовать в менее наглядной, но более

адекватной задаче об устойчивости, *натуральной* криволинейной системе координат, введенной для случая магнитных поверхностей в работе Хамады [5] (см. также работу [7]). В этой системе координат вводятся радиальная переменная $x^1 = V$ и две угловые переменные $x^2 = \theta$, $x^3 = \zeta$, выбранные таким образом, чтобы магнитные силовые линии в координатах θ, ζ были прямыми. Уравнение силовых линий на магнитной поверхности $V = \text{const}$

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = -\mu. \tag{1.15}$$

Из уравнения (1.15), в частности, получается соотношение (1.8) $\left|\lim_{\theta,\zeta\to\infty}\frac{\theta}{\zeta}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{m} = \mu$. Кроме этого, в натуральных координатах детерминант метрического тензора равен константе, и в результате существенно упрощаются некоторые дифференциальные операторы. При наличии плазмы линии электрического тока в натуральных координатах также прямые.

Исследованию общих свойств тороидальных магнитных поверхностей посвящен § 2. Здесь вводится криволинейная система координат, связанная с системой тороидальных магнитных поверхностей, в которой силовые линии магнитного поля являются прямыми линиями. Эта система координат используется для выяснения условий разрешимости уравнения $\mathbf{B}\nabla r = s$, которое ввиду его важности для теории тороидальных конфигураций было названо Крускалом и Кульсрудом [3] «магнитным дифференциальным уравнением». Далее с помощью этой системы координат устанавливается связь приведенной длины силовых линий $U = \frac{1}{N}\oint\frac{dl}{B}$ с производной $V'(\Phi)$. Оказывается, что в общем случае несимметричных конфигураций эти две величины не равны всюду на данной магнитной поверхности. Приведенная длина U колеблется при переходе от одной силовой линии к другой вокруг среднего значения $V'(\Phi)$. Из уравнения равновесия плазмы в магнитном поле вытекает, что условием замыкания тока разделения электрических зарядов, связанного с тороидальным дрейфом, является равенство $U = V'(\Phi)$. Несовпадение величин U и $V'(\Phi)$ приводит к перестройке конфигурации магнитных поверхностей при помещении в нее плазмы.

Материал, содержащийся в § 2, возможно, труден для понимания. Так как последующее изложение, посвященное расчету конкретных магнитных конфигураций, строится независимо, то при первом чтении § 2 можно опустить.

В § 3—9 исследуется структура магнитных поверхностей. Уравнение магнитных поверхностей $\psi(\mathbf{r}) = \text{const}$ определяется как однозначный интеграл уравнения

$$\mathbf{B}\nabla\psi \equiv \text{div}\mathbf{B}\psi = 0, \tag{1.16}$$

где $\mathbf{B}$ — заданное магнитное поле. Следует отметить, что в общем случае это уравнение не имеет однозначного решения. Его характеристики, которыми являются силовые линии магнитного поля, вообще говоря, не образуют поверхностей. Однако в окрестности магнитных осей можно найти приближенные решения методом разложения по степеням расстояния ρ от магнитной оси. При этом предполагается, что решение уравнения (1.16) известно во втором приближении разложения по ρ. Безразмерным параметром разложения по степеням ρ является отношение ρ/ρ_S, где ρ_S — расстояние до ближайшего ребра сепаратрисы. В некоторых случаях (например, при малом отклонении от симметричной конфигурации) решение, полученное разложением по степеням ρ, оказывается пригодным вплоть до сепаратрисы.

В методе разложения по степеням ρ для параметров магнитных поверхностей в третьем и высших приближениях получаются уравнения, формальные решения которых могут содержать малые резонансные знаменатели. В § 10 изложен метод, позволяющий обойти трудности, связанные с наличием малых знаменателей, и выясняется типичная структура магнитной конфигурации при воздействии резонансных возмущений.

Следующие параграфы, 11 и 12, посвящены расчету условий равновесия плазмы в замкнутых тороидальных магнитных ловушках. Здесь разложение по ρ применяется только для описания вакуумных магнитных полей. Распределение давления плазмы по магнитным поверхностям $p(\psi)$ может быть в принципе произвольным. При этом плотность токов, возникающих в плазме, определяется полностью с точностью до множителя $p'(\psi)$. Расчет связанных с этими токами магнитных полей и искажения магнитных поверхностей требуют в общем случае конкретизации распределения $p(\psi)$. Для магнитных поверхностей приближенно круглого сечения решение удается получить при произвольном распределении давления.

В § 12—14 производится расчет интегральных характеристик тороидальных магнитных конфигураций — среднего угла прокручивания силовых линий $\iota = 2\pi\mu$ и удельного объема $V'(\Phi)$, причем основное внимание уделено конфигурациям, обладающим магнитной ямой. Глубина магнитной ямы оценивается по значению второй производной объема по потоку на магнитной оси и величине продольного потока Φ на сепаратрисе, а также по значению интеграла $\int \frac{dl}{B}$ на ребре сепаратрисы. Точность полученных таким способом значений глубины магнитной ямы можно проверить путем сопоставления соответствующих расчетов для систем, обладающих винтовой симметрией, с результатами точных расчетов, приведенных в § 15. Наконец, в § 16 вкратце рассматривается движение заряженных частиц в замкнутых конфигурациях. Исследование структуры магнитных конфигураций можно производить путем разложения по степеням ρ не только

около *эллиптической* магнитной оси, но и около ребра сепаратрисы, или *гиперболической* магнитной оси.

В Приложении I показано, к какому отличию в формулах для параметров магнитных поверхностей приводит разложение около гиперболической оси. Примененный здесь формальный метод решения позволяет продвинуться до более высоких приближений разложения по ρ и, кроме того, позволяет не ограничиваться одними лишь потенциальными магнитными полями.

Другим методом рассмотрения замкнутых тороидальных магнитных конфигураций является метод усреднения, который изложен в Приложении II.

Для лучшего понимания свойств магнитных конфигураций необходимо четко разграничивать понятия: **магнитное поле, силовые линии, магнитные поверхности.**

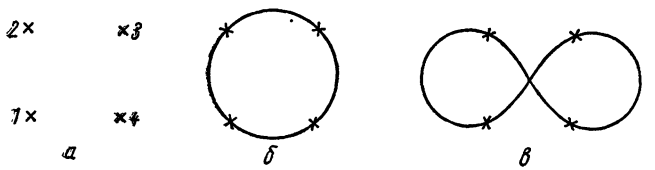


Рис. 1. Возможное различие магнитных поверхностей с одинаковым начальным ходом силовых линий на первых четырех обходах.

Магнитное поле, характеризующееся модулем и направлением вектора **B**, является локальной характеристикой конфигурации, которая при малом возмущении изменяется очень мало.

Силовая линия, можно сказать, является более подвижным (менее устойчивым) элементом конфигурации. Она представляет собой интегральную характеристику конфигурации, и ее поведение может довольно сильно изменяться при малом возмущении магнитного поля. Так, след силовой линии тороидального поля, изображенный на рис. 1, *а* точкой *1*, при наложении возмущения в виде винтового поля не остается на месте — начинает перемещаться, попадая в точки *2*, *3*, *4* при последовательном прохождении силовой линии вдоль тора.

Но наименее устойчивыми из трех упомянутых элементов конфигурации являются магнитные поверхности. Для определения формы магнитной поверхности недостаточно проследить за силовой линией при нескольких прохождениях ее вокруг тора, а необходимо знать ее поведение в принципе при бесконечном числе обходов. Действительно, четырем следам силовой линии, изображенным на рис. 1, *а*, могут соответствовать как тороидальная магнитная поверхность, ограничивающая внутренний объем (см. рис. 1, *б*), так и магнитная поверхность (см. рис. 1, *в*), выходящая из внутреннего объема. В определенных условиях конфигурации, изображенные на рис. 1, *б* и *в*, могут переходить друг в друга при весьма малом возмущении магнитного поля.

С «подвижностью» силовых линий связана возможность создания магнитной ямы (в указанном выше смысле) в тороидальных конфигурациях. Основная идея здесь состоит в том, чтобы заставить силовую линию дольше находиться с внутренней стороны тора, где вследствие тороидального эффекта основное продольное магнитное поле B_s растет от магнитной оси (рис. 2). При этом усредненное вдоль силовой линии магнитное поле может также расти от магнитной оси конфигурации [9—15].

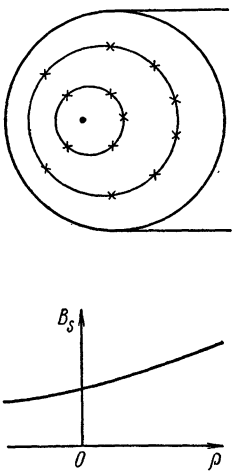


Рис. 2. Возможный ход силовых линий и напряженность продольного поля B_s в сечении тороидальной конфигурации.

Неустойчивость магнитных поверхностей относительно некоторых специальных (резонансных) возмущений магнитного поля, приводящая к уходу силовых линий из объема, представляет одну из основных забот при создании реальных тороидальных ловушек.

Следует иметь в виду, что с точки зрения проблемы удержания плазмы в ловушках требования наличия тороидальных магнитных поверхностей и отсутствия ухода силовых линий из объема не являются абсолютными. Из-за конечности ларморовских радиусов электронов и ионов дефекты конфигурации могут играть роль, лишь если их геометрические размеры в поперечном направлении сравнимы или превышают величину ларморовских радиусов. Далее, если ограничиваться конечным временем удержания плазмы, то можно допустить в принципе уход силовых линий из объема. Если максимальная скорость движения зарядов вдоль силовой линии равна v, то, очевидно, для удержания частиц в течение времени t достаточно, чтобы число оборотов N силовой линии до ее ухода из объема удовлетворяло условию

$$N > \frac{vt}{L},$$

где L — длина системы. При $v = 10^8$ *см/сек*, $t = 1$ *сек*, $L \sim 10^3$ *см* должно быть $N > 10^5$.

Задача 1. Исследовать свойства стационарных точек квадрата напряженности магнитного поля **B** [16].

Решение. Вычисляя лапласиан ΔB^2 с учетом равенства нулю лапласианов декартовых компонент поля **B**, получим

$$\frac{\partial^2 B^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B^2}{\partial z^2} = 2(\nabla B_x)^2 + 2(\nabla B_y)^2 + 2(\nabla B_z)^2. \qquad (1.16)$$

Поскольку сумма вторых производных B^2 всегда положительна, то отсюда следует, что стационарные точки модуля поля, т. е. точки, в которых $\nabla B^2 = 0$, могут быть либо точками минимума B^2, либо седловыми точками и не могут быть точками максимума B^2.

Условия экстремальности B^2:

$$\frac{\partial B^2}{\partial x_k} = 2B_i \frac{\partial B_i}{\partial x_k} = 0. \tag{1.17}$$

Если напряженность поля в экстремальной точке B^2 обращается в нуль, то условия (1.17) не дают никаких новых ограничений на производные компонент поля **B**. Если же $B_i \neq 0$, то из условий (1.17) вытекают добавочные соотношения между первыми производными компонент **B**. Для плазменных ловушек представляют интерес области минимального поля с отличной от нуля напряженностью. Рассмотрим окрестность такой стационарной точки B^2, направив ось z вдоль поля в данной точке. Тогда равенство (1.16) с учетом уравнений $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ и $\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$ и уравнения (1.17) приводится к виду

$$\Delta B^2 = 4\left[\left(\frac{\partial B_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)^2\right]. \tag{1.18}$$

Используя разложение скалярного потенциала φ вакуумного магнитного поля в окрестности оси z

$$\varphi = \int_0^z B_0(z)\,dz - \frac{B_0'(z)}{4}(x^2+y^2) + \frac{\gamma_1(z)}{2}(x^2-y^2) + \gamma_2(z)\,xy, \tag{1.19}$$

где B_0, γ_1, γ_2 — произвольные функции z, и учитывая, что в стационарной точке B^2 производная $B_0'(z)$ равна нулю, получаем

$$\Delta B^2 = 4\left(\gamma_1^2 + \gamma_2^2\right). \tag{1.20}$$

Из уравнения (1.20) вытекает, в частности, что

1) на оси аксиально симметричного поля ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$) могут быть только седловые точки B^2;

2) в плоском поле $\varphi = \varphi(x, z)$, поскольку $\gamma_2 = 0$, $\gamma_1 = -\frac{B_0'}{4} = 0$, также не существует минимумов B^2;

3) аналогично в аксиально симметричном поле не может существовать минимум B^2, не лежащий на оси, но направление поля в котором совпадает с осью симметрии z.

§ 2. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ТОРОИДАЛЬНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

Трудность исследования тороидальных конфигураций магнитного поля связана со сложным поведением магнитных силовых линий. Некоторые общие свойства этих конфигураций удобно рассмотреть в специальной системе координат, выбранной таким образом, чтобы силовые линии магнитного поля на магнитных поверхностях были прямыми линиями, как это имеет место в цилиндрическом плазменном шнуре с током и продольным магнитным полем. В настоящем параграфе описывается именно такая система координат и исследуются некоторые общие свойства тороидальных конфигураций. Поскольку используемая здесь система координат не является ортогональной, приведем сначала сводку основных формул векторного анализа в общей криволинейной системе координат x^1, x^2, x^3.

1. Общая криволинейная система координат

Как известно, в произвольной криволинейной системе координат x^1, x^2, x^3 приходится оперировать с контравариантными и ковариантными компонентами векторов. Контравариантная компонента вектора **a** определяется формулой

$$a^i = \mathbf{a} \nabla x^i. \tag{2.1}$$

Ковариантные компоненты a_i связаны с контравариантными a^i соотношениями

$$a_i = g_{ik}a^k; \quad a^i = g^{ik}a_k, \tag{2.2}$$

где g_{ik} — метрический тензор, определяющий квадрат элемента длины:

$$dl^2 = g_{ik}dx^i dx^k, \tag{2.3}$$

а g^{ik} — взаимный метрический тензор, компоненты которого рассчитываются по правилам вычисления элементов обратной матрицы:

$$g^{ik} = (g_{ik})^{-1} = G^{ik}/g. \tag{2.4}$$

Здесь G^{ik} — миноры матрицы g_{ik}, а g — ее детерминант

$$g = \mathrm{Det}\, g_{ik}. \tag{2.5}$$

Элемент объема в криволинейной системе координат равен

$$d\tau = \sqrt{g}\, dx^1 dx^2 dx^3. \tag{2.6}$$

Формулы скалярного и векторного произведений и основные дифференциальные операторы в криволинейной системе координат:

$$\mathbf{ab} = a^i b_i = a_i b^i; \tag{2.7}$$

$$[\mathbf{ab}]^1 = \frac{1}{\sqrt{g}}(a_2 b_3 - a_3 b_2); \tag{2.8}$$

$$[\mathbf{ab}]_1 = \sqrt{g}\,(a^2 b^3 - a^3 b^2); \tag{2.9}$$

$$(\nabla \varphi)_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}; \tag{2.10}$$

$$\mathrm{div}\, \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}a^i); \tag{2.11}$$

$$(\mathrm{rot}\, \mathbf{a})^1 = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial a_3}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^3}\right); \tag{2.12}$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}\right). \tag{2.13}$$

Здесь выписаны только первые компоненты векторных произведений (2.8) и (2.9) и ротора вектора (2.12). Остальные компоненты легко получить циклической перестановкой индексов. При

записи уравнений нужно следить за тем, чтобы тензорные размерности всех членов уравнения совпадали. Например, уравнение равновесия плазмы $c \nabla p = [\mathbf{jB}]$ имеет вид

$$c(\nabla p)_1 = \sqrt{g}\,(j^2 B^3 - j^3 B^2). \tag{2.14}$$

Правые части представляют собой ковариантные компоненты векторного произведения $[\mathbf{jB}]$. Уравнения для входящих сюда контравариантных компонент магнитного поля и плотности тока

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g} B^i) = 0; \tag{2.15}$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial B_2}{\partial x^3} - \frac{\partial B_3}{\partial x^2}\right) = \frac{4\pi}{c} j^1. \tag{2.16}$$

Остальные компоненты уравнений (2.14) и (2.16) получаются циклической перестановкой индексов. Уравнение для определения магнитных поверхностей $\mathbf{B} \nabla \psi = 0$, или $\mathrm{div} \mathbf{B} \psi = 0$ в криволинейных координатах x^i, записывается как

$$B^i \frac{\partial \psi}{\partial x^i} = 0 \tag{2.17}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g} B^i \psi) = 0. \tag{2.18}$$

Уравнения силовых линий имеют вид

$$\frac{dx^1}{B^1} = \frac{dx^2}{B^2} = \frac{dx^3}{B^3}. \tag{2.19}$$

Отметим, что ковариантные компоненты, требующие для своего расчета оперирования с элементами метрического тензора g_{ik}, входят только в уравнение, связывающее магнитное поле с током. В остальные уравнения входит лишь одна величина $\sqrt{g}$, определяющая элемент объема. Поэтому те свойства конфигураций, которые не требуют знания детального распределения поля и тока, а используют лишь условие соленоидальности векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{j}$, выявляются в общей форме.

2. Координаты, в которых магнитные силовые линии прямые

Будем считать, что координата x^1 является «радиальной» координатой, характеризующей расстояние от координатной оси системы, а x^2, x^3 — угловые координаты на поверхности $x^1 = \mathrm{const}$, изменяющиеся от 0 до 2π. В качестве x^1 выберем какую-либо поверхностную функцию (продольный поток Φ, объем V, ограниченный магнитной поверхностью $x^1 = \mathrm{const}$, и т. п.), удовлетворяющую условию

$$\mathbf{B} \nabla x^1 = 0. \tag{2.20}$$

Согласно определению контравариантной компоненты (2.1), это условие означает, что $B^1 = 0$, и уравнение $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$ принимает, следовательно, вид

$$\frac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt{g}B^2) + \frac{\partial}{\partial x^3}(\sqrt{g}B^3) = 0. \tag{2.21}$$

Из этого уравнения вытекает, что вместо компонент B^2 и B^3 можно ввести одну функцию ϑ, согласно соотношениям:

$$B^2 = -\frac{1}{2\pi\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial\vartheta}{\partial x^3}; \quad B^3 = \frac{1}{2\pi\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial\vartheta}{\partial x^2}. \tag{2.22}$$

Уравнение силовых линий (2.19) при этом приводится к полному дифференциалу

$$d\vartheta = \frac{\partial\vartheta}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial\vartheta}{\partial x^3}dx^3 = 0. \tag{2.23}$$

Отсюда следует, что уравнение силовой линии на поверхности $x^1 = \mathrm{const}$ определяется интегралом

$$\vartheta(x^2, x^3) = \mathrm{const}. \tag{2.24}$$

Поскольку B^2 и B^3 — периодические функции координат x^2, x^3, то, как вытекает из соотношений (2.22), функция $\vartheta(x^1, x^2, x^3)$ в общем случае имеет форму

$$\vartheta(x^1, x^2, x^3) = A(x^1)x^2 + B(x^1)x^3 + \tilde{\vartheta}(x^1, x^2, x^3), \tag{2.25}$$

где $\tilde{\vartheta}$ — периодическая функция координат x^2, x^3. Функции $A(x^1)$ и $B(x^1)$ однозначно связаны с продольным и поперечным потоками Φ и χ. Действительно, вычисляя продольный и поперечный потоки между соседними магнитными поверхностями $x^1 = \mathrm{const}$, $x^1 + dx^1 = \mathrm{const}$ по формулам (1.3) и (1.4), получаем

$$d\Phi = \frac{1}{2\pi}\int(\mathbf{B}\nabla x^3)\,d\tau = \frac{dx^1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} B^3\sqrt{g}dx^2dx^3 =$$

$$= \frac{dx^1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\vartheta}{\partial x^2}dx^2dx^3 = A(x^1)dx^1; \tag{2.26}$$

$$d\chi = \frac{1}{2\pi}\int(\mathbf{B}\nabla x^2)\,d\tau = \frac{dx^1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} B^2\sqrt{g}dx^2dx^3 =$$

$$= -\frac{dx^1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\vartheta}{\partial x^3}dx^2dx^3 = -B(x^1)dx^1. \tag{2.27}$$

Таким образом,

$$A = \Phi'(x^1); \quad B = -\chi'(x^1). \tag{2.28}$$

От функции $\widetilde{\vartheta}$ в выражении (2.25) можно избавиться путем замены переменных, например, полагая

$$x^2 = \theta - \widetilde{\vartheta}/A; \quad x^3 = \zeta \tag{2.29}$$

или

$$x^3 = \zeta - \widetilde{\vartheta}/B; \quad x^2 = \theta. \tag{2.30}$$

При этом получаем

$$\vartheta(x^1, \theta, \zeta) = \Phi'(x^1)\,\theta - \chi'(x')\,\zeta. \tag{2.31}$$

Итак, в новых координатах x^1, θ, ζ силовые линии на поверхностях $x^1 = \text{const}$ являются прямыми (рис. 3):

$$\Phi'\theta - \chi'\zeta = \text{const}. \tag{2.32}$$

Тангенс угла наклона силовой линии к координатной линии $\theta = \text{const}$ равен

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{d\theta}{d\zeta} = \frac{\chi'}{\Phi'} = \mu. \tag{2.33}$$

В выбранных координатах компоненты магнитного поля выражаются очень просто

$$B^i = \frac{1}{2\pi\sqrt{g}}\{0, \chi'(x^1), \Phi'(x^1)\}. \tag{2.34}$$

Зависимость компонент поля от переменных θ, ζ определяется функцией $g(x^1, \theta, \zeta)$.

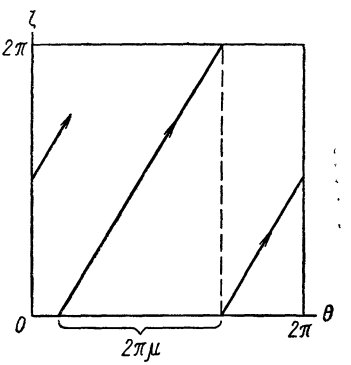


Рис. 3. Система координат θ, ζ с прямыми силовыми линиями.

3. Магнитное дифференциальное уравнение

В дальнейшем нам придется неоднократно иметь дело с уравнением

$$\mathbf{B} \bigtriangledown \mathrm{r} = \mathrm{s}, \tag{2.35}$$

где $\mathbf{B}$ — заданное магнитное поле, обладающее тороидальными магнитными поверхностями, s — известная, а r — искомая однозначные функции. Это уравнение, играющее важную роль в задачах о равновесии плазмы в магнитном поле, называется магнитным дифференциальным уравнением [3, 8]. Требование однозначности решения налагает на правую часть уравнения определенные условия. Действительно, проинтегрируем уравнение (2.35) по объему между двумя магнитными поверхностями. Левая часть уравнения в силу условия $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ может быть записана в виде $\operatorname{div}\mathbf{B}\mathrm{r}$. Интеграл по объему по теореме Гаусса преобразуется в интеграл по поверхности. Так как силовые линии, по определению, лежат на поверхностях интегрирования, то инте-

грал от левой части уравнения обращается в нуль. Следовательно, правая часть уравнения должна удовлетворять условию [3]

$$\int s\, d\tau = 0. \tag{2.36}$$

Если известно значение $r = r_0$ в фиксированной точке магнитной поверхности, то значение r на силовой линии, проходящей через эту точку, выражается, очевидно, через интеграл по силовой линии

$$r = r_0 + \int \frac{s}{B}\, dl. \tag{2.37}$$

Поэтому если силовая линия замкнутая, то в силу однозначности r должно выполняться условие [8]

$$\oint \frac{s}{B}\, dl = 0. \tag{2.38}$$

В системе координат, введенной в предыдущем параграфе, $d\tau = \sqrt{g}\, dx^1 d\theta d\zeta$, $dl/B = d\zeta/B^\zeta = 2\pi \sqrt{g}\, d\zeta/\Phi'$.

Поскольку произведение $\sqrt{g}s$ является периодической функцией θ и ζ, его можно разложить в ряд Фурье

$$\sqrt{g}\, s = \mathrm{Re} \sum_{m,\, n} a_{mn}(x^1)\, e^{i(m\theta - n\zeta)}. \tag{2.39}$$

Выполняя интегрирование по θ и ζ в первом условии (2.36), запишем

$$\int s\, d\tau = (2\pi)^2\, dx^1 a_{00}(x^1) = 0. \tag{2.40}$$

Так как силовая линия на поверхности $x^1 = \mathrm{const}$ определяется уравнением (2.32)

$$\theta = \theta_0 + \mu\zeta, \tag{2.41}$$

то условие (2.38) можно записать в виде

$$\oint \frac{s}{B}\, dl = \frac{2\pi}{\Phi'} \mathrm{Re} \sum_{m,\, n} a_{mn}(x^1)\, e^{i m\theta_0} \oint e^{i(m\mu - n)\zeta} d\zeta. \tag{2.42}$$

Таким образом, условие (2.36) означает отсутствие в разложении (2.39) нулевой гармоники a_{00}, а условие (2.38) — отсутствие резонансных гармоник на рациональных поверхностях $x^1 = x^1_{mn}$, где $\mu(x^1_{mn}) = n/m$:

$$a_{mn}(x^1_{mn}) = 0. \tag{2.43}$$

При выполнении этого условия функции $a_{mn}(x^1)$ могут быть представлены формулой

$$a_{mn}(x^1) = [m\mu(x^1) - n]\, \widetilde{a}_{mn}(x^1), \tag{2.44}$$

где $\widetilde{a}_{mn}(x^1)$ — функция, не имеющая особенности при $x^1 = x^1_{mn}$.

Запишем уравнение (2.35) в координатах x^1, θ, ζ

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\mathrm{r}=\frac{2\pi}{\Phi'(x^1)}\sqrt{g}\,\mathrm{s}. \tag{2.45}$$

Разложим r в ряд, аналогичный ряду (2.39):

$$\mathrm{r}=\mathrm{Re}\sum_{m,\,n}\mathrm{r}_{mn}(x^1)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m\theta-n\zeta)}. \tag{2.46}$$

Из уравнения (2.45) получаем следующее выражение для коэффициентов этого ряда:

$$\mathrm{r}_{mn}=-\mathrm{i}\frac{2\pi}{\Phi'(x^1)}\cdot\frac{a_{mn}(x^1)}{m\mu(x^1)-n}=-\mathrm{i}\frac{2\pi}{\Phi'(x^1)}\widetilde{a}_{mn}(x^1). \tag{2.47}$$

Отсюда следует, что при выполнении условий (2.40) и (2.44) существует конечное периодическое решение уравнения (2.35). Следовательно, условия (2.36) и (2.38) являются не только необходимыми, но и достаточными условиями разрешимости магнитного дифференциального уравнения (2.35) [8].

4. Связь интеграла $\int\frac{dl}{B}$ с производной объема по потоку $V'(\Phi)$

Используя выражение (2.34) для контравариантных компонент магнитного поля, рассчитаем значение интеграла $\int\frac{dl}{B}$, взятого вдоль силовой линии (2.32):

$$\theta=\theta_0+\mu\zeta. \tag{2.48}$$

Учитывая, что $dl/B=d\zeta/B^\zeta$, получаем

$$\int\frac{dl}{B}=\int\frac{d\zeta}{B^\zeta}=\frac{2\pi}{\Phi'(x^1)}\int\sqrt{g}d\zeta=\frac{dV}{d\Phi}\cdot\frac{2\pi\int\sqrt{g}d\zeta}{dV/dx^1}. \tag{2.49}$$

Из выражения для элемента объема (2.6) находим, интегрируя по угловым переменным:

$$\frac{dV}{dx^1}=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{g}d\theta d\zeta. \tag{2.50}$$

Разложим $\sqrt{g}$ в двойной ряд Фурье по координатам θ, ζ:

$$\sqrt{g}=\mathrm{Re}\sum_{m,n}g_{mn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m\theta-n\zeta)}. \tag{2.51}$$

Очевидно, что

$$dV/dx^1=(2\pi)^2g_{00}. \tag{2.52}$$

Отсюда для входящего в выражение (2.49) интеграла по ζ получаем

$$\pi\int\sqrt{g}d\zeta=\frac{1}{2\pi}\frac{dV}{dx^1}\zeta+2\pi\,\mathrm{Re}\sum_{m,n}{}'g_{mn}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m\theta-n\zeta)}d\zeta, \tag{2.53}$$

где штрих у знака суммирования означает, что в сумме отсутствует член с $m = 0$, $n = 0$. Теперь нетрудно написать выражение для интеграла (2.49), взятого вдоль силовой линии, проходящей через точку $\theta = \theta_0$, $\zeta = 0$, в пределах от $\zeta = 0$ до $\zeta = 2\pi N$:

$$U(x^1, \theta_0) = \frac{1}{N} \int_0^{2\pi N} \frac{d\zeta}{B^\zeta} =$$

$$= \frac{dV}{d\Phi} \left\{ 1 + \frac{1}{2\pi N g_{00}} \operatorname{Re} \sum_{m,\, n}{}' g_{mn} e^{\frac{i m \theta_0 [e^{i (m\mu - n) 2\pi N} - 1]}{i (m\mu - n)}} \right\}. \quad (2.54)$$

Пусть силовая линия замыкается, обойдя тор n_0 раз по малому обходу и m_0 раз — по большому. Из уравнения силовой линии (2.48) видно, что такое замыкание может иметь место на рациональной поверхности, где

$$\mu(x^1) = n_0/m_0. \quad (2.55)$$

В этом случае из выражения (2.54) получаем

$$U(x^1, \theta_0) = \frac{1}{m_0} \oint \frac{dl}{B} =$$

$$= \frac{dV}{d\Phi} \left\{ 1 + \frac{1}{g_{00}} \operatorname{Re} \left(g_{m_0 n_0} e^{i m_0 \theta_0} + g_{-m_0, -n_0} e^{-i m_0 \theta_0} \right) \right\}. \quad (2.56)$$

Из этого выражения видно, что интеграл $\oint \frac{dl}{B}$, взятый по разным силовым линиям на одной и той же магнитной поверхности,

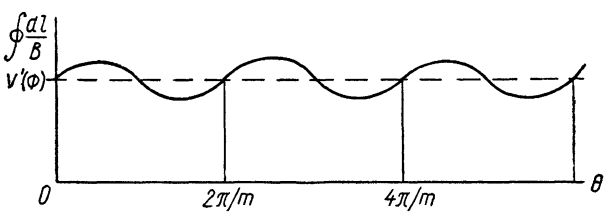


Рис. 4. Зависимость $\oint \frac{dl}{B}$ от начального азимута силовой линии на тороидальной магнитной поверхности.

имеет, вообще говоря, различные значения, как это схематически показано на рис. 4. Непостоянство приведенной длины магнитных силовых линий на рациональных магнитных поверхностях имеет существенные последствия. Как будет видно ниже, при помещении плазмы в такую конфигурацию магнитного поля происходит расщепление магнитных поверхностей с образованием волокнистой структуры конфигурации.

Заметим, что интеграл $\int \frac{dl}{B}$, взятый в пределах от $\zeta = 0$ до $\zeta = 2\pi$ вдоль силовой линии на иррациональной поверхности, близкой к рациональной поверхности $\mu = n_0/m_0$, мало отличается от функции $U(x^1, \theta_0)$, определенной на рациональной поверхности. При большом числе обходов $N \to \infty$, интегрирование по силовой линии приводит к усреднению функции $U(x^1, \theta_0)$. Как видно из выражения (2.54), входящая в него сумма по m, n остается всегда ограниченной и при $N \to \infty$ выпадает. В этом пределе получаем

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int \frac{dl}{B} = \frac{dV}{d\Phi}. \tag{2.57}$$

Эта формула обычно используется при численных расчетах производной объема по продольному потоку.

5. Условие замыкания тока на магнитных поверхностях

Из уравнения равновесия $c\nabla p = [\mathbf{jB}]$ следует, что $\mathbf{B}\nabla p = 0$ и $\mathbf{j}\nabla p = 0$, т. е. давление плазмы является поверхностной функцией, и линии тока лежат на магнитных поверхностях. В системе координат, введенной выше, для плотности тока получаются уравнения, такие же как уравнения (2.20) и (2.21) для магнитного поля:

$$\mathbf{j}\nabla x^1 = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt{g} j^2) + \frac{\partial}{\partial x^3}(\sqrt{g} j^3) = 0. \tag{2.58}$$

По аналогии с магнитным полем заключаем, что линии тока на поверхности $x^1 = \text{const}$ определяются уравнением

$$\nu(x^1, \theta, \zeta) = \text{const}, \tag{2.59}$$

причем

$$\nu(x^1, \theta, \zeta) = J'(x^1)\theta - I'(x^1)\zeta + \tilde{\nu}(x^1, \theta, \zeta), \tag{2.60}$$

где J — продольный, а I — поперечный токи, протекающие между магнитными поверхностями, а $\tilde{\nu}$ — периодическая функция координат θ, ζ. Контравариантные компоненты плотности тока выражаются следующим образом:

$$j^2 = -\frac{1}{2\pi\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial \zeta} = \frac{1}{2\pi\sqrt{g}} \left[I'(x^1) - \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial \zeta} \right]; \tag{2.61}$$

$$j^3 = \frac{1}{2\pi\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial \theta} = \frac{1}{2\pi\sqrt{g}} \left[J'(x^1) + \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial \theta} \right]. \tag{2.62}$$

Подставляя эти формулы вместе с выражением (2.34) для B^i в уравнение равновесия (2.14), получаем уравнение для определения $\tilde{\nu}$

$$\mathbf{B}\nabla\tilde{\nu} = 2\pi \left\{ \frac{I'\Phi' - J'\chi'}{4\pi^2\sqrt{g}} - c\frac{dp}{dx^1} \right\} \equiv \mathrm{s}. \tag{2.63}$$

Это магнитное дифференциальное уравнение. Как было показано выше, оно имеет конечное однозначное решение при выполнении следующих двух условий разрешимости:

$$\int s\, d\tau = 0; \tag{2.64}$$

$$\oint \frac{s}{B}\, dl = 0. \tag{2.65}$$

Первый интеграл берется по объему dV слоя, заключенного между двумя произвольными магнитными поверхностями, а второй — по каждой замкнутой силовой линии. Учитывая, что

$$d\tau = \sqrt{g} dx^1 d\theta d\zeta; \quad dV = dx^1 \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{g} d\theta d\zeta, \tag{2.66}$$

получаем из первого условия [3]

$$cp'V' = I'\Phi' - J'\chi'. \tag{2.67}$$

При интегрировании по силовой линии в условии (2.65) замечаем, что $dl/B = 2\pi\sqrt{g}d\zeta/\Phi'$. Пусть силовая линия замыкается после N обходов вдоль тора. Условие (2.65) принимает тогда вид

$$cp' \oint \frac{dl}{B} = \frac{I'\Phi' - J'\Phi'}{2\pi\Phi'} \int d\zeta = \frac{I'\Phi' - J'\chi'}{\Phi'} N \tag{2.68}$$

или, если воспользоваться уравнением (2.67),

$$c \frac{dp}{dx^1} \left\{ \frac{1}{N} \oint \frac{dl}{B} - \frac{dV}{d\Phi} \right\} = 0. \tag{2.69}$$

Это условие выполняется при $dp/dx^1 \neq 0$, если на рациональной поверхности $x^1 = \text{const}$ имеет место связь

$$\frac{1}{N} \oint \frac{dl}{B} = \frac{dV}{d\Phi}, \tag{2.70}$$

т. е. если приведенные длины всех магнитных силовых линий на поверхности одинаковы.

Рациональные тороидальные магнитные поверхности, удовлетворяющие этому условию, назовем *истинными* магнитными поверхностями.

На истинных магнитных поверхностях коэффициенты g_{mn} разложения функции $\sqrt{g}$, как это следует из формулы (2.56), обращаются в нуль. Это значит, что функцию $g_{mn}(x^1)$ можно записать в виде

$$g_{mn}(x^1) = [m\mu(x^1) - n]\,\widetilde{g}_{mn}(x^1), \tag{2.71}$$

где $\widetilde{g}_{mn}(x^1)$ — функция, не имеющая особенности на поверхности $x^1 = x^1_{mn}$, $\mu(x^1_{mn}) = n/m$.

Рассмотрим еще одно следствие условия (2.70), которое потребуется при решении задачи о равновесии плазмы в тороидальных конфигурациях. Из условия независимости интеграла $\oint \frac{dl}{B}$ на магнитной поверхности от выбора силовой линии следует, что интеграл, взятый по контуру C (проходящему через две соседние силовые линии, как показано на рис. 5), будучи равным разности двух одинаковых интегралов, равен нулю:

$$\oint_C \frac{dl}{B} = \int_1 \frac{dl}{B} - \int_2 \frac{dl}{B} = 0. \tag{2.72}$$

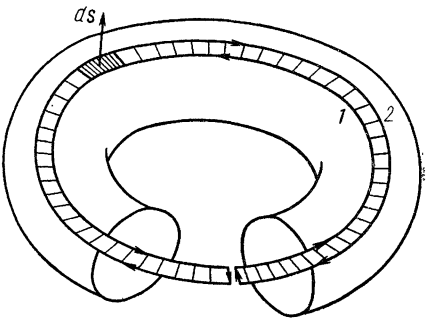


Рис. 5. Замкнутый контур, составленный из двух близких замкнутых силовых линий *1* и *2*, использованный для вывода соотношения (2.77).

По теореме Стокса можно перейти от интеграла по контуру C к интегралу по поверхности, представляющей собой полоску магнитной поверхности, расположенную между выбранными силовыми линиями

$$\int_C \frac{\mathbf{B}\,d\mathbf{l}}{B^2} = \int_S \operatorname{rot} \frac{\mathbf{B}}{B^2}\, d\mathbf{S}. \tag{2.73}$$

Учитывая, что элемент площади ориентирован по градиенту магнитной поверхности $\psi(\mathbf{r}) = \text{const}$, запишем

$$d\mathbf{S} = \frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|}\, dS = \frac{\nabla\psi}{\psi'(\Phi)} \frac{dS}{|\nabla\Phi|}, \tag{2.74}$$

где Φ — продольный магнитный поток. Воспользовавшись очевидным соотношением

$$\frac{dS}{|\nabla\Phi|} = \frac{dl}{B}, \tag{2.75}$$

получим

$$\int_S \operatorname{rot} \frac{\mathbf{B}}{B^2}\, dS = \frac{d\Phi}{d\psi} \oint \left(\nabla\psi \operatorname{rot} \frac{\mathbf{B}}{B^2}\right) \frac{dl}{B}, \tag{2.76}$$

где в последнем интеграле интегрирование производится снова по замкнутой силовой линии. Применив теперь тождество $\operatorname{div} \frac{[\nabla\psi\mathbf{B}]}{B^2} = \nabla\psi \operatorname{rot} \frac{\mathbf{B}}{B^2}$, получим условие равенства приведенных длин соседних силовых линий [5]

$$\oint \operatorname{div} \frac{[B\nabla\psi]}{B^2} \frac{dl}{B} = 0. \tag{2.77}$$

Это условие имеет форму условия разрешимости (2.38) магнитного дифференциального уравнения

$$\mathbf{B} \nabla \mathrm{r} = f(\psi) \frac{[\mathbf{B} \nabla \psi]}{B^2}, \tag{2.78}$$

которое встретится нам при решении задачи о равновесии плазмы в тороидальных ловушках. Как вытекает из приведенного вывода, уравнение (2.78) имеет конечное периодическое решение, если выполняется условие (2.70) постоянства приведенных длин силовых линий на рациональных поверхностях.

Условие (2.70) заведомо выполняется в осесимметричных конфигурациях (равновесие которых возможно лишь при наличии продольного тока), а также в гофрированных конфигурациях с замкнутыми силовыми линиями, угол прокручивания которых равен нулю ($\mu = 0$). В этом последнем вырожденном случае истинные магнитные поверхности, по определению, представляют собой геометрическое место силовых линий с одинаковым значением интеграла

$$\oint \frac{dl}{B} = U(\psi). \tag{2.79}$$

В произвольных тороидальных конфигурациях стелларапторного типа условие (2.70), как было показано выше [см. формулу (2.56)], не выполняется.

Для того чтобы представить себе возможные следствия нарушения условия замыкания тока (2.70), найдем формальное решение уравнения (2.63) для $\widetilde{\nu}$. Подставляя в левую часть этого уравнения выражение (2.34) для контравариантных компонент вектора $\mathbf{B}$ и используя условие (2.67), получим уравнение (2.63) в виде

$$\mu \frac{\partial \widetilde{\nu}}{\partial \theta} + \frac{\partial \widetilde{\nu}}{\partial \zeta} = \frac{cp'}{\Phi'} \{V' - 4\pi^2 \sqrt{g}\}. \tag{2.80}$$

Производя разложение $\widetilde{\nu}(x^1, \theta, \zeta)$ в двойной ряд Фурье по θ, ζ, аналогичное разложению (2.51)

$$\widetilde{\nu}(x^1, \theta, \zeta) = \mathrm{Re} \sum_{m,\, n} \widetilde{\nu}_{mn}(x^1) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m\theta - n\zeta)}, \tag{2.81}$$

получим из уравнения (2.80) при $m \neq 0$, $n \neq 0$

$$\widetilde{\nu}_{mn} = \mathrm{i} \frac{4\pi^2 cp'}{\Phi'} \frac{g_{mn}}{m\mu - n}. \tag{2.82}$$

При выполнении условия (2.70) коэффициенты g_{mn} как функции x^1 выражаются формулой (2.71). В этом случае получается конечное решение для

$$\widetilde{\nu}_{mn} = \mathrm{i} \frac{4\pi^2 cp'}{\Phi'} \widetilde{g}_{mn}(x^1). \tag{2.83}$$

При невыполнении условия (2.70) возникает трудность с резонансными знаменателями в формуле (2.82).

Эта трудность может быть обойдена в принципе тремя путями:

1) из выражения (2.82) видно, что требованию ограниченности можно удовлетворить, если на резонансных рациональных поверхностях градиент давления равен нулю. Такой вывод представляется физически неправдоподобным;

2) в работе Хамады [5], где было впервые обращено внимание на возможность несоблюдения в ловушках условия замыкания токов разделения зарядов, предполагается, что при наличии плазмы существует механизм корректировки магнитных поверхностей, приводящий к выполнению условия (2.70). Эта идея представляется нам также неправдоподобной;

3) наличие резонансного знаменателя может свидетельствовать о несправедливости исходного предположения, что магнитные поверхности представляют собой систему вложенных торов с одной осью. Именно при наличии такой структуры конфигурации возможна введенная выше система координат x^1, θ, ζ.

Как увидим ниже (см. § 10), последнее предположение более правдоподобно. Рациональные тороидальные магнитные поверхности оказываются неустойчивыми. Бесконечно малое возмущение магнитного поля приводит к их расщеплению и образованию волокнистой конфигурации со многими магнитными осями. К сожалению, в настоящее время не существует еще общего метода рассмотрения структуры и свойств такой конфигурации, аналогичного методу рассмотрения конфигураций с одной магнитной осью. Поэтому при выяснении типичной структуры замкнутых равновесных магнитогидродинамических конфигураций пока приходится ограничиваться методом возмущений, когда предполагается, что в нулевом приближении существует система вложенных тороидальных магнитных поверхностей с одной магнитной осью. Изучению таких конфигураций и посвящена основная часть настоящей работы.

6. Натуральные координаты

Выбор координат θ, ζ, в которых силовые линии магнитного поля на поверхностях $x^1 = \text{const}$ прямые [см. формулу (2.32)], еще содержит некоторый произвол. Действительно, полагая

$$\theta' = \theta + \chi'(x^1) G(x^1, \theta, \zeta); \tag{2.84}$$

$$\zeta' = \zeta + \Phi'(x^1) G(x^1, \theta, \zeta), \tag{2.85}$$

где G — периодическая функция координат, получим в новых переменных θ', ζ' также прямые силовые линии

$$\frac{d\Phi}{dx^1}\theta' - \frac{d\chi}{dx^1}\zeta' = \text{const}. \tag{2.86}$$

Произволом в выборе периодической функции G можно распорядиться для дальнейшего упрощения координатной системы. Можно, например, попытаться выбрать координаты θ', ζ' таким образом, чтобы детерминант метрического тензора был поверхностной функцией $g' = g'(x^1)$. Для нахождения соответствующей функции $G(x^1, \theta, \zeta)$ заметим, что $\sqrt{g'} = D^{-1}$, где D — якобиан преобразования от переменных x^1, θ, ζ к переменным x^1, θ', ζ':

$$D = \nabla x^1 [\nabla \theta' \nabla \zeta']. \tag{2.87}$$

Учитывая, что

$$\left.\begin{aligned} \nabla x^1 &= \{1, \quad 0, \quad 0\}; \\ \nabla \theta' &= \left\{G\chi'' + \chi' G', \, 1 + \chi' \frac{\partial G}{\partial \theta}, \, \chi' \frac{\partial G}{\partial \zeta}\right\}; \\ \nabla \zeta' &= \left\{G\Phi'' + \Phi' G', \, \Phi' \frac{\partial G}{\partial \theta}, \, 1 + \Phi' \frac{\partial G}{\partial \zeta}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{2.88}$$

и что контравариантное векторное произведение, входящее в выражение для D, определяется формулой (2.8), находим

$$D = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(1 + \chi' \frac{\partial G}{\partial \theta} + \Phi' \frac{\partial G}{\partial \zeta}\right) = \frac{1}{\sqrt{g}} + \mathbf{B} \nabla G. \tag{2.89}$$

Из связи $D = 1/\sqrt{g'}$ получается следующее магнитное дифференциальное уравнение для G:

$$\mathbf{B} \nabla G = \frac{1}{\sqrt{g'}} - \frac{1}{\sqrt{g}} \equiv \mathrm{s}. \tag{2.90}$$

Так как $d\tau = \sqrt{g'} dx^1 d\theta' d\zeta' = \sqrt{g} dx^1 d\theta d\zeta$, то первое условие разрешимости (2.36) уравнения (2.90) сводится к очевидному тождеству. При интегрировании по силовой линии во втором условии (2.38), поскольку $dl/B = d\zeta/B^\zeta = 2\pi\sqrt{g}/\Phi'(x^1)$, и согласно требованию, $g' = g'(x^1)$, получим

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{g'}} - \frac{1}{\sqrt{g}}\right) \frac{d\zeta}{B^\zeta} = \frac{1}{\sqrt{g'}} \oint \frac{dl}{B} - \frac{2\pi dx^1}{d\Phi} \int d\zeta = 0. \tag{2.91}$$

Если рассматриваемая силовая линия замыкается после N обходов по тору, то

$$\int d\zeta = 2\pi N. \tag{2.92}$$

Объем слоя между двумя бесконечно близкими поверхностями при $g' = g'(x^1)$ равен

$$dV = dx^1 \int \sqrt{g'} d\theta' d\zeta' = (2\pi)^2 \sqrt{g'} dx^1. \tag{2.93}$$

Используя связь dV с dx^1, получаем условие разрешимости уравнения (2.38)

$$\frac{1}{N} \oint \frac{dl}{B} = \frac{dV}{d\Phi}. \tag{2.94}$$

Так как для всех силовых линий, лежащих на одной магнитной поверхности, число оборотов N одно и то же, то условие разрешимости сводится к требованию, чтобы функция $U = \oint \frac{dl}{B}$ была постоянной на рациональных магнитных поверхностях. Это условие совпадает с условием замыкания электрического тока на рациональных поверхностях при $\nabla p \neq 0$. Поэтому для истинных магнитных поверхностей, удовлетворяющих условию $U = U(\psi)$, условие разрешимости уравнения для G всегда выполняется и, следовательно, существует система координат, в которой $g' = g'(x^1)$.

За координату x^1 удобно принять объем V. При этом, согласно соотношению (2.93),

$$\sqrt{g'} = \frac{1}{(2\pi)^2}. \tag{2.95}$$

Разлагая G и $\sqrt{g}$ в ряды Фурье

$$G = \mathrm{Re} \sum_{m,\ n} G_{mn} e^{i(m\theta - n\zeta)}; \quad \sqrt{g} = \mathrm{Re} \sum_{m,\ n} g_{mn} e^{i(m\theta - n\zeta)} \tag{2.96}$$

и учитывая, что при выполнении условия (2.94) коэффициенты g_{mn} выражаются формулой (2.71), т. е. $g_{mn} = (m\mu - n)\widetilde{g}_{mn}(x^1)$, получаем для коэффициентов разложения функции G, с помощью которой осуществляется преобразование координат:

$$G_{mn} = -i(2\pi)^3 \widetilde{g}_{mn}(x^1). \tag{2.97}$$

Полученная система координат V, θ, ζ с $\sqrt{g'} = \frac{1}{(2\pi)^2}$ носит название натуральной тороидальной системы координат. Она была введена Хамадой [5] и затем использована Грином и Джонсоном [7] для исследования гидромагнитной устойчивости тороидальных конфигураций.

Как видно из уравнения (2.63) и соотношений (2.67) и (2.95), в выбранной системе координат $\widetilde{\nu} = 0$. Согласно уравнениям (2.60)—(2.62), это означает, что не только магнитные силовые линии, но и линии тока в натуральной системе координат являются прямыми линиями.

Контравариантные компоненты магнитного поля и плотности тока в натуральных координатах выглядят особенно просто:

$$B^i = 2\pi \left\{0, \frac{d\chi}{dV}, \frac{d\Phi}{dV}\right\}; \tag{2.98}$$

$$j^i = 2\pi \left\{0, \frac{dI}{dV}, \frac{dJ}{dV}\right\}. \tag{2.99}$$

Следует отметить, что рассмотренные здесь криволинейные координаты практически можно ввести, если конфигурация по-

ля известна. Поэтому они, естественно, не могут быть использованы при расчете магнитных полей и магнитных поверхностей. В этих координатах удобно рассматривать общую задачу о возмущениях. Для расчета конкретных конфигураций магнитного поля наиболее подходящей является квазицилиндрическая ортогональная система координат с пространственной осью.

§ 3. ОРТОГОНАЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОСЬЮ

1. Метрика

Введем систему координат, связанную с некоторой пространственной кривой

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(s), \tag{3.1}$$

которую мы примем за ось координатной системы.

Пусть ρ — расстояние от оси; θ — угол, отсчитываемый от главной нормали ν; s — длина дуги оси, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки $s = 0$. Единичные орты вдоль координатных линий $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_s$ равны

$$\mathbf{e}_\rho = \nu \cos\theta + \beta \sin\theta; \tag{3.2}$$

$$\mathbf{e}_\theta = -\nu \sin\theta + \beta \cos\theta = \frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \theta}; \tag{3.3}$$

$$\mathbf{e}_s = \frac{d\mathbf{r}_0}{ds}, \tag{3.4}$$

где β — бинормаль к оси $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(s)$ (рис. 6).

Входящие в формулы (3.2)—(3.4) единичные векторы ν, β, $\mathbf{e}_s$ связаны формулами Серре — Френе:

$$\frac{d\nu}{ds} = -k\mathbf{e}_s + \varkappa\beta; \tag{3.5}$$

$$\frac{d\mathbf{e}_s}{ds} = k\nu; \tag{3.6}$$

$$\frac{d\beta}{ds} = -\varkappa\nu, \tag{3.7}$$

где $k = k(s)$ — кривизна, а $\varkappa = \varkappa(s)$ — кручение координатной оси $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(s)$.

Запишем радиус-вектор произвольной точки пространства

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(s) + \rho\mathbf{e}_\rho. \tag{3.8}$$

Учитывая, что, согласно формулам (3.2), (3.5), (3.7),

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial s} = -k\mathbf{e}_\rho \cos\theta + \varkappa\mathbf{e}_\theta, \tag{3.9}$$

получаем приращение радиуса-вектора $\mathbf{r}$

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_\rho d\rho + \mathbf{e}_\theta \rho (d\theta + \varkappa ds) + \mathbf{e}_s (1 - k\rho \cos\theta)\, ds. \qquad (3.10)$$

Отсюда видно, что в координатах ρ, θ, s квадрат элемента длины $(d\mathbf{r})^2$ содержит смешанное произведение дифференциалов $d\theta ds$, и, следовательно, такая система координат не является ортогональной. Однако ее легко сделать ортогональной, если вместо θ ввести новую угловую координату

$$\omega = \theta + \alpha(s), \qquad (3.11)$$

где

$$\alpha(s) = \int_0^s \varkappa ds. \qquad (3.12)$$

Метрика этой ортогональной системы координат определяется квадратом элемента длины

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 + (1 - k\rho\cos\theta)^2 ds^2, \qquad (3.13)$$

где θ определяется формулой (3.11) и, следовательно, зависит от ω и s.

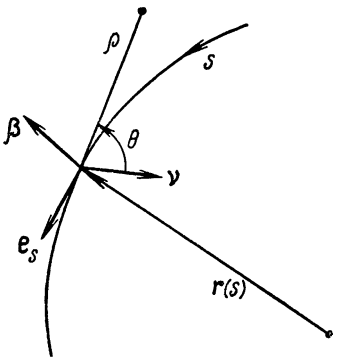


Рис. 6. Координаты, ρ, θ, s [ν, β и e_s — нормаль, бинормаль и вектор касательной к координатной оси $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$].

Если координатная ось — замкнутая линия, то координатные поверхности $\omega = \text{const}$, называемые в дифференциальной геометрии поверхностными полосами кривизны [17], не замыкаются сами на себя при полном обходе вдоль оси. Возникающую при этом неоднозначность координаты ω легко обойти, требуя, чтобы все физические величины зависели от угловой переменной ω только в комбинации с функцией $\alpha(s)$:

$$f = f(\rho, \theta, s); \quad \theta = \omega - \alpha(s). \qquad (3.14)$$

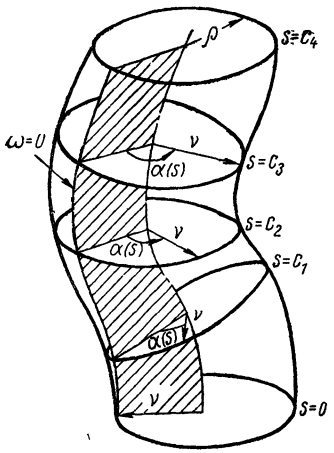
Поверхность $\theta = \text{const}$ замыкается на себя, поскольку она составляет постоянный угол с замкнутой поверхностью $\theta = 0$, натянутой на главные нормали $\nu(s)$. Поверхности $\theta = \text{const}$ называются асимптотическими поверхностными полосами [17].

Введенная ортогональная система координат становится наглядной, если рассмотреть слой, расположенный между бесконечно близкими сечениями $s = \text{const}$ и $s + ds = \text{const}$, угол между которыми $d\varphi$. Этот слой можно рассматривать как часть круглого тора с кривизной $k(s)$, в сечении которого введены полярные координаты ρ, ω. Квадрат элемента длины на поверхности этого тора равен

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 + r^2 d\varphi^2, \qquad (3.15)$$

где $r = R - \rho\cos\theta$ — расстояние от оси круглого тора с кривизной $k(s) = 1/R$ до рассматриваемой точки (рис. 7). Линии $\omega =$

$= \text{const}$ на поверхностях $\rho = \text{const}$ ортогональны (по определению) сечениям $s = \text{const}$ и, очевидно, следуют вдоль оси s непрерывно. Главная нормаль к оси ν поворачивается относительно поверхности $\omega = 0$ на угол $\alpha(s)$, так что $\theta = \omega - \alpha(s)$. Угол $\alpha(s)$ может измениться скачком. Например, для плоской оси с точкой перегиба он поворачивается скачком на π (рис. 8). В случае плавного поворота скорость изменения угла $\alpha(s)$ вдоль s, дающая угол поворота бинормали в пространстве, и является кручением оси $\alpha'(s) \equiv \varkappa(s)$. В дальнейшем угол $\alpha(s)$ будем называть *углом поворота* бинормали.



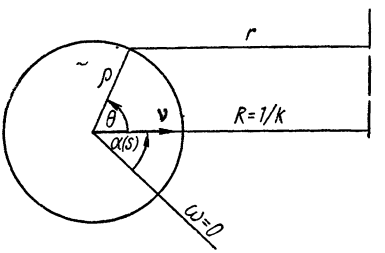


Рис. 7. Координатные поверхности $\rho = \text{const}$, $\omega = 0$ и $s = \text{const}$. Угол главной нормали ν с поверхностью $\omega = 0$ (заштрихованная поверхность) равен

$$\alpha(s) = \int_0^s \varkappa ds.$$

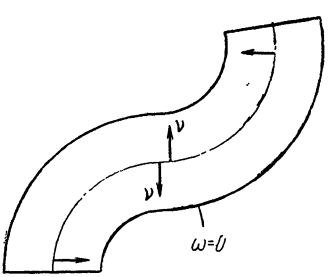


Рис. 8. Изменение направления нормали ν в точке перегиба магнитной оси.

Заметим, что силовые линии магнитного поля, создаваемого внутри соленоида с пространственной осью, будучи перпендикулярны виткам соленоида, совпадают с линиями $\rho = \text{const}$, $\omega = \text{const}$ и, следовательно, при полном обходе замкнутой системы проворачиваются на конечный угол

$$\Delta\omega = -\alpha(L). \qquad (3.16)$$

Это соотношение является точным в окрестности магнитной оси.

Введенная ортогональная система координат, предложенная впервые Мерсье [6], удобна для решения внутренних задач (таких, например, как определение полей внутри замкнутых тороидальных оболочек). Для решения внешних задач эта система координат в общем случае непригодна из-за пересечения координатных поверхностей на расстояниях, сравнимых с радиусом кривизны ее оси. Однако она может быть также полезна при рас-

чете мультипольных полей, спадающих на расстояниях, меньших радиуса кривизны.

Одним из методов решения задач в рассматриваемой системе координат является метод разложения по кривизне [18]. В первом приближении разложения по малому параметру $k\rho \ll 1$ поправки ко всем величинам будут выражаться с помощью функции $k\cos\theta = k\cos[\omega - \alpha(s)]$. Эта функция может быть представлена в виде разложения в ряд Фурье следующим образом:

$$k(s)\cos[\omega - \alpha(s)] = \mathrm{Re}\sum_{n=-\infty}^{\infty} k_n \exp[\mathrm{i}(\omega - \varkappa_n s)], \tag{3.17}$$

где

$$\varkappa_n = \varkappa_0 - 2\pi n/L, \quad \varkappa_0 = \alpha(L)/L; \tag{3.18}$$

$$k_n = \frac{1}{L}\int_0^L K(s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi n s}{L}}\,ds; \tag{3.19}$$

$$K(s) = k(s)\exp\mathrm{i}[\varkappa_0 s - \alpha(s)]. \tag{3.20}$$

Комплексную функцию $K(s)$ естественно назвать *относительной кривизной* как обобщение понятия относительной кривизны плоской кривой на случай пространственных кривых. Для плоской кривой с перегибом фаза относительной кривизны в точке перегиба скачком меняется на π и, следовательно, относительная кривизна меняет свой знак. В случае пространственных кривых фаза относительной кривизны характеризует ориентировку главной нормали в пространстве.

2. Дифференциальные операторы

Приведем для справок операторы $\nabla\varphi$, div $\mathbf{B}$, rot $\mathbf{B}$, $\nabla^2\varphi$ в рассматриваемой системе координат:

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{\partial\varphi}{\rho\partial\omega}\mathbf{e}_\omega + \frac{\partial\varphi}{h_s\partial s}\mathbf{e}_s; \tag{3.21}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = \frac{1}{\rho h_s}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho h_s B_\rho) + \frac{\partial}{\partial\omega}(h_s B_\omega) + \rho\frac{\partial B_s}{\partial s}\right\}; \tag{3.22}$$

$$\mathrm{rot}_\rho\mathbf{B} = \frac{1}{h_s}\left[\frac{\partial}{\rho\partial\omega}(h_s B_s) - \frac{\partial B_\omega}{ds}\right]; \tag{3.23}$$

$$\mathrm{rot}_\omega\mathbf{B} = \frac{1}{h_s}\left[\frac{\partial B_\rho}{\partial s} - \frac{\partial(h_s B_s)}{\partial\rho}\right]; \tag{3.24}$$

$$\mathrm{rot}_s\mathbf{B} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho B_\omega) - \frac{\partial B_\rho}{\partial\omega}\right]; \tag{3.25}$$

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(h_s\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\omega}\left(h_s\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{h_s}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right). \tag{3.26}$$

Здесь

$$h_s = 1 - k\rho\cos\theta = 1 - k(s)\rho\cos[\omega - \alpha(s)]. \qquad (3.27)$$

Естественным методом решения задач расчета характеристик магнитных ловушек является разложение по степеням расстояния от оси ρ. В дифференциальных операторах этому разложению соответствует разложение по степеням $k\rho\cos\theta$. При этом в нулевом приближении приходим к операторам цилиндрической системы координат. Однако следует иметь в виду, что условия периодичности по s для замкнутых систем, сводящиеся к требованию $f = f(\rho, \theta, s)$, где $f(\rho, \theta, s)$ — периодическая функция координат θ и s, необходимо учитывать уже в нулевом приближении.

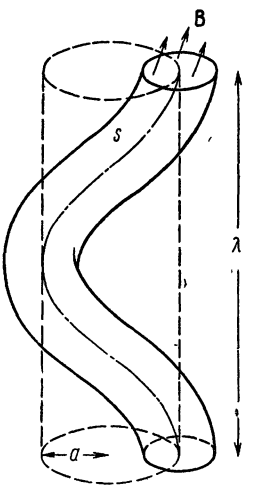


Рис. 9. Винтовая магнитная конфигурация (винтовой соленоид, или винтовая магнитная трубка).

Задача 1. Определить угол поворота бинормали и угол прокручивания магнитных силовых линий для винтовой оси.

Решение. Как известно, кривизна и кручение винтовой линии, намотанной на круглый цилиндр радиусом a с постоянным шагом λ (рис. 9), выражаются формулами

$$k = \frac{a}{a^2 + (\lambda/2\pi)^2}; \quad \varkappa = \frac{\lambda/2\pi}{a^2 + (\lambda/2\pi)^2}. \qquad (3.28)$$

По формуле (3.12) находим $\alpha(s) = \varkappa s$. Длина периода винтовой линии $L = \sqrt{4\pi^2 a^2 + \lambda^2}$, так что угол прокручивания магнитных силовых линий вблизи винтовой магнитной оси на одном периоде L равен

$$\Delta\omega = 2\pi\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 4\pi^2 a^2}}. \qquad (3.29)$$

Задача 2. Определить угол поворота бинормали и угол прокручивания магнитных силовых линий, а также фурье-компоненты относительной кривизны для магнитной оси, имеющей форму пространственной восьмерки, составленной из дуг окружностей одинакового радиуса [18].

Решение. а) Рассмотрим восьмерку (предложена А. М. Стефановским), составленную из четырех полуокружностей AB, $B'C'$, CD, $D'A'$ с одинаковой кривизной $k(s) = \frac{1}{R} = \text{const}$, плоскости которых образуют между собой углы α_0 и $\pi - \alpha_0$ (рис. 10). Полуокружности могут быть соединены прямыми отрезками $AA' = BB' = CC' = DD'$. Выберем начало отсчета дуги s в точке O. След линии $\omega = 0$, проходящей на поверхности $\rho = \text{const}$ перпендикулярно сечениям $s = \text{const}$, обозначен на рис. 10, *а* крестиками. Круговые стрелки показывают направление отсчета азимутального угла ω. Главная нормаль (показана прямыми стрелками) в точках A, B, C, D, A совершает поворот на углы $-\frac{\alpha_0}{2}$, $\pi - \alpha_0$, $-\alpha_0$, $\pi - \alpha_0$, $-\frac{\alpha_0}{2}$ соответственно. Из условий симметрии следует, что направление главной нормали в точках поворота занимает среднее положение. Получающиеся значения угла поворота $\alpha(s)$ представлены на рис. 10, *в*. Полный угол поворота

$$\alpha(L) = 2\pi - 4\alpha_0, \qquad (3.30)$$

так что угол прокручивания силовых линий вблизи магнитной оси равен

$$\Delta\omega = 4\alpha_0 - 2\pi. \tag{3.31}$$

Пусть R — радиус окружности, а l — длина каждого из прямых участков. Тогда общая длина L и значение величины $\varkappa_n$, входящей в формулу (3.20),

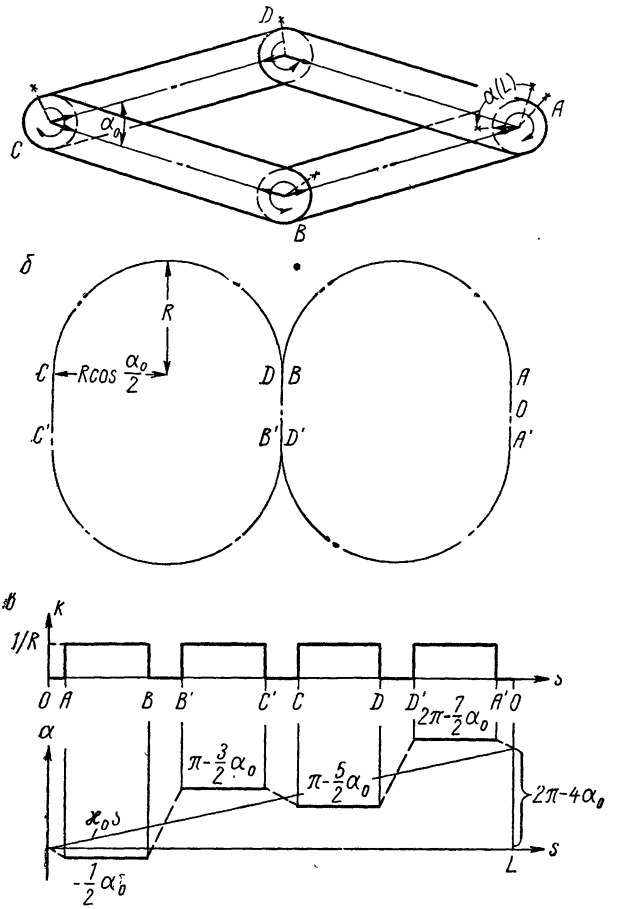


Рис. 10. Восьмерка, составленная из четырех полуокружностей:

а — вид камеры сбоку; (прямые стрелки показывают направление главной нормали, круговые — направление изменения азимутального угла ω); *б* — ось камеры (вид сверху); *в* — кривизна и угол поворота.

будут (см. рис. 10, *б*)

$$L = 4\pi R\,(1 + \nu); \tag{3.32}$$

$$\nu = l/\pi R; \tag{3.33}$$

$$\varkappa_n = q_n/R,\ q_n = \frac{1 - n - 2\alpha_0/\pi}{2\,(1 + \nu)}. \tag{3.34}$$

Подставив значения $k(s)$ и $\alpha(s)$ в формулу (3.19) и выполнив интегрирование и простые преобразования, получим следующую формулу для коэффициентов k_n:

$$k_n = \frac{4\cos n\pi\,(\cos n\pi/2)\,[\cos(n+1)\pi/4]\sin \pi q_n/2}{\pi R\,(1-n-2\alpha_0/\pi)}. \qquad (3.35)$$

б) Рассмотрим теперь восьмерку Спитцера, которая исторически была первой предложенной системой с тороидальными магнитными поверхностями,

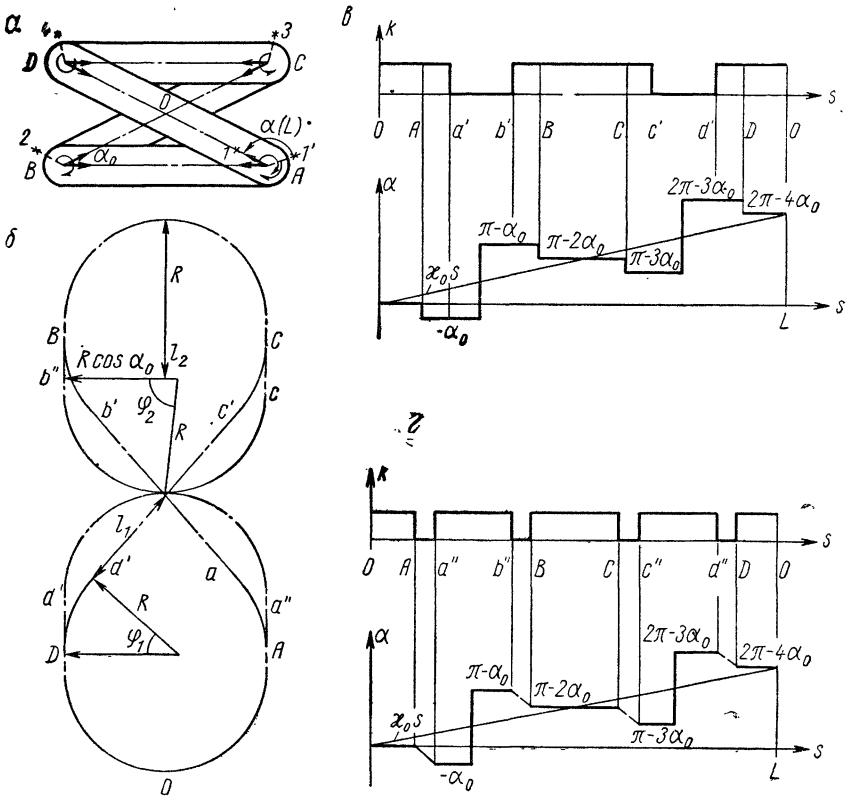


Рис. 11. Восьмерка Спитцера:

а — вид камеры сбоку; *б* — ось камеры (вид сверху); *в* — кривизна и угол поворота в варианте с двумя прямолинейными участками; *г* — кривизна и угол поворота в варианте с четырьмя прямолинейными участками.

создаваемыми внешними токами. Эта восьмерка составляется из двух полуокружностей AD и BC радиусом R (рис. 11, *а*), соединенных линиями AB и CD, лежащими в параллельных плоскостях.

Проанализируем два варианта такой восьмерки: 1) восьмерка с двумя прямолинейными участками $a'b'$, $c'd'$, длину каждого из которых обозначим $2l_1$; 2) восьмерка с четырьмя прямолинейными участками Aa'', Bb'', Cc'', Dd'', длина каждого из которых — l_2. При $l_1 = l_2$ оба варианта совпадают; получается восьмерка с наименьшим для данного типа числом элементов, равным шести. Функции $k(s)$ и $\alpha(s)$ для первого варианта приведены на рис. 11, *в*,

а для второго — на рис. 11, *г*. Общая длина периметра каждой из восьмерок может быть записана в форме уравнения (3.32):

$$L = 4\pi R(1+\nu). \tag{3.36}$$

Значения ν и фурье-компонент k_n относительной кривизны, вычисленные по формуле (3.19), оказываются следующими:

для первой восьмерки (с двумя прямолинейными участками)

$$k_n = \frac{1+\cos n\pi}{\pi R(1-n-2\alpha_0/\pi)}\left\{\sin\frac{\pi}{2}q_n + \sin\left[\frac{\pi}{2}(1-n) - \frac{l_1}{R}q_n\right] - \right.$$
$$\left. - \sin\left(\frac{\pi}{2}q_n + \alpha_0\right)\right\}; \tag{3.37}$$

$$\nu = l_1/\pi R + \varphi_1/\pi - 1/2, \tag{3.38}$$

причем l_1 и φ_1 связаны соотношением (см. рис. 11, *б*)

$$l_1 = R(\cos\varphi_1 + \cos\alpha_0 - 1)/\sin\varphi_1; \tag{3.39}$$

для второй восьмерки (с четырьмя прямолинейными участками)

$$k_n = \frac{1+\cos n\pi}{\pi R(1-n-2\alpha_0/\pi)}\left\{\sin\frac{\pi}{2}q_n + \sin\frac{\pi}{2}(1-n) - \right.$$
$$\left. - \sin\left[\left(\frac{\pi}{2}+\frac{l_2}{R}\right)q_n + \alpha_0\right]\right\}; \tag{3.40}$$

$$\nu = l_2/\pi R + \varphi_2/\pi - 1/2, \tag{3.41}$$

где φ_2 определяется из условия (см. рис. 11, *б*)

$$\cos\varphi_2 = 1 - \cos\alpha_0. \tag{3.42}$$

Выражения для коэффициентов $\varkappa_n$ в обоих случаях сохраняют прежнюю форму (3.34):

$$\varkappa_n = q_n/R, \quad q_n = \frac{1-n-2\alpha_0/\pi}{2(1+\nu)}. \tag{3.43}$$

§ 4. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ВБЛИЗИ ЗАДАННОЙ МАГНИТНОЙ СИЛОВОЙ ЛИНИИ

Магнитное поле в окрестности магнитной силовой линии удобно описывать в системе координат, связанной с этой силовой линией. Пусть $k(s)$ — кривизна, а $\varkappa(s) = \alpha'(s)$ — кручение заданной магнитной силовой линии. Тогда уравнение Лапласа для скалярного потенциала φ магнитного поля

$$\mathbf{B} = \nabla\varphi \tag{4.1}$$

запишем

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\left(h_s\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\omega}\left(h_s\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{h_s}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right) = 0, \tag{4.2}$$

где

$$h_s = 1 - k_\rho\cos\theta, \quad \theta = \omega - \alpha(s).$$

Решение уравнения (4.2) ищем в виде разложения по степеням отклонения от оси ρ:

$$\varphi = \int_0^s B_0(s)\,ds + A(\theta, s)\rho^2 + B(\theta, s)\rho^3 + C(\theta, s)\rho^4 + \ldots \quad (4.3)$$

Линейный по ρ член отсутствует, поскольку на магнитной силовой линии $B_\rho = d\varphi/d\rho = 0$. Подстановка разложения (4.3) в уравнение (4.2) приводит после приравнивания членов при одинаковых степенях ρ к уравнениям:

$$\ddot{A} + 4A = -B_0'; \quad (4.4)$$

$$\ddot{B} + 9B = 2kA\cos\theta - k\dot{A}\sin\theta - 2kB_0'\cos\theta - B_0(k\cos\theta)'; \quad (4.5)$$

$$\ddot{C} + 16C = 2Ak^2\cos^2\theta + 3Bk\cos\theta - \dot{A}k^2\sin\theta\cos\theta - \dot{B}k\sin\theta -$$
$$- A'' - 3B_0kk'\cos^2\theta - 3B_0'k^2\cos^2\theta + 3B_0k^2\alpha'\sin\theta\cos\theta, \quad (4.6)$$

где точкой и штрихом обозначены соответственно частные производные по ω и s.

Запишем общее решение этих уравнений:

$$A = -\frac{B_0'}{4} + D_2\sin 2(\theta + \Delta_2); \quad (4.7)$$

$$B = -\frac{5}{16}B_0'k\cos\theta - \frac{B_0}{8}(k\cos\theta)' + \frac{k}{4}D_2\sin(\theta + 2\Delta_2) +$$
$$+ D_3\sin 3(\theta + \Delta_3); \quad (4.8)$$

$$C = C_0 + C_1\cos 2u + C_2\sin 2u + D_4\sin 4(\theta + \Delta_4). \quad (4.9)$$

Здесь $D_2(s)$, $D_3(s)$, $D_4(s)$ — амплитуды, а $\Delta_2(s)$, $\Delta_3(s)$, $\Delta_4(s)$ — фазы соответствующих гармоник магнитного поля. Выражения для коэффициентов C_0, C_1, C_2 приведены ниже [см. уравнения (4.21)—(4.23)]. В случае замкнутых конфигураций из условия однозначности поля следует, что амплитуды D_2, D_3, D_4 должны быть периодическими функциями s, а фазы Δ_2, Δ_3, Δ_4 должны удовлетворять условиям:

$$\left.\begin{aligned}\Delta_2(s + L) &= \Delta_2(s) + 2\pi n_2/2;\\ \Delta_3(s + L) &= \Delta_2(s) + 2\pi n_3/3;\\ \Delta_4(s + L) &= \Delta_4(s) + 2\pi n_4/4,\end{aligned}\right\} \quad (4.10)$$

где n_2, n_3, n_4 — целые числа, определяющие число периодов поля соответствующих гармоник, укладывающихся на длине системы L.

Имея в виду решение задачи о нахождении магнитных поверхностей, удобно дать другое представление для решения уравнений (4.4)—(4.6), введя единую фазу

$$u = \theta + \delta(s) = \omega - \alpha(s) + \delta(s) \quad (4.11)$$

для выражений второй, третьей и т. д. гармоник магнитного поля:

$$A = -\frac{B_0'}{4} + A_1(s)\sin 2u + A_2(s)\cos 2u; \qquad (4.12)$$

$$B = -\frac{5}{16}B_0' k\cos\theta - \frac{B_0}{8}(k\cos\theta)' + \frac{k}{4}[A_1\sin(u+\delta) + A_2\cos(u+\delta)] - \frac{B_0}{9}\frac{\partial}{\partial s}(Q\cos 3u + P\sin 3u); \qquad (4.13)$$

$$C = C_0 + C_1\cos 2u + C_2\sin 2u - \frac{B_0}{16}\frac{\partial}{\partial s}(G\cos 4u + F\sin 4u). \qquad (4.14)$$

Фаза $\delta(s)$ здесь лишний параметр, которым можно воспользоваться в дальнейшем при нахождении уравнения магнитных поверхностей так, чтобы получить наиболее простую их запись. Произвол в выборе магнитного поля заложен в амплитудах A_1, A_2, Q, P, F, G. При любой фиксированной вспомогательной фазе $\delta(s)$ с помощью выбора этих амплитуд можно задать любое возможное поле, удовлетворяющее уравнению Лапласа. Без ограничения общности можно, например, положить $\delta = 0$.

Кроме этого, для удобства нахождения магнитных поверхностей общие решения однородных уравнений (4.5) и (4.6) записаны в виде производных по s. Как функции от u величины $B(\theta, s)$ и $C(\theta, s)$ имеют структуру:

$$B(\theta, s) = B_1\cos u + B_2\sin u + B_3\cos 3u + B_4\sin 3u; \qquad (4.15)$$

$$C(\theta, s) = C_0 + C_1\cos 2u + C_2\sin 2u + C_3\cos 4u + C_4\sin 4u, \qquad (4.16)$$

где

$$B_1 = -\left(\frac{5B_0'k}{16} + \frac{B_0k'}{8} - \frac{kA_2}{4}\right)\cos\delta - \left[\frac{B_0(u'-\delta')}{8} - \frac{A_1}{4}\right]k\sin\delta; \qquad (4.17)$$

$$B_2 = -\left(\frac{5B_0'k}{16} + \frac{B_0k'}{8} + \frac{kA_2}{4}\right)\sin\delta + \left[\frac{B_0(u'-\delta')}{8} + \frac{A_1}{4}\right]k\cos\delta; \qquad (4.18)$$

$$B_3 = -\frac{B_0}{9}(Q' + 3u'P); \qquad (4.19)$$

$$B_4 = -\frac{B_0}{9}(P' - 3u'Q); \qquad (4.20)$$

$$C_0 = \frac{1}{64}\left(B_0''' - 7B_0kk' + \frac{5}{2}B_0'k^2\right) + \frac{5}{32}k^2A_1\sin 2\delta + \frac{3}{32}k^2A_2\cos 2\delta; \qquad (4.21)$$

$$C_1 = \frac{1}{12}\left\{\frac{5}{4}k^2A_2 - A_2'' - 4u'A_1' - 2u''A_1 + 4u'^2A_2 - \right.$$

$$- \frac{k^2}{8}B_0(u' - \delta')\sin 2\delta - \left(\frac{33}{16}k^2B_0' + \frac{13B_0}{8}kk'\right)\cos 2\delta +$$

$$\left. + 3k(B_3\cos\delta + B_4\sin\delta)\right\}; \qquad (4.22)$$

$$C_2 = \frac{1}{12}\left\{\frac{5}{4}k^2A_1 - A_1'' + 4u'A_2' + 2u''A_2 + 4u'^2A_2 + \right.$$

$$+ \frac{k^2}{8}B_0(u' - \delta')\cos 2\delta - \left(\frac{33}{16}k^2B_0' + \frac{13B_0}{8}kk'\right)\sin 2\delta +$$

$$\left. + 3k(B_4\cos\delta - B_3\sin\delta)\right\}; \qquad (4.23)$$

$$C_3 = -\frac{B_0}{16}(G' + 4u'F); \qquad (4.24)$$

$$C_4 = -\frac{B_0}{16}(F' - 4u'G). \qquad (4.25)$$

Отметим, что произвол в задании магнитного поля заключен в свободном выборе продольного поля на оси $B_0(s)$ и амплитуд второй, третьей и четвертой гармоник мультипольного поля A_1, A_2, B_3, B_4, C_3, C_4.

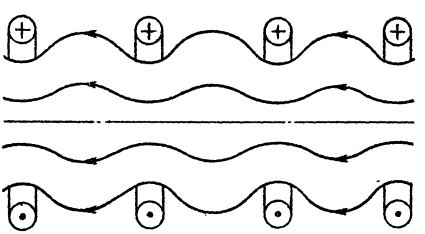


Рис. 12. Гофрированное магнитное поле.

В пренебрежении кривизной, магнитное поле, разложенное по степеням ρ, можно рассматривать как суперпозицию нулевой, второй, третьей и четвертой гармоник. Нулевая гармоника $\mathbf{B} = B_0(s)\mathbf{e}_s$ может быть воспроизведена, например, с помощью соленоида (однородное поле) либо отдельных витков (гофрированное поле), расположенных вокруг оси s (рис. 12).

Поле второй, третьей и четвертой гармоник можно создать с помощью соответственно четырех, шести и восьми проводников с чередующимся направлением тока, которые обвивают цилиндр $\rho = \text{const}$ (рис. 13). Заметим, что дискретность распределения токов по азимуту приводит к появлению дополнительных гармоник более высокого порядка. Если $2m$ — число проводников, нужных для создания поля с мультипольностью m, то наряду с m-й гармоникой возникают гармоники с номером N, равным [19]

$$N = m(2n + 1), \qquad (4.26)$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$. Например, первые дополнительные гармоники для $m = 2, 3, 4$ имеют соответственно номера $N = 6, 9, 12$. Так как

потенциал магнитного поля этих гармоник пропорционален ρ^N, то в нашем разложении поля до четвертой гармоники [см. формулу (4.3)] они не дают вклада.

Для оценки разложения (4.3) по степеням ρ сравним его с точным решением для $\varphi(\rho, \theta, s)$ в случае m-заходных винтовых обмоток [19]:

$$\varphi_m(\rho, \theta, s) = I_m\left(\frac{2\pi n}{L}\rho\right)\sin\left(m\omega - \frac{2\pi}{L}ns\right). \qquad (4.27)$$

Здесь n — число периодов поля на длине L, так что расстояние по s между соседними проводниками с одинаковым направлени-

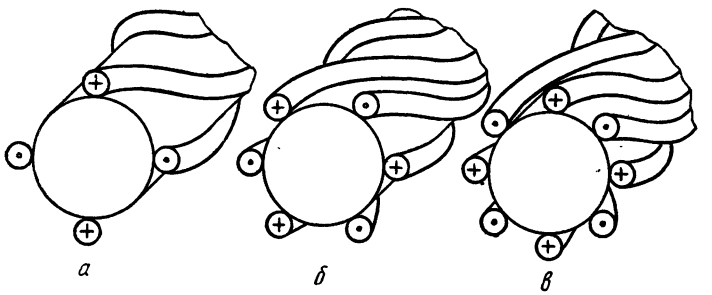


Рис. 13. Винтовые обмотки:
а — двухзаходная; *б* — трехзаходная; *в* — четырехзаходная.

ем тока равно $\lambda = L/n$. Разложение (4.3) соответствует замене бесселевой функции первым членом ее разложения:

$$I_m(x) \approx \left(\frac{x}{2}\right)^m \frac{1}{m!}. \qquad (4.28)$$

m	2		3		4	
x	0,6	1	0,6	1	0,6	1
$\left(\frac{x}{2}\right)^m \frac{1}{m!}$	0,045	0,125	0,0045	0,02083	0,0003375	0,002604
$I_m(x)$	0,0464	0,136	0,0046	0,0222	0,000344	0,00274
Погрешность, %	2,2	9	2,5	5	3	4

Как видно из приведенной таблицы, при $x \leqslant 1$ погрешность такой замены составляет не более 10%.

Следовательно, разложение (4.3) можно считать вполне пригодным на расстояниях от оси, удовлетворяющих условию

$$\rho \leqslant \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{L}{2\pi n}. \qquad (4.29)$$

В случае замкнутых конфигураций величина L в этой формуле представляет собой длину системы вдоль оси s. Шаг отдельного проводника m-заходной обмотки равен $Lm/2\pi n$.

Другая возможность создания конфигураций с гофрированными и винтовыми полями состоит в использовании соленоидов профилированного сечения по форме, близкой к форме требующихся магнитных поверхностей [20—22]. Например, конфигурация двухзаходного стелларатора образуется внутри соленоида с эллиптическим сечением, вращающимся по мере продвижения вдоль оси соленоида (рис. 14).

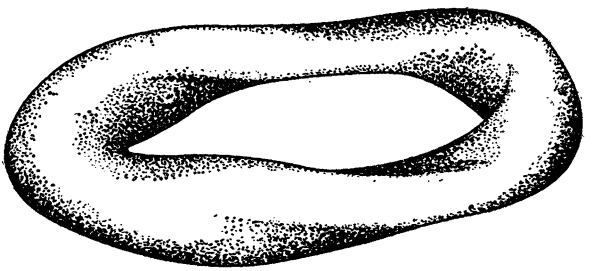


Рис. 14 Тороидальная поверхность с проворачивающимся эллиптическим сечением.

Задача 1. Определить магнитные поверхности m-заходного стелларатора с прямой магнитной осью методом разложения по степеням ρ. Пользуясь формулами § 13, найти число вращения μ.

Решение. Скалярный потенциал магнитного поля $\mathbf{B} = \nabla\varphi$ для m-заходного стелларатора удобно записать в виде

$$\varphi = B_0\left(s + \varepsilon\frac{u'}{m\rho_S^{m-2}}\rho^m \sin mu\right). \tag{4.30}$$

В соответствующем приближении разложения по ρ магнитные поверхности $\psi = \text{const}$, удовлетворяющие уравнению $\mathbf{B}\nabla\psi = 0$, имеют вид

$$\psi = \rho^2 + \frac{2\varepsilon}{m\rho_S^{m-2}}\rho^m \cos mu. \tag{4.31}$$

Здесь $B_0 = \text{const}$ — продольное магнитное поле;

$$mu = m\omega + \frac{2\pi}{L}ns,\quad u' = \frac{2\pi}{L}\frac{n}{m}; \tag{4.32}$$

n — число периодов поля на длине L стелларатора; ε и ρ_S — параметры, характеризующие амплитуду винтового поля и форму магнитных поверхностей. При $m = 2$ параметр ρ_S выпадает и конфигурация характеризуется одним безразмерным параметром ε. При $m \geqslant 3$ параметр ε можно принять равным единице. В этом случае ρ_S представляет собой расстояние от оси до ребра сепаратрисы. Производная μ поперечного потока по продольному, связанная с углом прокручивания ι силовых линий соотношением $\iota = 2\pi\mu$, легко рассчитывается методом, изложенным в § 13, и равна вблизи оси

$$\mu(\rho) = \frac{(m-1)n}{m^2}\varepsilon^2\left(\frac{\rho^2}{\rho_S^2}\right)^{m-2}. \tag{4.33}$$

Задача 2. Определить магнитные поверхности, образующиеся внутри соленоида с профилированным сечением

$$\rho^2 + \frac{2\varepsilon_1}{m\rho_c^{m-2}}\rho^m \cos mu = a^2, \tag{4.34}$$

не сильно отличающимся от кругового $\left(\frac{2\varepsilon_1 a^{m-2}}{m\rho_c^{m-2}} \ll 1\right)$.

Решение. Скалярный потенциал магнитного поля внутри и вне соленоида соответственно, можно записать как

$$\varphi_i = B_0\left(s + \frac{\varepsilon u'}{m\rho_S^{m-2}}\rho^m \sin mu\right); \tag{4.35}$$

$$\varphi_e = B_0 C \frac{1}{\rho^m}\sin mu, \tag{4.36}$$

так что

$$\left.\begin{aligned} &B_{i\rho} = B_0\frac{\varepsilon u'}{\rho_S^{m-2}}\rho^{m-1}\sin mu,\ B_{e\rho} = -B_0\frac{mC}{\rho^{m+1}}\sin mu;\\ &B_{i\omega} = B_0\frac{\varepsilon u'}{\rho_S^{m-2}}\rho^{m-1}\cos mu,\ B_{e\omega} = B_0\frac{mC}{\rho^{m+1}}\cos mu;\\ &B_{is} = B_0\left(1 + \frac{\varepsilon u'^2}{\rho_S^{m-2}}\rho^m\cos mu\right),\ B_{es} = B_0\frac{mu'C}{\rho^m}\cos mu. \end{aligned}\right\} \tag{4.37}$$

Потенциалу φ_i соответствует поверхностная функция (см. предыдущую задачу)

$$\psi = \rho^2 + \frac{2\varepsilon}{m\rho_S^{m-2}}\rho^m\cos mu. \tag{4.38}$$

Задача заключается, следовательно, в нахождении связи параметра ε/ρ_S^{m-2} магнитных поверхностей с соответствующим параметром $\varepsilon_1/\rho_c^{m-2}$ соленоида. Эта связь определяется из условия сшивки решений на поверхности соленоида, единичная нормаль к которой в линейном по $\varepsilon_1/\rho_c^{m-2}$ приближении

$$\mathbf{n} = \left\{1, -\frac{\varepsilon_1 a^{m-2}}{\rho_c^{m-2}}\sin mu, -\frac{\varepsilon_1 u' a^{m-1}}{\rho_c^{m-2}}\sin mu\right\}. \tag{4.39}$$

При отсутствии продольного тока в соленоиде ($B_{i\omega} = B_{e\omega}$) находим

$$C = \frac{\varepsilon_1 u'}{m\rho_c^{m-2}}. \tag{4.40}$$

Из условия непрерывности нормальной составляющей поля на поверхности соленоида с учетом полученного значения для C находим

$$\frac{\varepsilon}{\rho_S^{m-2}} = \frac{\varepsilon_1}{2\rho_c^{m-2}}. \tag{4.41}$$

Отсюда следует, что при $m = 2$ параметр эллиптичности магнитных поверхностей в два раза меньше параметра эллиптичности сечения соленоида

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{2}. \tag{4.42}$$

При $m \geqslant 3$, положив $\varepsilon = \varepsilon_1 = 1$, видим, что расстояние до ребра сепаратрисы семейства магнитных поверхностей превышает расстояние до ребра сепаратрисы семейства поверхностей, к которым можно отнести поверхность соленоида

$$\left(\frac{\rho_S}{\rho_c}\right)^{m-2} = 2. \tag{4.43}$$

Следовательно, магнитные поверхности внутри соленоида оказываются скругленными по сравнению с поверхностью соленоида; крайние внутренние поверхности пересекают стенки соленоида.

Задача 3. Определить магнитное поле замкнутого пространственного соленоида с плавной кривизной и кручением в линейном приближении по кривизне.

Р е ш е н и е. В нулевом приближении (прямой соленоид) магнитные потенциалы внутри и вне соленоида равны соответственно $\varphi_i^0 = B_0 s$, $\varphi_e^0 = 0$. Уравнение первого приближения для потенциала $\varphi = \varphi^0 + \varphi_1$ в случае плавной оси соленоида имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} = -B_0 \rho \frac{\partial}{\partial s}(k \cos \theta). \tag{4.44}$$

Его решение

$$\varphi_i = B_0 s + \left(C_1 \rho - \frac{B_0}{8} \rho^3\right) \frac{\partial}{\partial s}(k \cos \theta); \tag{4.45}$$

$$\varphi_e = \frac{C_2}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial s}(k \cos \theta). \tag{4.46}$$

В случае идеально проводящего соленоида из условия обращения в нуль нормальной составляющей поля на поверхности соленоида $\rho = \rho_1$ получаем

$$C_2 = 0;\ C_1 = \frac{3}{8} B_0 \rho_1^2. \tag{4.47}$$

Для установившегося магнитного поля при конечной электропроводности соленоида из условий непрерывности нормальной и азимутальной компонент магнитного поля (отсутствие продольного тока) находим

$$C_2 = \frac{1}{8} B_0 \rho_1^4;\ C_1 = \frac{1}{4} B_0 \rho_1^2. \tag{4.48}$$

Нетрудно убедиться, что потенциалу φ_i соответствует следующая функция магнитных поверхностей, удовлетворяющая в нужном приближении уравнению $\nabla \varphi_i \nabla \psi = 0$, где

$$\psi = \rho^2 - \left(\frac{2C_1}{B_0} - \frac{3}{4} \rho^2\right) k \rho \cos \theta. \tag{4.49}$$

В системе координат, связанной с магнитной осью, решение может быть записано в виде

$$\varphi_i = B_0 s - \frac{B_0}{8} \rho^3 \frac{\partial}{\partial s}(k \cos \theta); \tag{4.50}$$

$$\psi = \rho^2 + \frac{3}{4} k \rho^3 \cos \theta. \tag{4.51}$$

Уравнение магнитных поверхностей $\psi = \text{const}$ с радиусом сечения ρ_0, целиком помещающихся внутри соленоида, можно записать как

$$\rho = \rho_0 + \xi(\rho_0)\cos\theta, \tag{4.52}$$

где

$$\xi(\rho_0) = -\frac{3}{8} k\rho_0^2. \tag{4.53}$$

Задача 4. Определить магнитное поле замкнутого пространственного соленоида, ось которого характеризуется произвольными кривизной $k(s)$ и кручением $\varkappa(s)$.

Р е ш е н и е. Линеаризованное по кривизне уравнение Лапласа для скалярного потенциала $\varphi = B_0 s + \varphi_1$ имеет вид

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\rho^2\partial\omega^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial s^2} = -B_0\rho\frac{\partial}{\partial s}(k\cos\theta), \tag{4.54}$$

где

$$\theta = \omega - \alpha(s),\quad \alpha(s) = \int_0^s \varkappa(s)\,ds. \tag{4.55}$$

Разложим φ_1 в ряд Фурье, аналогичный разложению (3.17) функции $k\cos\theta$:

$$\varphi_1 = \mathrm{Re}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi_{1n}\exp[\mathrm{i}(\omega - \varkappa_n s)],\quad \varkappa_n = \frac{\alpha(L) - 2\pi n}{L}. \tag{4.56}$$

Для фурье-компонент магнитного потенциала внутри и вне соленоида получаем соответственно выражения:

$$\varphi_{1n}^i = -\mathrm{i}\frac{k_n}{\varkappa_n}B_0\rho + \frac{A_n}{\varkappa_n}I_1(\varkappa_n\rho); \tag{4.57}$$

$$\varphi_{1n}^e = \frac{B_n}{\varkappa_n}K_1(\varkappa_n\rho), \tag{4.58}$$

где A_n, B_n — константы, подлежащие определению из граничных условий на поверхности соленоида $\rho = \rho_1$.

1. Если соленоид идеально проводящий, то радиальная компонента магнитного поля при $\rho = \rho_1$ равна нулю. Отсюда следует

$$B_n = 0;\quad A_n = \mathrm{i}\frac{k_n}{\varkappa_n I_1'(\varkappa_n\rho)}B_0. \tag{4.59}$$

Для магнитного поля $\mathbf{B}_1 = \nabla\varphi_i$ получаем выражения:

$$\left.\begin{aligned}
B_\rho^i &= B_0\,\mathrm{Re}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{-\mathrm{i}\frac{k_n}{\varkappa_n}\left[1 - \frac{I_1'(\varkappa_n\rho)}{I_1'(\varkappa_n\rho_1)}\right]\exp\mathrm{i}(\omega - \varkappa_n s)\right\};\\
B_\omega^i &= B_0\,\mathrm{Re}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{k_n}{\varkappa_n}\left[1 - \frac{I_1(\varkappa_n\rho)}{\varkappa_n\rho I_1'(\varkappa_n\rho_1)}\right]\exp[\mathrm{i}(\omega - \varkappa_n s)];\\
B_s^i &= B_0 + B_0\,\mathrm{Re}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{k_n}{\varkappa_n}\frac{I_1(\varkappa_n\rho)}{I_1'(\varkappa_n\rho_1)}\exp[\mathrm{i}(\omega - \varkappa_n s)].
\end{aligned}\right\} \tag{4.60}$$

2. В случае соленоида с конечной электропроводностью установившееся магнитное поле подчиняется условиям непрерывности на поверхности соленоида нормальной составляющей магнитного поля ($B_\rho^e = B_\rho^i$ при $\rho = \rho_1$) и условию равенства скачка тангенциальной составляющей магнитного поля поверхностной плотности тока. Если витки соленоида перпендикулярны его оси, то $j_s = 0$ и, следовательно, $B_\omega^e = B_\omega^i$ при $\rho = \rho_1$. Эти два условия приводят к уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} A_n I_1'(\varkappa_n\rho_1) - B_n K_1'(\varkappa_n\rho_1) &= \mathrm{i}\frac{k_n}{\varkappa_n} B_0; \\ A_n I_1(\varkappa_n\rho_1) - B_n K_1(\varkappa_n\rho_1) &= \mathrm{i}k_n\rho_1 B_0. \end{aligned}\right\} \tag{4.61}$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \mathrm{i}k_n\varkappa_n\rho_1^2 B_0 K_2(\varkappa_n\rho_1); \\ B_n &= -\mathrm{i}k_n\varkappa_n\rho_1^2 B_0 I_2(\varkappa_n\rho_1). \end{aligned}\right\} \tag{4.62}$$

Таким образом, поле внутри соленоида выражается формулами:

$$\left.\begin{aligned} B_\rho &= B_0\,\mathrm{Re}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{-\mathrm{i}\left[\frac{k_n}{\varkappa_n} - k_n\varkappa_n\rho_1^2 K_2(\varkappa_n\rho_1) I_1'(\varkappa_n\rho)\right]\exp[\mathrm{i}(\omega - \varkappa_n s)]\right\}; \\ B_\omega &= B_0\,\mathrm{Re}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{k_n}{\varkappa_n} - k_n\rho_1^2 K_2(\varkappa_n\rho_1)\frac{I_1(\varkappa_n\rho)}{\rho}\right]\exp[\mathrm{i}(\omega - \varkappa_n s)]; \\ B_s &= B_0 + B_0\,\mathrm{Re}\sum_{n=-\infty}^{\infty} k_n\varkappa_n\rho_1^2 K_2(\varkappa_n\rho_1) I_1(\varkappa_n\rho)\exp[\mathrm{i}(\omega - \varkappa_n s)]. \end{aligned}\right\} \tag{4.63}$$

Поле вне соленоида

$$\left.\begin{aligned} B_\rho &= B_0\,\mathrm{Re}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{-\mathrm{i}k_n\varkappa_n\rho_1^2 I_2(\varkappa_n\rho_1) K_1'(\varkappa_n\rho)\exp[\mathrm{i}(\omega - \varkappa_n s)]\right\}; \\ B_\omega &= B_0\,\mathrm{Re}\sum_{n=-\infty}^{\infty} k_n\rho_1^2 I_2(\varkappa_n\rho_1)\frac{K_1(\varkappa_n\rho)}{\rho}\exp[\mathrm{i}(\omega - \varkappa_n s)]; \\ B_s &= B_0 + B_0\,\mathrm{Re}\sum_{n=-\infty}^{\infty} k_n\varkappa_n\rho_1^2 I_2(\varkappa_n\rho_1) K_1(\varkappa_n\rho)\exp[\mathrm{i}(\omega - \varkappa_n s)]. \end{aligned}\right\} \tag{4.64}$$

Если кривизна $k(s)$ и угол поворота $\alpha(s)$ — плавные функции, то фурье-компоненты относительной кривизны малы при $|n| \gg 1$, так что в разложении можно всюду сохранить лишь несколько членов. При этом можно считать, очевидно, что $\varkappa_n\rho \ll 1$, и разложить функции Бесселя в ряды. Сохраняя первые члены этих разложений, получим формулы для полей, эквивалентные формулам предыдущей задачи.

§ 5. СТРУКТУРА МАГНИТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ОКРЕСТНОСТИ ЗАМКНУТОЙ СИЛОВОЙ ЛИНИИ

Прямая задача расчета магнитных поверхностей $\psi(\mathbf{r}) = \mathrm{const}$ по заданному магнитному полю $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ является в общем случае весьма трудной задачей. Это обстоятельство непосредст-

венно связано с необычайной сложностью поведения силовых линий произвольно заданного магнитного поля. Точные аналитические решения известны только для простейших конфигураций, обладающих цилиндрической и винтовой симметрией. В общем случае для нахождения магнитных поверхностей приходится прибегать к численному интегрированию уравнений силовых линий. Эти уравнения в произвольной криволинейной системе координат x^1, x^2, x^3 имеют вид

$$\frac{dx^1}{B^1} = \frac{dx^2}{B^2} = \frac{dx^3}{B^3}, \tag{5.1}$$

где B^i — контравариантные компоненты вектора **B**.

Система уравнений силовых линий (5.1) может иметь два интеграла, $\psi(\mathbf{r}) = \text{const}$ и $\Theta(\mathbf{r}) = \text{const}$, определяющих два семейства поверхностей, пересечения которых являются силовыми линиями. С точки зрения задачи об удержании плазмы в магнитном поле в первую очередь представляет интерес существование однозначного интеграла $\psi(\mathbf{r}) = \text{const}$, определяющего семейство замкнутых тороидальных *магнитных поверхностей.*

Для выявления структуры магнитных поверхностей в окрестности замкнутой силовой линии достаточно ограничиться квадратичными по отклонению от оси членами в разложении потенциала

$$\varphi = \int_0^s B_0 ds + \left[-\frac{B_0'}{4} + D_2 \sin 2(\theta + \Delta_2) \right] \rho^2. \tag{5.2}$$

Введем в каждом сечении $s = \text{const}$ данной силовой линии, принимаемой за координатную ось s, декартовые координаты

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= x = \rho \cos\theta; \\ x^2 &= y = \rho \sin\theta, \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

полагая $x^3 = s$. Квадрат элемента длины в этих координатах, согласно уравнению (3.13), определяется выражением

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 - 2\alpha' y dx ds + 2\alpha' x dy ds + (h_s^2 + \alpha'^2)(x^2 + y^2) ds^2 = \\ = g_{ik} dx^i dx^k. \tag{5.4}$$

Составляя контравариантные компоненты B^i вектора **B** по ковариантным $B_k = \partial\varphi/\partial x^k$ с помощью формулы $B^i = g^{ik} B_k$, где g^{ik} — контравариантный тензор, взаимный метрическому тензору g_{ik}, получим в линейном приближении:

$$B_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \alpha' y \frac{\partial\varphi}{\partial s}; \tag{5.5}$$

$$B_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \alpha' x \frac{\partial\varphi}{\partial s}; \tag{5.6}$$

$$B_s = \frac{\partial\varphi}{\partial s} = B_0(s). \tag{5.7}$$

Здесь φ — скалярный потенциал магнитного поля **B**:

$$\varphi = \int_0^s B_0 ds - \frac{B_0'}{4}(x^2 + y^2) + 2D_2 xy \cos 2\Delta_2 + D_2 (x^2 - y^2) \sin 2\Delta_2 . \tag{5.8}$$

Уравнения силовых линий принимают вид

$$\frac{dx}{ds} = \left(-\frac{B_0'}{2B_0} + \frac{2D_2}{B_0} \sin 2\Delta_2 \right) x + \left(\frac{2D_2}{B_0} \cos 2\Delta_2 + \alpha' \right) y; \tag{5.9}$$

$$\frac{dy}{ds} = \left(-\frac{B_0'}{2B_0} - \frac{2D_2}{B_0} \sin 2\Delta_2 \right) y + \left(\frac{2D_2}{B_0} \cos 2\Delta_2 - \alpha' \right) x. \tag{5.10}$$

Это линейные уравнения с периодическими коэффициентами периода L. Они отличаются от уравнений силовых линий в окрестности прямой оси лишь наличием члена $\alpha'(s) = \varkappa(s)$. Поэтому к ним применимы все результаты исследования, изложенные в работе [19]. Однозначный интеграл ψ этих уравнений определяется квадратичным выражением

$$\psi(x, y, s) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy = \text{const}, \tag{5.11}$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} — однозначные функции s. Сечения $s = \text{const}$ поверхностей $\psi(x, y, s) = \text{const}$ будут в общем случае семейством эллипсов или гипербол. В первом случае исходная силовая линия $x = y = 0$ является *магнитной* осью, окруженной замкнутыми тороидальными магнитными поверхностями эллиптического сечения. На рис. 15 эллиптические точки *1*, *2*, *5* представляют собой след магнитных осей. Точки *3*, *6* — гиперболические. Точка *4*, являющаяся, по предположению, следом замкнутой силовой линии, определяет «сдвиговую» точку. Как следует из уравнения (5.11), сдвиговая точка осуществляется при специальном соотношении между функциями a_{11}, a_{22}, a_{12}, когда квадратичная форма может быть представлена в виде произведения двух линейных множителей. При малом изменении коэффициентов a_{11}, a_{22}, a_{12} сдвиговая точка должна превратиться в эллиптическую или гиперболическую. Магнитная поверхность, на которой находилась сдвиговая точка, в этом случае расщепляется, как это показано на рисунке (см. точки *5*, *6*).

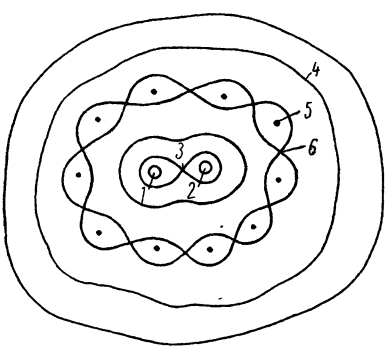


Рис. 15. Эллиптические и гиперболические особые точки нормальных сечений магнитных поверхностей.

Если разложение потенциала $\varphi(\rho, \theta, s)$ по степеням ρ начинается с третьей или более высоких степеней ρ, то структура маг-

нитных поверхностей в окрестности замкнутой силовой линии будет иной. В частности, в окрестности $\rho = 0$ в сечении $s = \text{const}$ может образоваться n-лепестковая розетка.

Для решения уравнений (5.9) и (5.10) перейдем от переменных x, y к новым переменным

$$x_1 = \sqrt{B_0}\rho\cos u; \quad y_1 = \sqrt{B_0}\rho\sin u, \tag{5.12}$$

где $u = \theta + \delta = \omega - \alpha + \delta$. Переменные x_1, y_1 связаны с x, y уравнениями

$$x = \frac{1}{\sqrt{B_0}}(x_1\cos\delta + y_1\sin\delta); \tag{5.13}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{B_0}}(y_1\cos\delta - x_1\sin\delta). \tag{5.14}$$

Уравнения (5.9) и (5.10) принимают вид

$$x_1' = \frac{2A_2}{B_0}x_1 + \left(\frac{2A_1}{B_0} - u'\right)y_1; \tag{5.15}$$

$$y_1' = -\frac{2A_2}{B_0}y_1 + \left(\frac{2A_1}{B_0} + u'\right)x_1, \tag{5.16}$$

где

$$A_1 = D_2\cos 2(\Delta_2 - \delta); \tag{5.17}$$

$$A_2 = D_2\sin 2(\Delta_2 - \delta). \tag{5.18}$$

Далее, вместо независимых величин $D_2(s)$ и $\Delta_2(s)$, характеризующих поле, рассмотрим в качестве независимых параметров величины $\varepsilon(s)$ и $\delta(s)$, связанные с A_1, A_2 соотношениями:

$$A_1 = \frac{B_0}{2}\varepsilon(\delta' - \alpha'); \tag{5.19}$$

$$A_2 = -\frac{B_0}{4}\frac{\varepsilon'}{1-\varepsilon^2}. \tag{5.20}$$

Новые величины $\varepsilon(s)$ и $\delta(s)$ определяются через D_2, Δ_2 уравнениями (5.17)—(5.20), которые невозможно в общем случае разрешить аналитически. Однако эти величины очень удобны для записи решения уравнений силовых линий. Как увидим ниже, параметр ε определяет форму магнитных поверхностей, а параметр δ — их угол поворота вокруг оси s. При $|\varepsilon| < 1$ получаются замкнутые магнитные поверхности с эллиптическим сечением, при $|\varepsilon| > 1$ поверхности гиперболические, а случай $|\varepsilon| = 1$ соответствует семейству параллельных поверхностей в окрестности рассматриваемой силовой линии. Так как наибольший интерес представляют замкнутые поверхности, то в дальнейшем будем в основном иметь в виду случай $|\varepsilon| < 1$. При этом удобно ввести новую величину $\eta(s)$, связанную с $\varepsilon(s)$ равенством

$$\operatorname{th}\eta = \varepsilon. \tag{5.21}$$

Вещественные значения η автоматически приводят к значениям $|\varepsilon| < 1$.

С помощью введенной функции $\eta(s)$ коэффициент A_2 можно записать как $A_2 = -B_0\eta'/4$, и уравнения (5.15) и (5.16) принимают вид

$$x_1' + \frac{\eta'}{2} x_1 + (1 - \varepsilon) u' y_1 = 0; \tag{5.22}$$

$$y_1' - \frac{\eta'}{2} y_1 - (1 + \varepsilon) u' x_1 = 0. \tag{5.23}$$

Эти уравнения упрощаются введением подстановок:

$$x_1 = X e^{-\eta/2}; \quad y_1 = Y e^{\eta/2}. \tag{5.24}$$

При этом

$$X' + u' \sqrt{1 - \varepsilon^2} Y = 0; \tag{5.25}$$

$$Y' - u' \sqrt{1 - \varepsilon^2} X = 0, \tag{5.26}$$

и вместо X, Y можно ввести одну комплексную функцию

$$Z = X + iY, \tag{5.27}$$

для которой получим уравнение

$$Z' - iu' \sqrt{1 - \varepsilon^2} Z = 0. \tag{5.28}$$

Его решение

$$Z = Z_0 e^{iv} = |Z_0| e^{i(v + v_0)}, \tag{5.29}$$

где

$$v(s) = \int_0^s u' \sqrt{1 - \varepsilon^2} ds. \tag{5.30}$$

Искомые интегралы уравнений силовых линий в переменных X, Y имеют вид $\psi = C|Z^2| = \text{const}$, $\Theta = \arg Z - v(s) = \text{const}$, где $C = \text{const}$, или в явном виде

$$\psi = C(X^2 + Y^2); \tag{5.31}$$

$$\Theta = \operatorname{arctg} \frac{Y}{X} - v(s). \tag{5.32}$$

В координатах X, Y сечения магнитных поверхностей представляют собой окружности (рис. 16, *а*). Угол поворота любой силовой линии на фиксированном интервале $(0, s)$ является постоянной величиной, не зависимой от начального азимута силовой линии.

Первый интеграл (5.31) в переменных ρ, u выглядит так

$$\psi = B_0(s) a(s) [1 + \varepsilon(s) \cos 2u] \rho^2; \tag{5.33}$$

$$a(s) = c_0 \operatorname{ch} \eta = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}. \tag{5.34}$$

Второй интеграл (5.32) может быть записан в виде

$$\Theta = \operatorname{arctg}\left[e^{-\eta}\operatorname{tg}(\theta+\delta)\right] - v(s). \qquad (5.35)$$

Сечения $s = \text{const}$ магнитных поверхностей $\psi = \text{const}$ представляют собой эллипсы. Параметр эллиптичности $\varepsilon(s)$ характеризует эксцентриситет эллипса $e = \sqrt{\dfrac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}}$ и связан с полуосями эллипса l_1, l_2 соотношением

$$\varepsilon = \frac{l_1^2 - l_2^2}{l_1^2 + l_2^2}. \qquad (5.36)$$

Как следует из выражения для ψ, $u = \theta + \delta(s)$ есть фаза магнитных

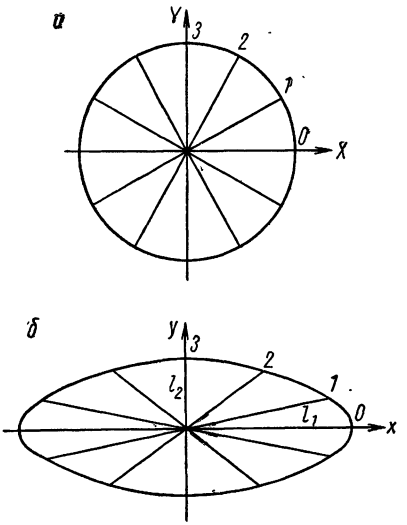


Рис. 16. Соответствие между скругленной системой координат X, Y с координатами x, y.

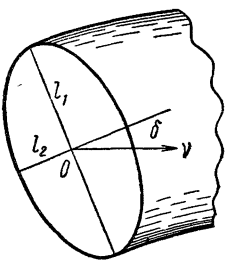


Рис. 17. Ориентация эллиптического сечения магнитной поверхности относительно главной нормали ν к магнитной оси.

поверхностей, а параметр $\delta(s)$ определяет угол поворота малой оси эллипса относительно главной нормали (рис. 17). Углы $\operatorname{arctg}\dfrac{Y}{X}$ и θ связаны нелинейным соотношением, поэтому постоянным углам поворота силовых линий в координатах X, Y соответствуют разные углы поворота в координатах x, y. Если в координатах X, Y силовая линия при каждом обходе вдоль замкнутой системы проворачивается на одинаковые углы, то в реальном пространстве эти углы будут различными. Прослеживая ход силовой трубки, ограниченный в сечении $s = \text{const}$ сектором 0—1—2, приходим к заключению, что след силовой линии движется по эллипсу таким образом, что площадь сектора между двумя последовательными положениями следа остается постоянной (см. рис. 16, *б*). Определим средний угол поворота силовой линии на периоде L как полный угол поворота при одном обходе вдоль s в системе координат X, Y. Согласно формуле (5.32), угол поворота относительно координатных поверхностей $X = \text{const}$,

$Y = \text{const}$ равен $v(L)$. Поскольку сами эти координатные поверхности повернуты относительно главной нормали к магнитной оси, согласно формулам преобразования (5.13) и (5.14), на угол $\delta(s)$, то полный угол прокручивания силовых линий относительно поверхности нормалей $\theta = \text{const}$ равен

$$\iota = v(L) - \delta(L) = \int_0^L (u' \sqrt{1-\varepsilon^2} - \delta')\, ds. \tag{5.37}$$

Подчеркнем, что входящие сюда параметры ε и δ являются характеристиками магнитной поверхности, а не магнитного поля. По заданному магнитному полю они определяются из системы дифференциальных уравнений (5.17)—(5.20).

Задача 1. Найти интегралы уравнений силовых линий (5.15), (5.16) при $|\varepsilon|>1$.

Решение. Введем функцию $\eta(s)$ соотношением

$$\operatorname{cth}\eta = \varepsilon, \tag{5.38}$$

так что $\varepsilon' = -\eta'(\varepsilon^2-1)$, $e^{2\eta} = (\varepsilon+1)/(\varepsilon-1)$. При этом снова получаем уравнения (5.22) и (5.23). Используя подстановки (5.24), приходим к уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} X' - u'\sqrt{\varepsilon^2-1}\, Y = 0; \\ Y' - u'\sqrt{\varepsilon^2-1}\, X = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.39}$$

Подстановкой $Z_\pm = X \pm Y$ эти уравнения сводятся к

$$Z_\pm \mp w'(s) Z_\pm = 0, \tag{5.40}$$

где

$$w(s) = \int_0^s u' \sqrt{\varepsilon^2-1}\, ds. \tag{5.41}$$

Решение уравнения (5.40) имеет вид

$$Z_\pm = X \pm Y = Z_0\, e^{\pm w(s) \pm w_0}, \tag{5.42}$$

где Z_0 и w_0 — вещественные константы. Отделяя эти константы, получим два искомых интеграла уравнений

$$X^2 - Y^2 = Z_0^2; \quad \frac{Y}{X} = \operatorname{th}(w + w_0). \tag{5.43}$$

Первый интеграл $\psi = Z_0^2$ определяет семейство гиперболических магнитных поверхностей

$$\psi = X^2 - Y^2 = B_0 \operatorname{sh}\eta\,(1 + \varepsilon\cos 2u)\,\rho^2 = \text{const}. \tag{5.44}$$

Второй интеграл $\Theta = w_0$ определяет ход силовых линий на поверхностях $\psi = \text{const}$:

$$\Theta = \operatorname{Arth}\frac{Y}{X} - w = \operatorname{Arth}[e^{-\eta}\operatorname{tg}(\theta+\delta)] - w(s) = \text{const}. \tag{5.45}$$

Задача 2. Найти форму истинных магнитных поверхностей, удовлетворяющих условию постоянства $U = \oint \frac{dl}{B}$ для гофрированного тороидального магнитного поля.

Р е ш е н и е. Рассмотрим тороидальное поле, в котором есть круговая силовая линия радиусом $R = 1/k$. Уравнения соседних силовых линий в декартовых координатах x, z:

$$x = x_0 \sqrt{\frac{B_0(s_0)}{B_0(s)}}; \quad z = z_0 \sqrt{\frac{B_0(s_0)}{B_0(s)}}. \tag{5.46}$$

Здесь $x = r - R$, а $B_0(s)$ — магнитное поле при $r = R$. Если кривизна k мала, то

$$U = \oint \frac{ds(1 - k\rho\cos\omega)^2}{B_0 - B_0''\rho^2/4} \approx \oint \frac{ds}{B_0}\left(1 - 2kx + \frac{B_0''}{4B_0}\rho^2\right) \approx$$

$$\approx \oint \frac{ds}{B_0}\left(1 - 2kx + \frac{3B_0'^2}{4B_0^2}\rho^2\right). \tag{5.47}$$

Отсюда

$$U = \oint \frac{ds}{B_0}\left[1 - 2kx_0\sqrt{\frac{B_0(s_0)}{B_0}} + \frac{3B_0'^2}{4B_0^3}B_0(s_0)\left(x_0^2 + y_0^2\right)\right]. \tag{5.48}$$

Истинные магнитные поверхности, удовлетворяющие условию $U = \text{const}$, в произвольном сечении $s = s_0$ представляют собой окружности с центром, смещенным от оси $r = R$ на расстояние $\Delta(s_0)$, равное

$$\Delta(s_0) = \frac{4k}{3\sqrt{B_0(s_0)}} \frac{\oint B_0^{-3/2} ds}{\oint B_0^{-4} B_0'^2 ds} \equiv \sqrt{\frac{\Phi_1}{\pi B_0(s_0)}}. \tag{5.49}$$

Выражение для U можно переписать в виде

$$U = \oint \frac{ds}{B_0}\left\{1 + \frac{3B_0'^2}{4B_0^3}B_0(s_0)\left[\rho_0^2(s_0) - \Delta^2(s_0)\right]\right\} =$$

$$= \oint \frac{ds}{B_0} + \frac{3}{4\pi}(\Phi - \Phi_1)\oint \frac{B_0'^2 ds}{B_0^4}, \tag{5.50}$$

где

$$\rho_0(s_0) = \sqrt{(x_0 - \Delta)^2 + z_0^2} = \sqrt{\frac{\Phi}{\pi B_0(s_0)}} \tag{5.51}$$

радиус магнитной поверхности в сечении $s = s_0$. Величина U является возрастающей функцией ρ_0 и, следовательно, имеет минимум на магнитной оси $r = R + \Delta(s)$.

Учет членов $\sim k^2$ приводит к тому, что сечения магнитных поверхностей становятся эллипсами, вытянутыми вдоль оси z.

§ 6. МАГНИТНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ВБЛИЗИ МАГНИТНОЙ ОСИ

Перейдем теперь к систематическому исследованию свойств замкнутых тороидальных магнитных поверхностей методом разложения по степеням ρ, считая заданной магнитную ось, характеризующуюся кривизной $k(s)$ и кручением $\varkappa(s) = \alpha'(s)$.

Магнитные поверхности $\psi(\rho, \theta, s) = \text{const}$, на которых лежат силовые линии поля $\mathbf{B} = \nabla \varphi$, определяются однозначным решением уравнения

$$\nabla \varphi \nabla \psi = 0. \tag{6.1}$$

Функцию $\psi(\rho, \theta, s)$ будем искать в виде

$$\psi = B_0(s)\,[g_2(\theta, s)\rho^2 + g_3(\theta, s)\rho^3 + g_4(\theta, s)\rho^4 + \ldots]. \tag{6.2}$$

При этом подстановка выражений (4.3) для φ и (6.2) для ψ в уравнение (6.1) и приравнивание членов при ρ^2, ρ^3, ρ^4 дают уравнения:

$$\dot{A}g_2 + 4Ag_2 + (B_0 g_2)' = 0; \tag{6.3}$$

$$\dot{A}g_3 + \dot{B}g_2 + 6Ag_3 + 6Bg_2 + 2(B_0 g_2)' k\cos\vartheta + (B_0 g_3)' = 0; \tag{6.4}$$

$$\dot{A}g_4 + \dot{B}g_3 + \dot{C}g_2 + 8Ag_4 + 9Bg_3 + 8Cg_2 + 2(B_0 g_3)' k\cos\theta + \\ + (B_0 g_2)'\left(3k^2\cos^2\theta + \frac{A'}{B_0}\right) + (B_0 g_4)' = 0. \tag{6.5}$$

Рассмотрим по отдельности уравнения последовательных приближений (6.3)—(6.5), взяв коэффициенты разложения поля в форме (4.12)—(4.14).

1. Второе приближение по ρ

Решение уравнения (4.3) можно записать как

$$g_2 = a(s) + b(s)\cos 2u, \tag{6.6}$$

где

$$u = \theta + \delta = \omega - \alpha + \delta. \tag{6.7}$$

Введенная в коэффициенты разложения полей фаза $\delta(s)$, выбрана таким образом, что в выражении (6.6) отсутствует член с $\sin 2u$. Тогда для $a(s)$, $b(s)$ получаем соотношения:

$$A_1 = \frac{B_0}{2}\cdot\frac{b}{a}u' = \frac{B_0}{2}\varepsilon u'; \tag{6.8}$$

$$A_2 = -\frac{B_0}{4}\cdot\frac{b'}{a} = -\frac{B_0}{4}\cdot\frac{a'}{b} = -\frac{B_0}{4}\eta'. \tag{6.9}$$

Здесь в соответствии с обозначениями предыдущего раздела положено

$$\frac{b}{a} = \varepsilon = \operatorname{th}\eta. \tag{6.10}$$

Согласно уравнению (6.9), $a(s)$ и $b(s)$ связаны равенством

$$a^2 - b^2 = c_0^2 = \text{const} \tag{6.11}$$

и поэтому могут быть представлены как

$$a = c_0\operatorname{ch}\eta; \quad b = c_0\operatorname{sh}\eta. \tag{6.12}$$

Заметим, что из определения (6.10) для величины η вытекают следующие соотношения, которые понадобятся в дальнейших расчетах:

$$\operatorname{ch}\eta = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}; \quad \operatorname{sh}\eta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}; \quad e^{\eta} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}. \tag{6.13}$$

Таким образом, в соответствии с выводами предыдущего раздела в низшем приближении разложения по отклонению от оси сечения магнитных поверхностей плоскостью $s = \text{const}$ являются эллипсами

$$\rho^2 (a + b\cos 2u) = \text{const}, \tag{6.14}$$

где параметры $\varepsilon = b/a$ и δ характеризуют эксцентриситет и ориентировку эллипса (см. рис. 17).

Параметры магнитных поверхностей ε и δ связаны с параметрами магнитного поля D_2, Δ_2 уравнениями (5.17), (5.18) и (6.8), (6.9):

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon(\delta' - \alpha') &= \frac{2D_2}{B_0}\cos 2(\Delta_2 - \delta); \\ \eta' &= -\frac{4D_2}{B_0}\sin 2(\Delta_2 - \delta). \end{aligned}\right\} \tag{6.15}$$

Эти уравнения в принципе позволяют найти ε и δ по заданным D_2, Δ_2 в случае, когда существуют магнитные поверхности эллиптического сечения *. Однако эта прямая задача в общем случае достаточно сложная. Проще решать обратную задачу: по заданным характеристикам магнитных поверхностей ε, δ подбирать необходимые характеристики поля. Решение такой обратной задачи дается формулами (6.8) и (6.9).

Если реальное поле отличается от требуемого формулами (6.8), (6.9) не сильно, то влияние возмущений поля на параметры магнитных поверхностей можно определить, решая уравнения (6.14) и (6.15) в линейном приближении по возмущениям.

Пусть $\delta = \delta_0 + \delta_1$, $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1$, $D_2 = D_{20} + D_{21}$, $\Delta_2 = \Delta_{20} + \Delta_{21}$, $B = B_{00} + B_{01}$, где индексом «1» обозначены возмущения. Предположим, что параметры магнитных поверхностей выбраны из каких-то соображений. С помощью уравнений нулевого приближения

$$\varepsilon_0(\delta_0' - \alpha') = \frac{2D_{20}}{B_{00}}\cos 2(\Delta_{20} - \delta_0); \tag{6.16}$$

$$\eta_0' = -\frac{4D_{20}}{B_{00}}\sin 2(\Delta_{20} - \delta_0) \tag{6.17}$$

по выбранным значениям ε_0 и δ_0 нетрудно определить параметры D_{20}, Δ_{20} требуемого для создания магнитных поверхностей

* В общем случае при вещественном η нет связи $\varepsilon = \operatorname{th}\eta$, и вместо η' в уравнении (6.15) следует писать $\varepsilon'/(1-\varepsilon^2)$.

магнитного поля. Уравнения для возмущений

$$\varepsilon_1(\delta_0' - \alpha') + \varepsilon_0\delta_1' + \eta_0'\delta_1 = F_1; \tag{6.18}$$

$$\eta_1' - 4\varepsilon(\delta_0 - \alpha')\delta_1 = 2F_2; \tag{6.19}$$

где

$$F_1 = 2\left(\frac{D_2}{B_0}\right)_1 \cos 2(\Delta_{20} - \delta_0) - 4\left(\frac{D_2}{B_0}\right)_0 \Delta_{21} \sin 2(\Delta_{20} - \delta_0); \tag{6.20}$$

$$F_2 = -2\left(\frac{D_2}{B_0}\right)_1 \cos 2(\Delta_{20} - \delta_0) - 4\left(\frac{D_2}{B_0}\right)_0 \Delta_{21} \cos 2(\Delta_{20} - \delta_0), \tag{6.21}$$

позволяют теперь найти поправки к параметрам магнитных поверхностей, обусловленные отклонениями истинного магнитного поля от поля, требуемого уравнениями (6.16) и (6.17).

Систему линеаризованных уравнений (6.18) и (6.19) удобно записать в виде одного уравнения для комплексной функции

$$\sigma_2 = \eta_1 - 2i\,\delta_1 \operatorname{sh}\eta_0. \tag{6.22}$$

Это уравнение имеет вид

$$\sigma_2' - 2i\sqrt{1-\varepsilon^2}u_0'\sigma_2 = F_2, \tag{6.23}$$

где

$$F_2 = 2(F_2 - i F_1 \operatorname{ch}\eta_0). \tag{6.24}$$

Уравнение (6.23) является, как мы увидим, частным случаем типичного уравнения, возникающего при расчете магнитных поверхностей методом разложения по степеням ρ:

$$\sigma_m - mi\sqrt{1-\varepsilon^2}u'\sigma_m = F_m, \tag{6.25}$$

где m — номер азимутальной гармоники магнитного поля.

В третьем приближении разложения по ρ получим такие же уравнения с $m = 1, 3$; в четвертом — с $m = 2, 4$ и т. д. При выбранном невозмущенном втором приближении уравнения типа (6.25) для высших приближений по ρ будут точными, тогда как уравнение (6.23) для возмущений второго приближения является приближенным, поскольку оно получено с помощью линеаризации. Для уточнения решения во втором приближении (по ρ) можно искать следующие поправки к решению уравнений (6.14) и (6.15) методом последовательных приближений по степеням возмущения. В Приложении I изложен более общий метод исследования уравнений квадратичного приближения, основанный на теории линейных уравнений с периодическими коэффициентами. С помощью этого метода в § 10 рассмотрено влияние резонансных возмущений на магнитные поверхности квадратичного приближения.

2. Третье приближение по ρ

Для того чтобы определить магнитные поверхности в третьем приближении по ρ, необходимо решить уравнение (6.4). Решение этого уравнения будем искать в виде

$$g_3 = a(\alpha_1 \cos u + \alpha_2 \sin u + \alpha_3 \cos 3u + \alpha_4 \sin 3u). \qquad (6.26)$$

Подставляя выражения (4.12), (4.13) для A, B и выражения (6.6), (6.26) для g_2, g_3 в уравнение (6.4) и приравнивая коэффициенты при $\cos u$, $\sin u$, $\cos 3u$ и $\sin 3u$, приходим к следующей системе четырех уравнений для $\alpha_i(s)$:

$$\frac{1}{a}(B_0 a\alpha_1)' - \frac{3B_0'}{2}\alpha_1 + B_0 u'\alpha_2 + A_1(4\alpha_2 + 6\alpha_4) + A_2(4\alpha_1 + 6\alpha_3) + \\ + 6B_1 + \varepsilon(4B_1 + 6B_3) + \frac{2k}{a}(B_0 a)' \cos\delta + \frac{k}{a}(B_0 b)' \cos\delta - \\ - 2\varepsilon k B_0 u' \sin\delta = 0; \qquad (6.27)$$

$$\frac{1}{a}(B_0 a\alpha_2)' - \frac{3B_0'}{2}\alpha_2 - B_0 u'\alpha_1 + A_2(4\alpha_1 - 6\alpha_3) - A_2(4\alpha_2 - 6\alpha_4) + \\ + 6B_2 - \varepsilon(4B_2 - 6B_4) + \frac{2k}{a}(B_0 a)' \sin\delta - \frac{k}{a}(B_0 b)' \sin\delta - \\ - 2\varepsilon k B_0 u' \cos\delta = 0; \qquad (6.28)$$

$$\frac{1}{a}(B_0 a\alpha_3)' - \frac{3B_0'}{2}\alpha_3 + 3B_0 u'\alpha_4 + 2A_2\alpha_1 - 2A_1\alpha_2 + 2\varepsilon B_1 + \\ + 6B_3 + \frac{k}{a}(B_0 b)' \cos\delta + 2\varepsilon k B_0 u' \sin\delta = 0; \qquad (6.29)$$

$$\frac{1}{a}(B_0 a\alpha_4)' - \frac{3B_0'}{2}\alpha_4 - 3B_0 u'\alpha_3 + 2A_2\alpha_2 + 2A_1\alpha_1 + 2\varepsilon B_2 + \\ + 6B_4 + \frac{k}{a}(B_0 b)' \sin\delta - 2\varepsilon k B_0 u' \cos\delta = 0. \qquad (6.30)$$

Наиболее простое решение получается при постоянных B_0, a, b, Q, P, k и δ. В этом случае решение $\alpha_i = \alpha_i^0$ определяется формулами:

$$\alpha_1^0 = \frac{k}{4}(3 - \varepsilon)\cos\delta; \qquad (6.31)$$

$$\alpha_2^0 = \frac{k}{4}(3 + \varepsilon)\sin\delta; \qquad (6.32)$$

$$\alpha_3^0 = \frac{2}{3}Q - \frac{k}{3}\varepsilon\cos\delta; \qquad (6.33)$$

$$\alpha_4^0 = \frac{2}{3}P - \frac{k}{3}\varepsilon\sin\delta. \qquad (6.34)$$

Такое решение соответствует случаю винтовой симметрии задачи

Для получения общего решения положим:

$$\alpha_1 = \alpha_1^0 + x_1/a; \tag{6.35}$$

$$\alpha_2 = \alpha_2^0 + x_2/a; \tag{6.36}$$

$$\alpha_3 = \alpha_3^0 + x_3/a; \tag{6.37}$$

$$\alpha_4 = \alpha_4^0 + x_4/a, \tag{6.38}$$

где α^0_i определяются формулами (6.31)—(6.34), но входящие в эти формулы величины k, ε, δ, Q, P уже не предполагаются постоянными. Равенствами (6.35)—(6.38) введены новые искомые функции x_i. Подставляя выражения (6.35)—(6.38) в уравнения (6.27)—(6.30), получаем систему уравнений для x_i:

$$x_1' - \left(\frac{B_0'}{2B_0} + \eta'\right) x_1 + (1 + 2\varepsilon)\, u' x_2 - \frac{3\eta'}{2} x_3 + 3\varepsilon u' x_4 = f_1; \tag{6.39}$$

$$x_2' - (1 - 2\varepsilon)\, u' x_1 - \left(\frac{B_0'}{2B_0} - \eta'\right) x_2 - 3\varepsilon u' x_3 - \frac{3\eta'}{2} x_4 = f_2; \tag{6.40}$$

$$x_3' - \frac{\eta'}{2} x_1 - \varepsilon u' x_2 - \frac{B_0'}{2B_0} x_3 + 3u' x_4 = f_3; \tag{6.41}$$

$$x_4' + \varepsilon u' x_1 - \frac{\eta'}{2} x_2 - 3u' x_3 - \frac{B_0'}{2B_0} x_4 = f_4. \tag{6.42}$$

Правые части этих уравнений в соответствии с выбором функций α_1^0, α_2^0, α_3^0, α_4^0 пропорциональны производным B_0, a, b, Q, P, k и δ по s:

$$\frac{f_1}{a} = \frac{3\varepsilon}{4}(k\cos\delta)' + \frac{k}{8}\left[\frac{B_0'}{B_0}(2 + \varepsilon) + \eta'(3 - 26\varepsilon)\right]\cos\delta + \\ + \eta' Q + \frac{2\varepsilon}{3} Q'; \tag{6.43}$$

$$\frac{f_2}{a} = -\frac{3\varepsilon}{4}(k\sin\delta)' + \frac{k}{8}\left[\frac{B_0'}{B_0}(2 - \varepsilon) - \eta'(3 + 26\varepsilon)\right]\sin\delta + \\ + \eta' P + \frac{2\varepsilon}{3} P'; \tag{6.44}$$

$$\frac{f_3}{a} = \frac{7\varepsilon}{12}(k\cos\delta)' - \frac{k}{24}\left(13\varepsilon\frac{B_0'}{B_0} + 7\eta'\right)\cos\delta + \\ + \left(\frac{B_0'}{B_0} - 2\varepsilon\eta'\right)\frac{Q}{3}; \tag{6.45}$$

$$\frac{f_4}{a} = \frac{7\varepsilon}{12}(k\sin\delta)' - \frac{k}{24}\left(13\varepsilon\frac{B_0'}{B_0} + 7\eta'\right)\sin\delta + \\ + \left(\frac{B_0'}{B_0} - 2\varepsilon\eta'\right)\frac{P}{3}. \qquad (6.46)$$

С помощью ряда замен переменных уравнения (6.43)—(6.46) можно свести к стандартному уравнению (6.25) и написать их решения в виде квадратур. Прежде всего подстановкой $x_i = B_0^{1/2} y_i$ освобождаемся от членов $B_0' x_i/2B_0$. Далее вводим переменные z_i соотношениями $z_1 = y_1 - 3y_3$, $z_2 = y_1 + y_3$, $z_3 = y_2 + 3y_4$, $z_4 = y_2 - y_4$, после чего члены, содержащие величины $\eta' z_i$, можно исключить подстановками $z_{1,3} = \zeta_{1,3} e^{\mp\eta/2}$, $z_{2,4} = \zeta_{2,4} e^{\pm 3\eta/2}$.

Полученные таким образом уравнения для ζ_i сводятся к двум уравнениям для комплексных величин $\xi_1 = \zeta_1 + i\zeta_3$ и $\xi_2 = \zeta_2 + i\zeta_4$. Если затем ввести функции $\sigma_1 = \xi_1 + 3\xi_2$ и $\sigma_3 = \xi_1^* - \xi_2^*$, то уравнения для них получим в виде

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1' - i\sqrt{1-\varepsilon^2}u'\sigma_1 &= F_1; \\ \sigma_2' - 3i\sqrt{1-\varepsilon^2}u'\sigma_3 &= F_3. \end{aligned}\right\} \qquad (6.47)$$

Таким образом, уравнения для σ_1, σ_2 сводятся к уравнению (6.25) с $m = 1$ и $m = 3$, что соответствует наличию в членах третьего приближения по ρ первой и третьей азимутальных гармоник [см. формулу (6.26)].

Правые части уравнений (6.47) равны

$$F_1 = \frac{2B_0^{-1/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\{e^{-\eta/2}[(2-\varepsilon)f_1 - 3\varepsilon f_3] + ie^{\eta/2}[(2+\varepsilon)f_2 - 3\varepsilon f_4]\}; \qquad (6.48)$$

$$F_3 = \frac{2B_0^{-1/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\{e^{-\eta/2}[\varepsilon f_1 - (2+\varepsilon)f_3] + ie^{\eta/2}[\varepsilon f_2 - (2-\varepsilon)f_4]\}. \qquad (6.49)$$

Соответственно величины σ_1 и σ_3 представляют собой следующие комбинации x_i:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{2B_0^{-1/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\{e^{-\eta/2}[(2-\varepsilon)x_1 - 3\varepsilon x_3] + \\ &\quad + ie^{\eta/2}[(2+\varepsilon)x_2 - 3\varepsilon x_4]\}; \\ \sigma_3 &= \frac{2B_0^{-1/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\{e^{-\eta/2}[\varepsilon x_1 - (2+\varepsilon)x_3] + \\ &\quad + ie^{\eta/2}[\varepsilon x_2 - (2-\varepsilon)x_4]\}, \end{aligned}\right\} \qquad (6.50)$$

а x_i выражают через σ_1 и σ_3 соотношениями:

$$x_1 = \frac{B_0^{1/2}e^{\eta/2}}{8\sqrt{1-\varepsilon^2}}\mathrm{Re}\,[(2+\varepsilon)\sigma_1 - 3\varepsilon\sigma_3];$$

$$x_3 = \frac{B_0^{1/2} e^{\eta/2}}{8\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{Re}[\varepsilon\sigma_1 - (2-\varepsilon)\sigma_3];$$

$$x_2 = \frac{B_0^{1/2} e^{-\eta/2}}{8\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{Im}[(2-\varepsilon)\sigma_1 - 3\varepsilon\sigma_2]; \qquad (6.51)$$

$$x_4 = \frac{B_0^{1/2} e^{-\eta/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{Im}[\varepsilon\sigma_1 - (2+\varepsilon)\sigma_3].$$

3. Четвертое и более высокие приближения по ρ

Зная выражение для ψ в третьем приближении по ρ, можно выяснить основные особенности конфигурации: определить примерное расположение сепаратрисы (см. § 7), определить производную $V''(\Phi)$ удельного объема и оценить глубину возможной магнитной ямы. Для расчета производной $\mu'(\Phi)$ числа вращения по продольному потоку, величина которой характеризует устойчивость конфигурации магнитного поля, требуется, как увидим в § 13, знание выражения для ψ в четвертом приближении по ρ. В некоторых случаях необходимо учитывать и члены более высокой степени по ρ. Учет $2n$-го приближения разложения по ρ становится, например, принципиальным для конфигураций, у которых угол прокручивания на магнитной оси равен нулю и имеются возмущающие поля $(2n-1)$-й гармоники, резонансные для данной конфигурации. В этом случае в окрестности магнитной оси появляется $(2n-1)$-лепестковая розетка (рис. 18) и для описания внешних замкнутых тороидальных магнитных поверхностей требуется учет в выражении для ψ члена, пропорционального ρ^{2n}.

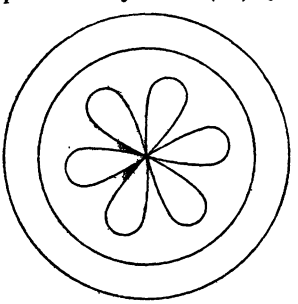


Рис. 18. Многолепестковая розетка в центре сечения тороидальной конфигурации.

Ввиду громоздкости расчетов в четвертом и более высоких приближениях мы не будем их воспроизводить здесь, а отметим лишь некоторые их особенности. Детальный расчет четвертого приближения для общего случая произведен в Приложении I, некоторые конкретные примеры рассмотрены ниже, в § 14.

Члены разложения ψ, содержащие степени ρ^{2n-1} и ρ^{2n}, имеют следующую структуру:

$$\rho^{2n-1}[\xi_1 \cos u + \xi_2 \sin u + \xi_3 \cos 3u + \xi_4 \sin 3u + \ldots$$
$$\ldots + \xi_{2n-1} \cos(2n-1)u + \xi_{2n} \sin(2n-1)u]; \qquad (6.52)$$
$$\rho^{2n}[\eta_0 + \eta_1 \cos 2u + \eta_2 \sin 2u + \ldots + \eta_{2n-1} \cos 2nu +$$
$$+ \eta_{2n} \sin 2nu].$$

Коэффициент при нечетной степени ρ содержит нечетные гармоники поля, а при четной — четные гармоники, начиная с нулевой. Уравнения для определения параметров магнитных поверхностей $\xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots$ с индексом, не равным нулю, принимают стандартный вид формулы (6.25). Уравнение для коэффициента нулевой гармоники

$$\frac{d\eta_0}{ds} = F_n(s). \tag{6.53}$$

Это уравнение имеет однозначное решение для $\eta_0(s)$ при условии, что среднее значение по длине системы правой части уравнения равно нулю:

$$\int_0^L F_n(s)\, ds = 0. \tag{6.54}$$

Из расчетов следует, что условие (6.54) выполняется автоматически в силу равенства нулю дивергенции $\mathbf{B}$ (см. Приложение I). Нарушение условия (6.54) означало бы появление неоднозначного решения, свидетельствующего о «разматывании» силовых линий магнитного поля и ухода их из объема конфигурации. Выполнимость этого условия при любом n имеет поэтому важное значение. Оно означает, что разматывание силовых линий не происходит ни в каком приближении разложения по ρ.

4. Случай винтовой симметрии

Многие свойства замкнутых магнитных конфигураций можно выяснить при рассмотрении конфигураций, имеющих винтовую симметрию. Такие конфигурации с винтовой магнитной осью обладают основными свойствами, присущими конфигурациям с магнитной осью, которая является замкнутой пространственной кривой. В то же время винтовые конфигурации более просты для рассмотрения, поскольку кривизна k и кручение $\varkappa$ магнитной оси постоянны.

Условие винтовой симметрии сводится к требованию, чтобы магнитное поле зависело только от двух переменных ρ и $\theta = \omega - \varkappa s$:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\rho, \theta). \tag{6.55}$$

Использовав винтовую симметрию задачи, можно получить дифференциальное уравнение для функции $\psi(\rho, \theta)$, определяющей винтовые магнитные поверхности $\psi = \text{const}$. При этом задача нахождения ψ существенно упрощается, что позволяет, в частности, определить высокие приближения в разложении ψ по степеням ρ.

Согласно условию винтовой симметрии, имеем

$$\frac{\partial}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial}{\partial s} = -\varkappa \frac{\partial}{\partial \theta}, \tag{6.56}$$

и уравнение $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$ позволяет ввести функцию $\psi(\rho, \theta)$, определяемую соотношениями:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\rho} = \varkappa\rho B_s - h_s B_\omega; \quad \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \rho h_s B_\rho, \tag{6.57}$$

где

$$h_s = 1 - k\rho\cos\theta = 1 - k\rho\cos(\omega - \varkappa s). \tag{6.58}$$

В случае вакуумного магнитного поля уравнение $\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = 0$ приводит к условию

$$h_s B_s + \varkappa\rho B_\omega = I = \mathrm{const} \tag{6.59}$$

и к уравнению для функции ψ

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{h_s\dfrac{\partial\psi}{\partial\rho} - \varkappa\rho I}{h_s^2 + \varkappa^2\rho^2}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{h_s}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) = 0. \tag{6.60}$$

Для определения винтового вакуумного магнитного поля в рассматриваемой системе координат можно решать уравнение (6.60) для ψ либо, как это делали раньше, уравнение Лапласа $\nabla^2\varphi = 0$ для скалярного потенциала магнитного поля $\mathbf{B} = \nabla\varphi$. При известном магнитном поле функцию $\psi(\rho, \theta)$ можно определить просто интегрированием по ρ:

$$\psi(\rho, \theta) = \int_0^\rho (\varkappa\rho B_s - h_s B_\omega)\, d\rho \tag{6.61}$$

Наоборот, при известной функции $\psi(\rho, \theta)$ скалярный потенциал φ выражается формулой

$$\varphi = B_0 s + \int_0^\rho \frac{1}{\rho h_s}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\, d\rho. \tag{6.62}$$

Интегрирование по ρ в выражениях (6.61) и (6.62) производится при фиксированном θ.

Для получения уравнения магнитных поверхностей равновесной винтовой конфигурации плазмы введем функцию $I(\psi)$ соотношениями

$$\frac{\partial I}{\partial\rho} = \frac{4\pi}{c}(\varkappa\rho j_s - h_s j_\omega); \quad \frac{\partial I}{\partial\theta} = \frac{4\pi}{c}\rho h_s j_\rho, \tag{6.63}$$

аналогичными соотношениям (6.57). При этом уравнение равновесия $c\nabla p = [\mathbf{jB}]$ приводит к следующему уравнению для поверхностной функции ψ:

$$\frac{1}{\rho h_s}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho h_s\frac{\partial\psi/\partial\rho}{h_s^2 + \varkappa^2\rho^2}\right) + \frac{1}{\rho^2 h_s}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{h_s}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) - \\ - \frac{2\varkappa I}{(h_s^2 + \varkappa^2\rho^2)^2} + \frac{II'(\psi)}{h_s^2 + \varkappa^2\rho^2} + 4\pi p'(\psi) = 0. \tag{6.64}$$

При $I = \text{const}$ и $p = \text{const}$ уравнение (6.64) переходит в уравнение (6.60). Для комбинации компонент j_s и j_ω, аналогичной (6.59), имеет место формула

$$\frac{4\pi}{c}(h_s j_s + \varkappa\rho j_\omega) = 4\pi(h_s^2 + \varkappa^2\rho^2)\,p'(\psi) + II'(\psi). \qquad (6.65)$$

Задача. Определить магнитные поверхности прямого трехзаходного винтового поля при гофрированном продольном поле $B_0(s)$.

Решение. Потенциал магнитного поля запишем в виде разложения по степеням ρ

$$\varphi = \int_0^s B_0 ds - \frac{B_0'}{4}\rho^2 + (a_1 e^{3i\omega} + a_1^* e^{-3i\omega})\rho^3 + \cdots \qquad (6.66)$$

Здесь

$$a_1 = Ae^{-3is}, \qquad (6.67)$$

$2A$ — амплитуда винтового поля, период которого принят равным единице. Поверхностную функцию ψ ищем в виде

$$\psi = B_0\alpha_0\rho^2 + B_0^{3/2}(\alpha_1 e^{3i\omega} + \alpha_1^* e^{3i\omega})\rho^3 + \cdots \qquad (6.68)$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях ρ в уравнении $\nabla\varphi\nabla\psi = 0$ приводит к уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0' &= 0; \\ \alpha_1' &= -6\alpha_0 a_1 B_0^{-3/2}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.69)$$

Зададим гофрированное поле функцией

$$B_0(s) = (1 + \nu\cos\gamma s)^{-2}. \qquad (6.70)$$

При этом, проинтегрировав уравнение для α_1, получим

$$\psi = \alpha_0 B_0\rho^2 + 4\alpha_0 A B_0^{3/2}\left\{\left(1 + \frac{3\nu^2}{2}\right)\sin 3\theta - \frac{9\nu}{2}\left(1 + \frac{\nu^2}{4}\right)\left[\frac{\sin(3\theta + \gamma s)}{\gamma - 3} - \frac{\sin(3\theta - \gamma s)}{\gamma + 3}\right] - \frac{9\nu^2}{4}\left[\frac{\sin(3\theta + 2\gamma s)}{2\gamma - 3} - \frac{\sin(3\theta - 2\gamma s)}{2\gamma + 3}\right] - \frac{\nu^3}{8}\left[\frac{\sin(3\theta + 3\gamma s)}{\gamma - 1} - \frac{\sin(3\theta - \gamma s)}{\gamma + 1}\right]\right\}\rho^3 + \cdots, \qquad (6.71)$$

где $\theta = \omega - s$. Выражение (6.71) показывает, что гофрировка продольного поля приводит к различным резонансам $\gamma = 3,\ 3/2,\ 1$, проявляющимся при различных степенях амплитуды гофрировки ν. Число таких резонансов, очевидно, зависит от вида функции $B_0(s)$.

В линейном приближении по ν проявляется лишь основной резонанс $\gamma = 3$, соответствующий совпадающим периодам винтового и гофрированного полей. Поверхностная функция ψ в линейном приближении по ν

$$\psi = \alpha_0 B_0\rho^2 + 4\alpha_0 A B_0^{3/2}\left\{\sin 3\theta - \frac{9\nu}{2}\left[\frac{\sin(3\theta + \gamma s)}{\gamma - 3} - \frac{\sin(3\theta - \gamma s)}{\gamma + 3}\right]\right\}\rho^3 + \cdots \qquad (6.72)$$

§ 7. О ФОРМЕ ТОРОИДАЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Магнитные поверхности, описываемые уравнением

$$\psi = B_0[g_2(\theta, s)\rho^2 + g_3(\theta, s)\rho^3 + g_4(\theta, s)\rho^4 + \ldots] = \text{const}, \qquad (7.1)$$

в интересующем нас случае представляют собой систему вложенных тороидальных поверхностей, расположенных вокруг магнитной оси $\rho = 0$, принятой за ось координатной системы. Во втором приближении по ρ нормальные сечения ($s = \text{const}$) магнитных поверхностей $\psi = B_0 g_2(\theta, s)\rho^2 = \text{const}$ представляют собой эллипсы $\rho^2(a + b\cos 2u) = \text{const}$ с отношением полуосей

$$\frac{l_1}{l_2} = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}, \tag{7.2}$$

где $\varepsilon = b/a$. В общем случае эти эллипсы вращаются при движении вдоль оси s, причем малая ось эллипса при $\varepsilon > 0$ составляет с главной нормалью к магнитной оси угол δ (см. рис. 17).

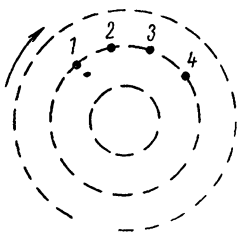


Рис. 19. Направление перемещения магнитной силовой линии в окрестности эллиптической оси.

С учетом высших степеней ρ в разложении ψ форма нормальных сечений магнитных поверхностей усложняется. При удалении от оси на расстояние $\rho \gtrsim g_2/g_3$ появляются магнитные поверхности, не окружающие ось, т. е. не представляющие собой систему вложенных торов. Силовые линии магнитного поля, лежащие на этих поверхностях, удаляются от оси $\rho = 0$. Крайняя магнитная поверхность, ограничивающая систему вложенных торов, называется сепаратрисой [19]. Положение сепаратрисы в перпендикулярном сечении $s = \text{const}$ определяются с помощью уравнений

$$\frac{\partial \psi}{\partial \rho} = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0, \tag{7.3}$$

которые дают координаты особых точек семейства нормальных сечений. Из уравнения $\mathbf{B}\nabla\psi = 0$ вытекает, что при $B_s \neq 0$ особые точки лежат на линии, принадлежащей сепаратрисе. Такие линии называются ребрами сепаратрисы.

Уравнениями (7.3) определяется также и положение магнитной оси. След магнитной оси в сечении $s = \text{const}$ является эллиптической особой точкой, тогда как след ребра сепаратрисы представляет собой гиперболическую особую точку. Можно сказать, что магнитная ось является эллиптической осью, а ребро сепаратрисы — гиперболической осью. В общем случае сепаратриса имеет несколько ребер. Внутри конфигурации также может находиться несколько эллиптических и гиперболических осей. Как эллиптическая, так и гиперболическая оси являются силовыми линиями магнитного поля. Направление движения силовых линий в окрестности особых точек показано на рис. 19 и 20 стрелками.

Представление о форме сечений магнитных поверхностей плоскостями $s = \text{const}$ вблизи магнитной оси можно получить,

ограничиваясь третьим приближением разложения ψ по ρ. При этом уравнение магнитных поверхностей имеет вид

$$\psi = B_0 a \{(1 + \varepsilon \cos 2u)\rho^2 + (\alpha_1 \cos u + \alpha_2 \sin u + \alpha_3 \cos 3u + \alpha_4 \sin 3u)\rho^3\} = \text{const}. \quad (7.4)$$

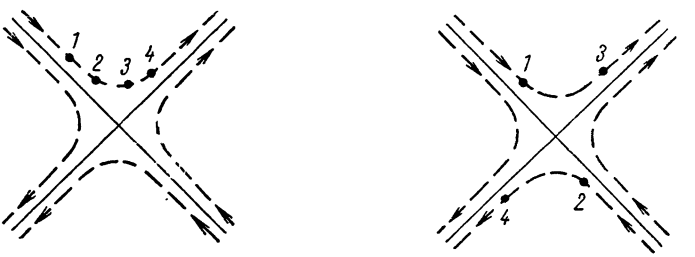
Если в сечениях $s = \text{const}$ ввести декартовы координаты, ориентированные по нормали и бинормали к магнитной оси

$$x = \rho \cos\theta; \quad y = \rho \sin\theta, \quad (7.5)$$

то, поскольку $u = \theta + \delta$, получим

$$\psi = B_0 a \{x^2 + y^2 + \varepsilon [(x^2 - y^2)\cos 2\delta - 2xy \sin 2\delta] + [\alpha_1 (x\cos\delta - y\sin\delta) - \alpha_2 (y\cos\delta + x\sin\delta)](x^2 + y^2) + \alpha_3 [(x^2 - 3xy^2)\cos 3\delta + (y^3 - 3x^2 y)\sin 3\delta] - \alpha_4 [(y^3 - 3x^2 y)\cos 3\delta - (x^3 - 3xy^2)\sin 3\delta]\}. \quad (7.6)$$

Рассмотрим два сечения магнитных поверхностей в плоскостях $s = \text{const}$, соответствующих значениям $\delta = 0$ и $\delta = \pi/2$, и



а *б*

Рис. 20. Направление перемещения магнитной силовой линии в окрестности:
а — гиперболической, *б* — гипер-гиперболической оси.

предположим для простоты, что в первом случае обращаются в нуль α_2 и α_4, а во втором α_1 и α_3. При этом магнитные поверхности в рассматриваемых сечениях симметричны относительно оси x. Соответствующие поверхностные функции:

1) $\psi = B_0 a \{[1 + \varepsilon + (\alpha_1 + \alpha_3)x]x^2 + [1 - \varepsilon + (\alpha_1 - 3\alpha_3)x]y^2\}$; (7.7)

2) $\psi = B_0 a \{[1 - \varepsilon + (\alpha_2 - \alpha_4)x]x^2 + [1 + \varepsilon + (\alpha_2 + 3\alpha_4)x]y^2\}$. (7.8)

Особые точки семейства линий $\psi = \text{const}$ определяются уравнениями $\partial\psi/\partial x = 0$ и $\partial\psi/\partial y = 0$ и имеют координаты:

в сечении $\delta(s) = 0$

$$\left.\begin{aligned} x_{1c} &= -\frac{2}{3}\frac{1+\varepsilon}{\alpha_1 + \alpha_3}, \quad y_{1c} = 0; \\ x_{2c} &= \frac{1-\varepsilon}{3\alpha_3 - \alpha_1}, \quad y_{2c}^2 = \frac{2(1-\varepsilon^2)(3\alpha_3 - \alpha_1) + 3(1-\varepsilon)^2(\alpha_1 + \alpha_3)}{(3\alpha_3 - \alpha_1)^3}; \end{aligned}\right\} \quad (7.9)$$

в сечении $\delta(s) = \pi/2$

$$\left.\begin{aligned} x_{1c} &= -\frac{2}{3}\frac{1-\varepsilon}{\alpha_2-\alpha_4}, \quad y_{1c} = 0; \\ x_{2c} &= -\frac{1+\varepsilon}{3\alpha_4+\alpha_2}, \quad y_{2c}^2 = \frac{2(1-\varepsilon^2)(3\alpha_4+\alpha_1) - 3(1+\varepsilon)^2(\alpha_2-\alpha_4)}{(3\alpha_4+\alpha_2)^3}. \end{aligned}\right\} \quad (7.10)$$

Заметим, что в обоих рассматриваемых случаях прямая $x = x_{2c}$, проходящая через две особые точки $(x_{2c}; \pm y_{2c})$, принад-

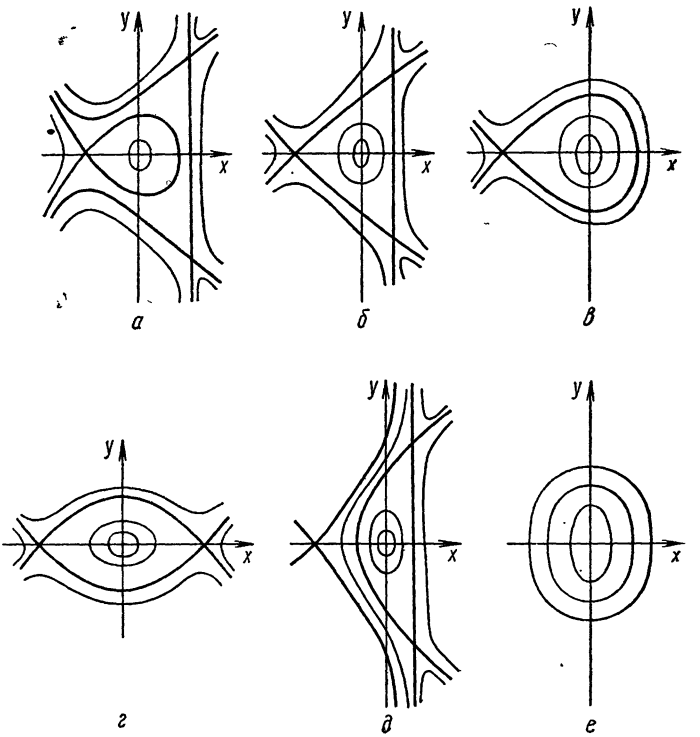


Рис. 21. Сечения магнитных поверхностей в третьем приближении по ρ.

лежит семейству линий $\psi = \text{const}$. Типичное расположение магнитных поверхностей показано на рис. 21, *а* и *д*. Различные возможные частные случаи изображены на рис. 21, *б*, *в*, *г*, *е*. Значения функции ψ на сепаратрисе для случаев *а*, *б*, *в*, *г* равны:

в сечении $\delta = 0$

$$\psi_1 = \frac{4}{27} B_0 a \frac{(1+\varepsilon)^3}{(\alpha_2+\alpha_3)^2}; \quad (7.11)$$

в сечении $\delta = \pi/2$

$$\psi_1 = \frac{4}{27} B_0 a \frac{(1-\varepsilon)^3}{(\alpha_2 - \alpha_4)^2}; \tag{7.12}$$

а для случая *д* соответственно:

$$1)\ \psi_2 = 2B_0 a (1-\varepsilon)^2 \frac{2\alpha_3 + (\alpha_3 - \alpha_1)\varepsilon}{(3\alpha_3 - \alpha_1)^3}; \tag{7.13}$$

$$2)\ \psi_2 = 2B_0 a (1+\varepsilon)^2 \frac{2\alpha_4 - (\alpha_4 + \alpha_2)\varepsilon}{(3\alpha_4 + \alpha_2)^3}. \tag{7.14}$$

Значения ψ_1 и соответственно ψ_2 в сечениях $\delta = 0$ и $\delta = \pi/2$ должны совпадать, так как величина ψ на сепаратрисе постоянна. Различие значений ψ_1 (а также ψ_2) в сечениях $s = \text{const}$ является следствием неточности метода разложения по степеням ρ и характеризует получающуюся при этом погрешность.

Если $\psi_1 < \psi_2$, то реализуется один из случаев *а*, *в*, *г*, если же $\psi_2 < \psi_1$ — случай *д*; при $\psi_1 = \psi_2$ — случай *б*.

При увеличении α_1 либо α_3 сепаратриса стягивается к магнитной оси. Рис. 21, *е* соответствует случаю $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$.

Учет членов четвертого и более высоких порядков в разложении ψ по степеням ρ приводит к усложнению формы сечений магнитных поверхностей. В частности, магнитные поверхности могут расщепляться, приводя к возникновению новых магнитных осей. Более подробно вопрос о расщеплении магнитных поверхностей рассматривается в § 10.

Приведем в заключение выражения для комбинаций x_i, определяющих форму магнитных поверхностей через σ_1 и σ_3:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 + x_3 &= \frac{1}{4} B_0^{1/2} e^{3\eta/2} \operatorname{Re}(\sigma_1 - \sigma_3);\\
x_2 - x_4 &= \frac{1}{4} B_0^{1/2} e^{-3\eta/2} \operatorname{Im}(\sigma_1 + \sigma_3);\\
x_1 - 3x_3 &= \frac{1}{4} B_0^{1/2} e^{-\eta/2} \operatorname{Re}(\sigma_1 + 3\sigma_3);\\
x_2 + 3x_4 &= \frac{1}{4} B_0^{1/2} e^{\eta/2} \operatorname{Im}(\sigma_1 - 3\sigma_3).
\end{aligned}\right\} \tag{7.15}$$

§ 8. ВОЗМУЩЕНИЕ МАГНИТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПОЛЕМ ПЕРВОЙ ГАРМОНИКИ

До сих пор мы рассматривали влияние магнитных полей, описываемых скалярным потенциалом, не содержащим линейных по ρ членов. Таким образом, предполагалось, что поперечное поле равно нулю на координатной оси. Добавление в скалярный потенциал членов, линейных по ρ, соответствующих наличию однозаходного магнитного поля, приводит к двум эффектам: смещению магнитной оси и искажению формы магнит-

ных поверхностей. В результате этого появляется возможность изменять некоторые параметры конфигурации (например, эксцентриситет эллиптических сечений магнитных поверхностей в окрестности оси) путем наложения дипольной составляющей магнитного поля.

Точное решение этой общей задачи нахождения магнитных поверхностей с неизвестной магнитной осью методом разложения по ρ оказывается невозможным, поскольку при наличии линейных по ρ членов в потенциале в каждом приближении по ρ получается система уравнений с числом неизвестных функций, превышающим число уравнений. Поэтому рассмотрим влияние линейных членов приближенно, считая их возмущениями.

1. Смещение магнитной оси под действием поперечного поля

Итак, положим

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 = \varphi_0 + A_{10}\rho\sin u + A_{20}\rho\cos u, \tag{8.1}$$

где потенциал φ_0 определяется формулой (4.3):

$$\varphi_0 = \int_0^s B_0 ds + \left(A_1 \sin 2u + A_2 \cos 2u - \frac{B_0'}{4}\right)\rho^2 + \ldots \tag{8.2}$$

Соответственно функцию магнитных поверхностей ψ ищем в виде

$$\psi = \psi_0 + \psi_1, \tag{8.3}$$

где ψ_0 — решение уравнения $\nabla\varphi_0 \nabla \psi_0 = 0$ [см. формулу (6.2)]

$$\psi_0 = B_0 (a + b\cos 2u)\rho^2. \tag{8.4}$$

Параметры второго приближения a и b связаны с A_1 и A_2 соотношениями:

$$\frac{2A_1}{B_0} = \varepsilon u'; \quad \frac{2A_2}{B_0} = -\frac{\eta'}{2}; \quad \varepsilon = \frac{b}{a}, \tag{8.5}$$

где при $|\varepsilon| < 1$ (эллиптическая ось)

$$\varepsilon = \operatorname{th}\eta; \; a = c_0 \operatorname{ch}\eta = \frac{c_0}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}; \; b = c_0 \operatorname{sh}\eta = c_0 \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \tag{8.6}$$

а при $|\varepsilon| > 1$ (гиперболическая ось)

$$\varepsilon = \operatorname{cth}\eta; \; a = c_0 \operatorname{sh}\eta = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}; \; b = c_0 \operatorname{ch}\eta = c_0 \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}. \tag{8.7}$$

Линеаризованное уравнение для определения возмущения ψ_1

$$\nabla\varphi_0 \nabla\psi_1 = -\nabla\varphi_1 \nabla\psi_0 \tag{8.8}$$

можно, как и прежде, решать, разлагая ψ_1 в ряд по степеням ρ

$$\psi_1 = \alpha + (\beta\cos u + \gamma\sin u)\rho + \ldots \tag{8.9}$$

В линейном по возмущениям приближении, как легко убедиться, $\alpha = 0$, а для β и γ получается следующая система уравнений:

$$B_0(\beta' - \gamma u') - \frac{B_0'}{2}\beta + 2(\gamma A_1 - \beta A_2) = -2B_0 A_{10}(a - b). \quad (8.10)$$

$$B_0(\gamma' + \beta u') - \frac{B_0'}{2}\gamma + 2(\gamma A_2 + \beta A_1) = -2B_0 A_{20}(a + b). \quad (8.11)$$

Положим

$$\beta = B_0^{1/2}\beta_1; \quad \gamma = B_0^{1/2}\gamma_1. \quad (8.12)$$

Тогда система уравнений (8.10) и (8.11) сведется к следующей:

$$\beta_1' + \frac{\eta'}{2}\beta_1 - (1 - \varepsilon)u'\gamma_1 = -2B_0^{-1/2}a(1 - \varepsilon)A_{10}; \quad (8.13)$$

$$\gamma_1' - \frac{\eta'}{2}\gamma_1 + (1 + \varepsilon)u'\beta_1 = -2B_0^{-1/2}a(1 + \varepsilon)A_{20}. \quad (8.14)$$

Эта система уравнений сводится к одному уравнению для комплексной функции

$$\sigma_1 = B_0^{-1/2}(e^{\eta/2}\beta - ie^{-\eta/2}\gamma). \quad (8.15)$$

Уравнение для σ_1 имеет стандартный вид уравнения для параметров магнитных поверхностей [см. формулу (6.25)] с $m = 1$:

$$\sigma_1' - i\sqrt{1 - \varepsilon^2}u'\sigma_1 = -2c_0 B_0^{-1/2}[e^{-\eta/2}A_{10} - ie^{\eta/2}A_{20}]. \quad (8.16)$$

Параметры β и γ определяются через функцию σ_1 равенствами:

$$\beta = B_0^{1/2}e^{-\eta/2}\operatorname{Re}\sigma_1; \quad \gamma = -B_0^{1/2}e^{\eta/2}\operatorname{Im}\sigma_1. \quad (8.17)$$

Возмущенное семейство поверхностей

$$\psi = B_0(a + b\cos 2u)\rho^2 + (\beta\cos u + \gamma\sin u)\rho = \text{const},$$

или, в координатах $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$,

$$\psi = B_0 a[(1 + \varepsilon\cos 2\delta)x^2 + (1 - \varepsilon\cos 2\delta)y^2 - 2\varepsilon\sin 2\delta \cdot xy] + \\ + (\beta\sin\delta + \gamma\cos\delta)x + (\beta\cos\delta - \gamma\sin\delta)y = \text{const}. \quad (8.18)$$

Положение оси определяется из соотношений $\partial\psi/\partial x = 0$, $\partial\psi/\partial y = 0$ и описывается уравнениями:

$$x = -\frac{\beta(1 + \varepsilon)\sin\delta + \gamma(1 - \varepsilon)\cos\delta}{2B_0 a(1 - \varepsilon^2)}; \quad (8.19)$$

$$y = -\frac{\beta(1 + \varepsilon)\cos\delta - \gamma(1 - \varepsilon)\sin\delta}{2B_0 a(1 - \varepsilon^2)}. \quad (8.20)$$

2. Случай однородных конфигураций

В качестве примера рассмотрим случай $B_0 = \text{const}$, $\varepsilon = \text{const}$, $\delta' = \text{const}$, $u' = \text{const}$. Пусть возмущающее поперечное поле первой гармоники имеет постоянные составляющие B_x^0, B_y^0 в на-

правлении главной нормали и бинормали к оси соответственно, т. е.

$$\varphi_1 = B_x^0 x + B_y^0 y. \tag{8.21}$$

Такому полю соответствуют следующие значения амплитуд A_{10}, A_{20}:

$$\left.\begin{aligned} A_{10} &= B_x^0 \sin\delta + B_y^0 \cos\delta, \\ A_{20} &= B_x^0 \cos\delta - B_y^0 \sin\delta, \end{aligned}\right\} \tag{8.22}$$

Из уравнений (8.17) получаем:

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \beta_1 \cos\delta + \beta_2 \sin\delta; \\ \gamma &= \gamma_1 \sin\delta + \gamma_2 \cos\delta, \end{aligned}\right\} \tag{8.23}$$

причем

$$\beta_1 = -2aB_x^0 \frac{(1-\varepsilon)\delta' + u'(1-\varepsilon^2)}{u'^2(1-\varepsilon^2) - \delta'^2}; \tag{8.24}$$

$$\gamma_1 = 2aB_x^0 \frac{(1+\varepsilon)\delta' + u'(1-\varepsilon^2)}{u'^2(1-\varepsilon^2) - \delta'^2}; \tag{8.25}$$

$$\beta_2 = 2aB_y^0 \frac{(1-\varepsilon)\delta' + u'(1-\varepsilon^2)}{u'^2(1-\varepsilon^2) - \delta'^2}; \tag{8.26}$$

$$\gamma_2 = 2aB_y^0 \frac{(1+\varepsilon)\delta' + u'(1-\varepsilon^2)}{u'^2(1-\varepsilon^2) - \delta'^2}. \tag{8.27}$$

Подставляя эти значения в формулы (8.19) и (8.20), получаем координаты смещенной магнитной оси:

$$x_0 = -\frac{1}{B_0} \cdot \frac{B_y^0(\delta' + u' - \varepsilon u' \cos 2\delta) + B_x^0 \varepsilon u' \sin 2\delta}{(1-\varepsilon^2)u'^2 - \delta'^2}; \tag{8.28}$$

$$y_0 = -\frac{1}{B_0} \frac{B_y^0 \varepsilon u' \sin 2\delta - B_x^0(\delta' + u' - \varepsilon u' \cos 2\delta)}{(1-\varepsilon^2)u'^2 - \delta'^2}. \tag{8.29}$$

Наиболее наглядный вид эти формулы приобретают для магнитных поверхностей, имеющих в окрестности магнитной оси круглые сечения. В этом случае $\varepsilon = 0$ и формулы (8.28) и (8.29) дают

$$x_0 = \frac{B_y^0}{B_0} \cdot \frac{1}{\alpha'}; \quad y_0 = -\frac{B_x^0}{B_0} \cdot \frac{1}{\alpha'}. \tag{8.30}$$

Таким образом, при однородном поперечном поле смещение оказывается перпендикулярным этому полю и обратно пропорционально кручению магнитной оси $\alpha' = \varkappa$.

Знаменатели выражений (8.28) и (8.29) для смещения оси пропорциональны углу прокручивания силовых линий в окрестности магнитной оси (см. § 5) $\iota = (\sqrt{1-\varepsilon^2}u' - \delta')L$, так что

$$x_0, y_0 \sim \frac{B_\perp L}{B_0 \iota}. \tag{8.31}$$

При обращении угла прокручивания в нуль полученные формулы для смещений неприменимы. В этом случае величина смещения определяется не углом прокручивания, а его производной по ρ^2.

3. Изменение формы сечений магнитных поверхностей под действием поперечного поля

Наряду с появлением в функции магнитных поверхностей ψ первой гармоники (означающей смещение магнитной оси) при наличии поперечного поля изменяются и более высокие гармоники — вторая, третья и т. д. Действительно, перемножение членов $\nabla\varphi_1\nabla\psi_0$ в правой части уравнения (8.8) для ψ_1 приводит к появлению комбинационных гармоник. Поскольку $\nabla\varphi_1$ содержит только первую гармонику, а $\nabla\psi_0$ — первую гармонику, пропорциональную кривизне $k(s)$, а также вторую, третью и т. д. гармоники с независимыми амплитудами, то произведение $\nabla\varphi_1\cdot\nabla\psi_0$, а следовательно, и функция ψ_1, пропорциональная амплитуде поперечного поля, будут содержать первую гармонику; вторую гармонику, пропорциональную кривизне; третью гармонику и т. п. В приведенных рассуждениях речь идет о гармониках функции магнитных поверхностей в системе координат, где магнитная ось не совпадает с координатной осью. При переходе в систему координат, связанную с магнитной осью, вторая, третья и т. д. гармоники претерпят дополнительное изменение. Например, вторая гармоника изменится при этом из-за наличия третьей гармоники, а третья — из-за наличия второй. Таким образом, налагая поперечное поле на конфигурацию, содержащую третью гармонику и не содержащую второй гармоники ($\varepsilon = 0$), можно получить конфигурацию с вытянутыми поперечными сечениями ($\varepsilon \neq 0$). Аналогично наложение поперечного поля на конфигурацию, содержащую вторую гармонику, приводит к возникновению третьей гармоники.

1. Рассмотрим появление второй гармоники в однородной конфигурации, описываемой в пренебрежении кривизной скалярным потенциалом

$$\varphi = B_0 s + B_0 u' \frac{Q}{3}\rho^3 \sin 3u + B_y \rho \sin\theta. \tag{8.32}$$

Уравнение магнитных поверхностей в пренебрежении кривизной, согласно формуле (8.9), имеет вид (см. § 6)

$$\psi = B_0 c_0 \left\{\left[(x^2+y^2) - \frac{2B_y}{\alpha' B_0}x\right] + \frac{2}{3}Q\left[(x^3 - 3xy^2)\cos 3\delta + \right.\right.$$
$$\left.\left. + (y^3 - 3yx^2)\sin 3\delta\right]\right\}. \tag{8.33}$$

Линейный член $B_y\rho\sin\theta$ в скалярном потенциале описывает однородное поперечное поле, направленное по бинормали к маг-

нитной оси. При этом, как видно из выражения (8.33), новая магнитная ось смещена по нормали к старой оси на расстояние $x_0 = B_y/\alpha' B_0$. Делая преобразования поперечных координат

$$x \to x_0 + x;\ y \to y,$$

получаем в новых переменных

$$\psi = B_0 c_0 \left\{[1 + \varepsilon \cos(2\theta + 3\delta)]\,\rho^2 + \frac{2}{3} Q\rho^3 \cos 3(\theta + \delta)\right\}, \quad (8.34)$$

где

$$\varepsilon = 2Qx_0 = \frac{2QB_y}{\alpha' B_0}. \quad (8.35)$$

2. Для выяснения влияния кривизны на величину эксцентриситета, обусловленного взаимодействием первой и третьей гармоник магнитного поля, рассмотрим случай винтовой симметрии, когда все гармоники поля вращаются вместе с нормалью к невозмущенной магнитной оси, являющейся винтовой линией с кривизной k и кручением $\varkappa = \alpha'$. В этом случае скалярный потенциал магнитного поля запишем как

$$\varphi = B_0 s - B_0 \alpha' \frac{Q}{3} \rho^3 \sin 3\theta + B_y \rho \sin\theta. \quad (8.36)$$

Согласно формуле (6.61), функция магнитных поверхностей ψ выражается интегралом

$$\psi = \int_0^\rho \left[\frac{\alpha'\rho}{1 - k\rho\cos\theta}(B_0 + B_0\alpha'^2 Q\rho^3 \cos 3\theta - \alpha' B_y \rho\cos\theta) + \right.$$

$$\left. + (1 - k\rho\cos\theta)(B_0\alpha' Q\rho^2 \cos 3\theta - B_y \cos\theta)\right] d\rho. \quad (8.37)$$

Разлагая подынтегральное выражение в ряд по степеням ρ и производя интегрирование, получаем

$$\psi = -B_y\rho\cos\theta + \left(\frac{\alpha'}{2} B_0 + \frac{k}{4} B_y \cos 2\theta\right)\rho^2 +$$

$$+ \left[\frac{\alpha'}{3}(kB_0 - \alpha' B_y)\cos\theta + \frac{\alpha' Q}{3}\cos 3\theta\right]\rho^3 + \ldots \quad (8.38)$$

Сделаем преобразование координат в поперечной плоскости

$$\rho\sin\theta \to \rho\sin\theta;\ \rho\cos\theta \to x_0 + \rho\cos\theta,$$

где $x_0 = B_y/\alpha' B_0$, тогда получим в линейном по x_0 приближении

$$\psi = \left(\frac{\alpha' B_0}{2} + \frac{11}{2} kB_y\right)(1 + \varepsilon\cos 2\theta)\,\rho^2 + \frac{\alpha' Q}{3}\rho^3\cos 3\theta. \quad (8.39)$$

Входящий сюда параметр эллиптичности ε оказывается равным

$$\varepsilon = \frac{2QB_y}{\alpha' B_0}\left(1 + \frac{7}{12}\cdot\frac{k}{Q}\right). \quad (8.40)$$

Поправка, связанная с кривизной, при $k/Q \ll 1$ оказывается малой.

3. Интересно оценить влияние возмущений на положение ребер сепаратрисы. С этой целью рассмотрим конфигурацию с прямой магнитной осью, обладающую винтовой симметрией. Зададим поле скалярным потенциалом

$$\varphi = B_0 s + B_y \rho \sin u + \frac{\varepsilon}{2} B_0 u' \rho^2 \sin 2u + B_0 u' \frac{Q}{3} \rho^3 \sin 3u. \quad (8.41)$$

С помощью формулы

$$\psi = \int_0^\rho (u' \rho B_s + B_\omega)\, d\rho, \quad (8.42)$$

эквивалентной формуле (6.61), находим выражение для поверхностной функции в координатах $x = \rho \cos u$, $y = \rho \sin u$:

$$\psi = \frac{1}{2} B_0 u' [(1+\varepsilon)x^2 + (1-\varepsilon) y^2] + B_y x +$$

$$+ (B_0 Q + u' B_y) \frac{u'}{3} x^3 - \left(B_0 Q - \frac{u' B_y}{3}\right) u' x y^2. \quad (8.43)$$

Особые точки семейства $\psi = \text{const}$ определяются следующими выражениями:

$$x_0 = -\frac{1}{u'(1+\varepsilon)} \cdot \frac{B_y}{B_0}, \quad y_0 = 0; \quad (8.44)$$

$$x_{1c} = \frac{1-\varepsilon}{2Q} + \frac{u'(1-\varepsilon)}{6Q^2} \cdot \frac{B_y}{B_0}, \quad y_{1c}^2 = \frac{2(1-\varepsilon^2) + (1-\varepsilon)^2}{4Q^2}; \quad (8.45)$$

$$x_{2c} = -\frac{1+\varepsilon}{Q} + \left[\frac{1}{u'(1+\varepsilon)} + \frac{u'(1+\varepsilon)}{Q^2}\right] \frac{B_y}{B_0}, \quad y_{2c} = 0. \quad (8.46)$$

Здесь x_0, y_0 — координаты новой магнитной оси; x_{1c}, y_{1c} — координаты ребер сепаратрисы в случае $\varepsilon < 0$; x_{2c}, y_{2c} — координаты ребра сепаратрисы при $\varepsilon > 0$. Первому случаю, $\varepsilon < 0$, соответствует сепаратриса, изображенная на рис. 21, *д*, а второму — на рис. 21, *а*. При $\varepsilon < 0$, когда имеется два ребра сепаратрисы, величина их смещения оказывается пренебрежимо малой по сравнению с величиной смещения магнитной оси при условии $6Q^2 \gg (1-\varepsilon^2) u'^2$. При $\varepsilon > 0$, когда сепаратриса имеет единственное ребро, смещение ребра оказывается порядка смещения магнитной оси. В обоих случаях направления смещения магнитной оси и ребер сепаратрисы взаимно противоположны. Величина смещения ребра сепаратрисы тем меньше, чем ближе оно расположено к проводникам, создающим поперечное поле (см. Приложение I).

§ 9. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ МАГНИТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Как уже было показано, задача нахождения параметров магнитных поверхностей сводится к решению уравнения (6.25) для гармоник магнитных поверхностей:

$$\sigma_m' - im\sqrt{1-\varepsilon^2}u'\sigma_m = F_m. \tag{9.1}$$

Амплитуды гармоник магнитных поверхностей α_i выражаются через линейные комбинации величин σ_m. Если магнитная ось — замкнутая линия длиной L, то искомые магнитные поверхности, согласно их определению, также должны быть замкнутыми на себя. Следовательно, параметры $\alpha_i(s)$, а также $\sigma_m(s)$ обязаны быть функциями s с периодом L. Таким образом, нам нужно найти решения уравнения (9.1) с периодическими коэффициентами.

Чтобы решить уравнение (9.1), запишем его в несколько иной форме

$$[\sigma_m e^{-imv(s)}]' = F_m e^{-imv(s)}, \tag{9.2}$$

где

$$v(s) = \int_0^s u'\sqrt{1-\varepsilon^2}ds. \tag{9.3}$$

Функция $v(s)$ удовлетворяет условию

$$v(s+L) = v(s) + v(L). \tag{9.4}$$

Общее решение уравнения (9.2):

$$\sigma_m(s) = e^{imv(s)} \int_{s_0}^{s} F_m(s')\, e^{-imv(s')}\, ds'. \tag{9.5}$$

Если учесть равенство (9.4), то требование периодичности $\sigma_m(s+L) = \sigma_m(s)$ приводит к уравнению

$$e^{imv(L)}[\sigma_m(s) + e^{imv(s)} \int_s^{s+L} e^{imv(s')} F(s')\, ds'] = \sigma_m(s). \tag{9.6}$$

Отсюда находим периодическое решение уравнения (9.1) в виде следующего интеграла [6]:

$$\sigma_m = \frac{e^{imv(s)}}{e^{-imv(L)} - 1} \int_s^{s+L} e^{-imv(s')} F_m(s')\, ds'. \tag{9.7}$$

Для численных расчетов удобно разделить действительную и мнимую части этого выражения:

$$\operatorname{Re}\sigma_m = \frac{1}{2\sin\dfrac{mv(L)}{2}} \int_s^{s+L} [\operatorname{Re} F_m(s')\sin mV - \operatorname{Im} F_m(s')\cos mV]\, ds'; \tag{9.8}$$

$$\operatorname{Im}\sigma_m = \frac{1}{2\sin\dfrac{mv(L)}{2}} \int_s^{} [\operatorname{Re}F_m(s')\cos mV + \operatorname{Im}F_m(s')\sin mV]\,ds', \quad (9.9)$$

где

$$V \equiv v(s') - v(s) - \frac{v(L)}{2}. \quad (9.10)$$

Решение уравнения (9.1) можно записать также в виде ряда Фурье. Действительно, выделим в показателе экспоненты $e^{-imv(s)}$ уравнения (9.2) линейную по s часть:

$$v(s) = \frac{v(L)}{L}s + w(s), \quad (9.11)$$

где функция $w(s)$, очевидно, периодическая.

Разложим периодические функции $F_m(s)\,e^{-im\,w(s)}$ и $\sigma_m(s)\,e^{-imw(s)}$ в ряды Фурье:

$$F_m e^{-imw(s)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} F_{ml} e^{i\frac{2\pi}{L}ls}; \quad (9.12)$$

$$\sigma_m e^{-imw(s)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sigma_{ml} e^{i\frac{2\pi}{L}ls}, \quad (9.13)$$

где

$$F_{ml} = \frac{1}{L}\int_0^L F_m e^{-i\left(mw+\frac{2\pi}{L}ls\right)}\,ds. \quad (9.14)$$

Подставляя эти разложения в уравнение (9.2), получаем

$$\sigma_{ml} = iL\frac{F_{ml}}{mv(L) - 2\pi l}. \quad (9.15)$$

Таким образом, решение уравнения (9.1) может быть записано в виде

$$\sigma_m(s) = iL\sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{F_{ml}}{mv(L) - 2\pi l} e^{i\left[\frac{2\pi}{L}ls + mw(s)\right]}. \quad (9.16)$$

Обращение в нуль знаменателей указывает на неустойчивость магнитной конфигурации относительно соответствующей моды возмущений поля. Условие резонанса следующее:

$$mv(L) - 2\pi l = m\int_0^L \sqrt{1-\varepsilon^2}u'\,ds - 2\pi l = 0. \quad (9.17)$$

Как будет показано ниже, это условие резонанса выполняется, когда силовые линии в окрестности магнитной оси замкнуты,

т. е. когда они замыкаются на себя после одного или нескольких обходов вдоль s.

Влияние резонансных возмущений на форму магнитных поверхностей рассмотрено ниже, в § 10.

§ 10. ВОЗМУЩЕНИЕ ТОРОИДАЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В § 4 и 7 изложен метод нахождения магнитных поверхностей путем разложения решения по степеням ρ. Такой метод можно считать вполне оправданным, поскольку практический интерес представляют тороидальные конфигурации, поперечный масштаб которых мал по сравнению с продольным. При решении получающихся уравнений для гармоник магнитных поверхностей может возникнуть, однако, трудность с резонансными знаменателями (см. § 9). Обращение знаменателей в нуль указывает на неприменимость метода разложения по степеням ρ в том виде, как это изложено в § 4, но отнюдь не является еще свидетельством отсутствия тороидальных поверхностей. Действительно, возможна ситуация, когда в рассматриваемой конфигурации появляется несколько новых магнитных осей, окруженных общей системой тороидальных поверхностей (см. рис. 15).

Появление малых знаменателей связано с тем, что низшее приближение разложения ψ по ρ выбрано квадратичным, в то время как в общем случае это разложение может начинаться и с членов более высокого порядка. Перенормировкой низшего приближения можно избежать появления резонансных знаменателей. В частности, если оставаться в рамках метода разложения по степеням ρ, то перенормировку ψ можно осуществить умножением на резонансный знаменатель $D_{ml} = mv(L) - 2\pi l$. Новая функция $\tilde{\psi} = \psi D_{ml}$ начнется с члена, пропорционального ρ^m, и не будет уже содержать знаменателя D_{ml}.

1. Метод возмущений для нахождения магнитных поверхностей

Малые знаменатели возникают также и в общем методе возмущений при решении линеаризованного по возмущениям уравнения, определяющего магнитные поверхности

$$\mathbf{B}\nabla\psi = 0. \tag{10.1}$$

Очень часто уравнение магнитных поверхностей можно считать в нулевом приближении известным. Например, за нулевое приближение можно принять решение, полученное выше методом разложения по степеням отклонения от магнитной оси. Поэтому для нахождения уточненных магнитных поверхностей естественно воспользоваться методом возмущений. Пусть магнитное поле $\mathbf{B}$

представимо в виде разложения по некоторому малому параметру:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \ldots, \tag{10.2}$$

где индекс указывает номер приближения указанного разложения.

Полагая

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \ldots, \tag{10.3}$$

где ψ_1, ψ_2,... — поправки первого, второго и т. д. приближений, получаем следующую систему уравнений последовательных приближений:

$$\mathbf{B}_0 \nabla \psi_0 = 0; \tag{10.4}$$

$$\mathbf{B}_0 \nabla \psi_1 = -\mathbf{B}_1 \nabla \psi_0; \tag{10.5}$$

$$\mathbf{B}_0 \nabla \psi_2 = -\mathbf{B}_1 \nabla \psi_1 - \mathbf{B}_2 \nabla \psi_0 \tag{10.6}$$

и т. д.

Решение уравнения (10.4) считаем известным. Остальные уравнения имеют одинаковую структуру:

$$\mathbf{B}_0 \nabla \psi_1 = \mathrm{s}, \tag{10.7}$$

где ψ_1 — искомая функция, а s — известная правая часть. Уравнение (10.7) представляет собой магнитное дифференциальное уравнение, рассмотренное в § 2.

Для выяснения специфики решения уравнения (10.7) рассмотрим сначала случай, когда магнитное поле нулевого приближения имеет цилиндрическую симметрию:

$$\mathbf{B} = \{0, B_\theta(\rho), B_s(\rho)\}. \tag{10.8}$$

При этом ψ_0 является произвольной функцией ρ:

$$\psi_0 = \psi_0(\rho). \tag{10.9}$$

Возмущающее поле $B_1(\rho, \theta, s)$ будем считать периодическим по θ и по $\zeta = 2\pi s/L$ с одинаковым периодом 2π по обеим переменным.

Уравнение первого приближения (10.5):

$$\left(\frac{B_\theta}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{2\pi B_s}{L} \cdot \frac{\partial}{\partial s}\right) \psi_1 = -B_{1\rho}(\rho, \theta, s) \frac{d\psi_0}{d\rho} = \mathrm{s}(\rho, \theta, \zeta). \tag{10.10}$$

Его решение получаем разложением ψ_1 и s в ряды Фурье по θ и ζ:

$$\mathrm{s} = \mathrm{Re} \sum_{m,n} \mathrm{s}_{mn}(\rho)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m\theta - n\zeta)} = -\frac{d\psi_0}{d\rho} \mathrm{Re} \sum_{m,n} b_{mn}(\rho)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m\theta - n\zeta)}; \tag{10.11}$$

$$\psi_1 = \mathrm{Re} \sum_{m,n} \psi_{mn}(\rho)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m\theta - n\zeta)}, \tag{10.12}$$

причем

$$\psi_{mn}(\rho) = i\frac{L}{2\pi B_s}\frac{s_{mn}(\rho)}{m\mu(\rho) - n}. \qquad (10.13)$$

Здесь $\mu(\rho)$ обозначает отношение поперечного потока, проходящего между поверхностями $\rho = \text{const}$ и $\rho + d\rho = \text{const}$ к продольному потоку:

$$\mu(\rho) = \frac{LB_\theta}{2\pi\rho B_s}. \qquad (10.14)$$

Как показывает формула (10.13), в решении появляются резонансные знаменатели $m\mu(\rho) - n$, поэтому решение имеет смысл только в том случае, если одновременно с обращением в нуль знаменателя обращается в нуль и числитель. Так, из условия ограниченности решения с $m = n = 0$ следует, что должна отсутствовать нулевая гармоника разложения в ряд Фурье правой части уравнения (10.7)

$$s_{00}(\rho) = 0. \qquad (10.15)$$

Разложение (10.12) не содержит, таким образом, нулевой гармоники ($m = n = 0$). Из условия ограниченности решения на рациональных поверхностях $\rho = \rho_{mn}$, удовлетворяющих условию

$$m\mu(\rho_{mn}) - n = 0, \qquad (10.16)$$

следует требование обращения в нуль при $\rho = \rho_{mn}$ соответствующей гармоники разложения правой части

$$s_{mn}(\rho_{mn}) = 0. \qquad (10.17)$$

В инвариантном виде условия (10.15) и (10.17) формулируются как требования (см. § 2)

$$\int s d\tau = 0; \qquad (10.18)$$

$$\oint \frac{s\,dl}{B} = 0. \qquad (10.19)$$

В первом условии, введенном Крускалом и Кульсрудом [3], интегрирование производится по объему между двумя бесконечно близкими поверхностями, поэтому условие (10.18) означает, что среднее значение s на магнитной поверхности должно равняться нулю в соответствии со смыслом обращения в нуль нулевой фурье-гармоники [см. формулу (10.15)]. Нарушение этого условия в рассматриваемом примере означало бы наличие радиального магнитного поля B_ρ, которое, естественно, привело бы к «разматыванию» тороидальных поверхностей. В случае уравнения (10.5) условие (10.18), как нетрудно убедиться, удовлетворяется автоматически в силу равенства $\operatorname{div} \mathbf{B}_1 = 0$ и конечности поля при $\rho = 0$.

Во втором условии (10.19) интегрирование производится вдоль замкнутых силовых линий. Это условие, сформулированное Ньюкомбом [8] как необходимое и достаточное условие разрешимости магнитного дифференциального уравнения, должно

выполняться на каждой рациональной магнитной поверхности. Смысл его, как видим, заключается в требовании отсутствия в разложении правой части резонансных гармоник (т. е. гармоник магнитного поля, постоянных вдоль замкнутых силовых линий). Это требование может быть выполнено в двух случаях: 1) при полном отсутствии в возмущающем поле резонансных гармоник $b_{mn} = 0$; 2) при обращении в нуль на резонансных поверхностях производной $d\psi_0/d\rho = 0$. Если средний угол прокручивания силовых линий $2\pi\mu(\rho)$ постоянен во всем рассматриваемом объеме ($\mu'(\rho) = 0$), то условие Ньюкомба требует, очевидно, просто полного отсутствия резонансных возмущений ($n/m = \mu$), т. е. винтовых возмущений с шагом, равным шагу винтовых силовых линий. Если же угол прокручивания изменяется достаточно быстро, то влияние резонансных возмущений, очевидно, должно быть локализовано вблизи соответствующих магнитных поверхностей. Действительно, как показано на примерах решения задач, допускающих точное решение, при наличии шира ($\mu' \neq 0$) резонансные возмущения приводят к появлению волокнистой структуры магнитных поверхностей [19], т. е. к возникновению новых эллиптических и гиперболических магнитных осей. Влияние резонансных возмущений можно весьма эффективно исследовать и в общем случае методом возмущений, видоизменив его таким образом, чтобы избежать появления резонансных знаменателей.

Возможность удовлетворения условий разрешимости при наличии резонансных возмущений связана с тем, что, во-первых, реальные возмущения имеют практически **конечное** число резонансных гармоник с заметной амплитудой, и что, во-вторых, исходная функция нулевого приближения ψ_0 допускает большой произвол в ее выборе. Наиболее простой способ идентификации функции ψ_0 заключается в отождествлении ее с какой-либо физической функцией, являющейся, как и ψ_0, поверхностной величиной, например с объемом V или продольным потоком Φ. Эти функции монотонно растут от магнитной оси. Однако в качестве ψ_0 можно взять также и произвольную функцию от Φ, а именно $\psi_0 = \psi_0(\Phi)$, причем ее можно выбрать таким образом, чтобы на резонансных поверхностях Φ_1, Φ_2,... производная $\psi_0'(\Phi)$ обращалась в нуль (рис. 22). В этом случае условие разрешимости магнитного дифференциального уравнения (10.5) будет выполнено. Одно из простейших аналитических выражений для $\psi_0(\Phi)$, удовлетворяющих поставленному условию, можно записать в виде интеграла по Φ от произведения резонансных знаменателей [23]

$$\psi_0(\Phi) = \int \prod_{m,n} [m\mu(\Phi) - n]\, d\Phi. \qquad (10.20)$$

В этом случае

$$\nabla\psi_0 = \prod_{m,n} (m\mu - n)\, \nabla\Phi, \qquad (10.21)$$

так что «резонансная» поправка (10.13) будет равна

$$\psi_{kl}(\rho) = \mathrm{i}\,\frac{L}{2\pi B_s}\,b_{kl}(\rho)\,\frac{d\Phi}{d\rho}\prod_{m,n}{}'\,(m\mu - n)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\theta - l\zeta)}, \qquad (10.22)$$

где штрих у знака произведения означает, что в произведении отсутствует множитель с $m = k$, $n = l$. Полное решение в рассматриваемом приближении запишется в виде

$$\psi = \int \prod_{m,n}(m\mu - n)\,d\Phi + \mathrm{Re}\sum_{k,l}\mathrm{i}\,\frac{L}{2\pi B_s}\,b_{kl}(\rho)\times$$
$$\times\frac{d\Phi}{d\rho}\prod_{m,n}{}'\,(m\mu - n)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\theta - l\zeta)}. \qquad (10.23)$$

Это решение уже не имеет резонансных знаменателей. Тороидальные поверхности сохраняются, если первое слагаемое, соответствующее невозмущенной функции ψ_0, не обращается тождественно в нуль ($m\mu \not\equiv n$). Резонансные поверхности ($m\mu = n$) при этом расщепляются под влиянием возмущения. Такая ситуация напоминает теорию возмущений при наличии вырождения. В обоих случаях требование разрешимости уравнения с возмущением требует перенормировки (правильного выбора) исходной функции нулевого приближения. Возмущения приводят к снятию вырождения (расщеплению состояний).

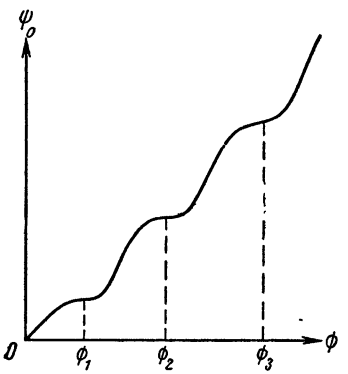


Рис. 22. Перенормированная поверхностная функция ψ_0, имеющая на резонансных поверхностях $\Phi = \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \ldots$, равные нулю первую и вторую производные по продольному потоку.

Заметим, что, хотя в этом разделе мы для наглядности основываемся на специальной, цилиндрической, геометрии исходного состояния, правило перенормировки функции $\psi_0(\Phi)$ применимо к любым конфигурациям. Более того, характер решения (10.23) также сохраняется для произвольной геометрии. Действительно, как показано в § 2, тороидальные магнитные поверхности произвольной конфигурации могут быть отображены на квадрат с координатами θ, ξ, имеющими период 2π, причем силовые линии магнитного поля в этих координатах представляются прямыми линиями (см. рис. 3). Контравариантные компоненты поля в натуральной системе координат (см. § 2)

$$B^i = \frac{2\pi}{V'(\Phi)}\{0, \mu, 1\}. \qquad (10.24)$$

Пусть $b^1(\Phi, \theta, \zeta) = \mathbf{B}\nabla\Phi$ — радиальная (нормальная к магнитным поверхностям) контравариантная компонента возмущающего поля. Тогда уравнение (10.5) в этих координатах

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\psi_1 = -\frac{V'(\Phi)}{2\pi}b^1(\Phi, \theta, \zeta)\frac{d\psi_0}{d\Phi}. \qquad (10.25)$$

Решая это уравнение методом Фурье с использованием правила перенормировки (10.20), получаем

$$\psi = \int\prod_{m,n}(m\mu - n)\,d\Phi + \mathrm{Re}\sum_{k,l}\mathrm{i}\frac{(\mathbf{B}\nabla V)_{kl}}{2\pi}\prod_{m,n}{}'(m\mu - n)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\theta - l\zeta)}. \qquad (10.26)$$

Из сравнения с формулой (10.23) видно, что решение в произвольной геометрии имеет тот же вид, что и в цилиндрической. Хотя новые координаты θ, ζ не столь наглядны, как цилиндрические координаты θ, $\zeta = \frac{2\pi s}{L}$, картина, которая получится при воздействии возмущений с заданным отношением числа периодов m/n по большому и малому обходу тора, будет иметь тот же вид, что и в случае цилиндрической конфигурации, в которой зависимость $\mu(\rho)$ [см. формулу (10.14)] определяется продольным током. Поэтому на примере цилиндрической геометрии можно выяснить, к чему приводят «опасные» резонансные возмущения в тороидальных конфигурациях с дополнительными полями, накладываемыми, например, с целью создания магнитной ямы.

2. Влияние отдельной гармоники возмущающего поля

Рассмотрим в качестве простейшего примера влияние магнитного поля, описываемого скалярным потенциалом

$$\varphi_m = \frac{B_m a}{m}\left(\frac{r}{a}\right)^m\left[1 + \frac{\pi^2 n^2 r^2}{(m+1)L^2}\right]\sin\left(m\theta - \frac{2\pi}{L}nz\right), \qquad (10.27)$$

на цилиндрическую конфигурацию, магнитное поле которой

$$\mathbf{B} = \{0, B_\theta(r), B_z(r)\}.$$

В этом случае решение для ψ в первом приближении

$$\psi = \int[m\mu(r^2) - n]\,rdr -$$

$$-\frac{aL}{2\pi}\frac{B_m}{B_z}\left(\frac{r}{a}\right)^m\left[1 + \frac{(m+2)}{m(m+1)}\cdot\frac{\pi^2 n^2 r^2}{L^2}\right]\cos\left(m\theta - \frac{2\pi}{L}nz\right), \qquad (10.28)$$

где

$$\mu(r^2) = \frac{B_\varphi L}{2\pi r B_z}.$$

Представим $\mu(r^2)$ в виде разложения по степеням r^2:

$$\mu = \mu_0 + \mu_0' r^2 + \mu_0''\frac{r^4}{2} + \ldots \qquad (10.29)$$

При этом

$$\psi = [m\mu(0) - n]\frac{r^2}{2} + m\mu_0'\frac{r^4}{4} + m\mu_0''\frac{r^6}{12} -$$

$$- \frac{aL}{2\pi}\frac{B_m}{B_z}\left(\frac{r}{a}\right)^m\left[1 + \frac{m+2}{m(m+1)}\cdot\frac{\pi^2n^2r^2}{L^2}\right]\cos\left(m\theta - \frac{2\pi}{L}nz\right). \quad (10.30)$$

Форма магнитных поверхностей в сечении $z = \text{const}$, описываемая уравнением $\psi = \text{const}$, показана при изменении разности $m\mu(0) - n$ от нуля до некоторого значения на рис. 23 (2, 3 и 4-я колонки). Как видно из рисунка, при наличии одного резонансного возмущения в конфигурации имеется в общем случае $m + 1$ магнитных осей.

Возмущения можно считать не опасными, если они не выводят силовые линии за пределы некоторой ограничивающей поверхности, радиус которой обозначим a. Введем приращение угла прокручивания $2\pi\Delta\mu$ на расстоянии a

$$\Delta\mu = \mu' a^2. \quad (10.31)$$

Тогда для относительного смещения магнитной оси ξ/a при $m = 1$ получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{\xi}{a} &= \frac{L}{2\pi a(\mu_0 - n)}\cdot\frac{B_1}{B_0}\ (\mu_0 - n \neq 0); \\ \frac{\xi}{a} &= \left(\frac{L}{2\pi a\Delta\mu}\cdot\frac{B_1}{B_0}\right)^{1/3}\ (\mu_0 - n = 0). \end{aligned}\right\} \quad (10.32)$$

При $m = 2$ в отсутствие шира ($\mu' = 0$) поверхностная функция в окрестности магнитной оси равна

$$\psi = \left(\mu - \frac{n}{2}\right)r^2\left[1 + \varepsilon\cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{L}nz\right)\right];$$

$$\varepsilon = \frac{B_2}{B_0}\cdot\frac{L}{2\pi a\left(\mu - \frac{n}{2}\right)}. \quad (10.33)$$

При $B_2/B_0 > \frac{2\pi a}{L}\left(\mu - \frac{n}{2}\right)$ точка $r = 0$ становится гиперболической, силовые линии уходят из объема.

При наличии шира магнитные поверхности под влиянием резонансных возмущений с $m = 2, 3$ расщепляются, превращаясь в розетки и волокна, относительный размер которых ξ_m/a определяется формулой

$$\left(\frac{\xi_m}{a}\right)^{4-m} = \frac{2LB_m}{\pi maB_0\Delta\mu}.$$

При условии

$$\left(\frac{2LB_m}{\pi maB_0\Delta\mu}\right)^{\frac{1}{|4-m|}} \ll 1 \quad (10.34)$$

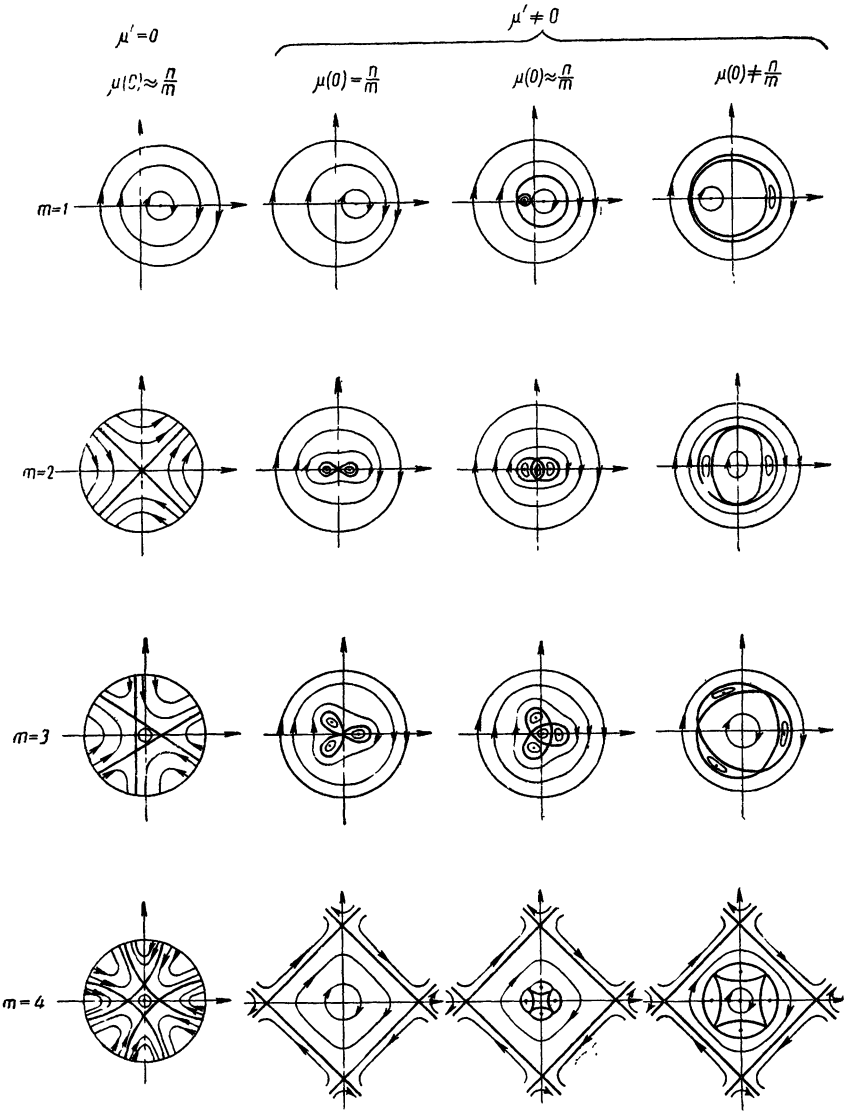


Рис. 23. Расщепление резонансной магнитной поверхности с образованием «волокнистой» структуры.

розетки $m = 2, 3$ не выходят за пределы поверхности радиуса a, и при этом же условии сепаратрисы, возникшие под влиянием возмущений с $m \geqslant 4$, находятся за пределами этой поверхности. Это условие налагает, таким образом, ограничение на допустимую амплитуду возмущающих полей. При $\Delta\mu \sim \mu$ условие (10.34) приводит к ограничению $B_m/B_0 < m$.

3. Возмущения второго и более высоких приближений

Для решения вопроса о возможности удержания плазмы в тороидальных ловушках очень важно знать, не существуют ли такие возмущающие магнитные поля, которые приводят к уходу силовых линий из объема тороидальной конфигурации. Как было отмечено выше, в линейном приближении по возмущению размыкание тороидальных магнитных поверхностей, приводящее к уходу силовых линий, было бы возможно при наличии радиального (направленного от магнитной оси) магнитного поля, среднее значение которого на магнитных поверхностях отлично от нуля. Из условия $\operatorname{div} \mathbf{B}_1 = 0$ следует, что такого магнитного поля, разматывающего магнитные поверхности, не существует.

Оказывается, что и в более высоких порядках возмущений «разматывания» магнитных поверхностей не происходит. Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что условиям разрешимости Крускала и Кульсруда [см. формулу (10.18)] удовлетворяют все уравнения последовательных приближений:

$$\mathbf{B}_0\nabla\psi_1 = -\mathbf{B}_1\nabla\psi_0; \tag{10.35}$$

$$\mathbf{B}_0\nabla\psi_2 = -\mathbf{B}_1\nabla\psi_1 - \mathbf{B}_2\nabla\psi_0; \tag{10.36}$$

$$\mathbf{B}_0\nabla\psi_3 = -\mathbf{B}_1\nabla\psi_2 - \mathbf{B}_2\nabla\psi_1 - \mathbf{B}_3\nabla\psi_0; \tag{10.37}$$

$$\mathbf{B}_0\nabla\psi_4 = -\mathbf{B}_1\nabla\psi_3 - \mathbf{B}_2\nabla\psi_2 - \mathbf{B}_3\nabla\psi_1 - \mathbf{B}_4\nabla\psi_0 \tag{10.38}$$

и т. д. Здесь индексы обозначают ту степень, в которой параметр разложения входит в данную величину. Возмущающее магнитное поле любого порядка малости удовлетворяет условию соленоидальности

$$\operatorname{div}\mathbf{B}_1 = \operatorname{div}\mathbf{B}_2 = \operatorname{div}\mathbf{B}_3 = \operatorname{div}\mathbf{B}_4 = \ldots = 0. \tag{10.39}$$

Ограничимся доказательством выполнимости условия разрешимости Крускала и Кульсруда для уравнения четвертого приближения.

Проинтегрируем правую часть уравнения (10.38), которую можно записать в виде $s_4 = -\operatorname{div}(\mathbf{B}_1\psi_3 + \mathbf{B}_2\psi_2 + \mathbf{B}_3\psi_1 + \mathbf{B}_4\psi_0)$, по объему, заключенному между двумя магнитными поверхностями нулевого приближения: $\psi_0 = \psi_{10}$, $\psi_0 = \psi_{10} + d\psi_0$. Переходя по теореме Гаусса к поверхностному интегралу, замечаем, что последнее слагаемое выпадает в силу условия (10.39):

$$-\int \mathbf{B}_4\psi_0 d\mathbf{S} = -\psi_0 \int \operatorname{div}\mathbf{B}_4 d\tau = 0. \tag{10.40}$$

При интегрировании оставшегося выражения учтем, что элемент поверхности может быть записан как

$$d\mathbf{S} = \frac{\nabla\psi_0}{|\nabla\psi_0|}\,dS = \nabla\psi_0 \frac{d\tau}{d\psi_0}, \qquad (10.41)$$

так что усреднение по двум магнитным поверхностям заменяется усреднением по объему слоев, примыкающих к этим поверхностям:

$$\int\limits_{dV} s_4 d\tau = -\frac{1}{d\psi_0}\left[\int\{(\mathbf{B}_1\nabla\psi_0)\psi_3 + (\mathbf{B}_2\nabla\psi_0)\psi_2 + (\mathbf{B}_3\nabla\psi_0)\psi_1\}d\tau\right]_1^2. \qquad (10.42)$$

Квадратные скобки с индексами «1» внизу и «2» вверху означают, что нужно взять разность двух интегралов по слоям, примыкающим к поверхностям $\psi_0 = \psi_{10}$ и $\psi_0 = \psi_{10} + d\psi_0 = \psi_{20}$.

Исключая теперь входящие в выражение (10.42) скалярные произведения с помощью уравнений (10.35)—(10.37) предыдущих первого, второго и третьего приближений, получаем

$$\int\limits_{dV} s_4\,d\tau = \frac{1}{d\psi_0}\left[\int\left\{\operatorname{div}\mathbf{B}_0\left(\psi_1\psi_3 + \frac{\psi_2^2}{2}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \operatorname{div}\left(\mathbf{B}_1\psi_1\psi_2 + \mathbf{B}_2\frac{\psi_1^2}{2}\right)\right\}d\tau\right]_1^2. \qquad (10.43)$$

Оба первых интеграла, содержащих $\mathbf{B}_0$, преобразуются к поверхностным интегралам и исчезают в силу условия $\mathbf{B}_0\nabla\psi_0 = 0$. Каждый из оставшихся интегралов как по слою, примыкающему к поверхности $\psi_0 = \text{const}$, так и по слою, примыкающему к поверхности $\psi_0 + d\psi_0 = \text{const}$, также преобразуется к интегралу по поверхностям, ограничивающим данный слой:

$$\int\limits_{dV} s_4 d\tau = \frac{1}{d\psi_0}(J_2 - J_1); \qquad (10.44)$$

$$J_1 \equiv \int\limits_{dV_1} \operatorname{div}\left(\mathbf{B}_1\psi_1\psi_2 + \mathbf{B}_2\frac{\psi_1^2}{2}\right)d\tau =$$

$$= \frac{1}{d\psi_0}\left[\int\left\{(\mathbf{B}_1\nabla\psi_0)\psi_1\psi_2 + (\mathbf{B}_2\nabla\psi_0)\frac{\psi_1^2}{2}\right\}d\tau\right]_1^3 \equiv \frac{1}{d\psi_0}(J_{13} - J_{11}); \qquad (10.45)$$

$$J_2 \equiv \int\limits_{dV_2} \operatorname{div}\left(\mathbf{B}_1\psi_1\psi_2 + \mathbf{B}_2\frac{\psi_1^2}{2}\right)d\tau =$$

$$= \frac{1}{d\psi_0}\left[\int\left\{(\mathbf{B}_1\nabla\psi_0)\psi_1\psi_2 + (\mathbf{B}_2\nabla\psi_0)\frac{\psi_1^2}{2}\right\}d\tau\right]_2^4 \equiv \frac{1}{d\psi_0}(J_{24} - J_{22}); \qquad (10.46)$$

Интегрирование в правых частях производится теперь по объему слоев, примыкающих к поверхностям $\psi_0 = \psi_{10}$, $\psi_0 = \psi_{30}$ и $\psi_0 = \psi_{20}$, $\psi_0 = \psi_{40}$, указанным на рис. 24.

Исключим снова скалярные произведения $\mathbf{B}_1 \nabla \psi_0$, $\mathbf{B}_2 \nabla \psi_0$ с помощью уравнений (10.35) и (10.36) первого и второго приближений. При этом получим

$$(\mathbf{B}_1 \nabla \psi_0)\psi_1\psi_2 + (\mathbf{B}_2 \nabla \psi_0)\frac{\psi_1^2}{2} = -\frac{1}{2}\operatorname{div}\mathbf{B}_0\psi_1^2\psi_2 - \frac{1}{6}\operatorname{div}\mathbf{B}_1\psi_1^3, \quad (10.47)$$

так что в интегралах J_{13}, J_{11}, J_{24}, J_{22} также можно перейти к интегрированию по магнитным поверхностям нулевого приближения. При этом члены, содержащие $\mathbf{B}_0$, сразу выпадают. В членах, содержащих $\mathbf{B}_1$, заменяем, как и прежде, элемент поверхности по формуле (10.41) и соответственно переходим к интегрированию по объему слоев, примыкающих к магнитным поверхностям, ограничивающим области интегрирования в интегралах J_{13}, J_{11}, J_{24}, J_{22}. Возникающее скалярное произведение $\mathbf{B}_1 \nabla \psi_0$ исключаем с помощью уравнения первого приближения (10.35), после чего получаем интеграл вида $\int \operatorname{div}\mathbf{B}_0\psi_1^4 d\tau$, равный, очевидно, нулю. Таким образом, доказано, что

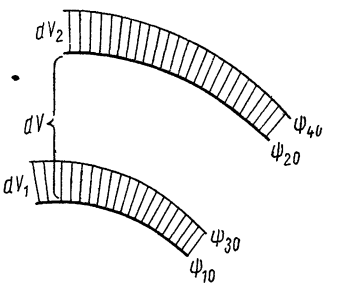


Рис. 24. Поверхностные слои, по которым производится интегрирование при доказательстве выполнимости условия разрешимости уравнений для возмущений магнитных поверхностей.

$$\int_{dV} s_4 d\tau = 0. \quad (10.48)$$

Совершенно аналогично можно убедиться в выполнении условий разрешимости Крускала и Кульсруда и для уравнений любого приближения разложения по малому параметру.

Таким образом, «разматывания» магнитных силовых линий не происходит ни в каком приближении метода возмущений. Это означает, что если эффект «разматывания» существует, то он экспоненциально мал [24]. Полученный результат согласуется с выводом, найденным ранее (см. § 6) методом разложения по степеням расстояния от магнитной оси.

При больших возмущениях магнитного поля требуются качественно новые методы исследования [25—28], которые в данной работе не рассматриваются.

4. Резонансные явления в окрестности магнитной оси

а) Общие соотношения

Остановимся более подробно на резонансных явлениях, возникающих при наложении малых возмущений поля, которые

не смещают магнитную ось тороидальной конфигурации. При этом ограничимся линейными по ρ возмущениями поля. Скалярный потенциал магнитного поля в окрестности замкнутой магнитной оси s в общем случае можно представить в виде

$$\varphi = \int_0^s B_0(s)\,ds + \left\{-\frac{B_0'(s)}{4} + D\sin 2[\theta + \Delta(s)]\right\}\rho^2. \quad (10.49)$$

Магнитное поле, описываемое потенциалом (10.49), представляет собой комбинацию гофрированного поля и двухзаходного поля, прокручивающегося вокруг пространственной оси s с угловой скоростью $\Delta(s)$.

Рассмотрение магнитных поверхностей будем производить в системе координат, вращающейся вместе с двухзаходным полем:

$$x = \rho\cos(\theta + \Delta);\ y = \rho\sin(\theta + \Delta). \quad (10.50)$$

В координатах x, y, s скалярный потенциал (10.49) имеет вид

$$\varphi = \int_0^s B_0 ds - \frac{B_0'}{4}(x^2 + y^2) + 2Dxy, \quad (10.51)$$

а уравнения силовых линий магнитного поля

$$\left.\begin{aligned} x' &= -\frac{B_0'}{2B_0}x - \left(\Delta' - \alpha' - \frac{2D}{B_0}\right)y; \\ y' &= -\frac{B_0'}{2B_0}y + \left(\Delta' - \alpha' + \frac{2D}{B_0}\right)x, \end{aligned}\right\} \quad (10.52)$$

где $\alpha' = \varkappa(s)$ — кручение магнитной оси s. Произведем замену переменных

$$x = B_0^{-1/2}x_1;\ y = B_0^{-1/2}y_1. \quad (10.53)$$

Тогда уравнения (10.52) приводятся к равенствам:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= -(\Delta' - \alpha' - 2D/B_0)\,y_1 \equiv q(s)\,y_1; \\ y_1' &= (\Delta' - \alpha' + 2D/B_0)\,x_1 \equiv p(s)\,x_1, \end{aligned}\right\} \quad (10.54)$$

где $q(s)$ и $p(s)$ — периодические функции s с периодом L.

Как показано в Приложении I, магнитные поверхности при известных решениях X_1, X_2, Y_1, Y_2 уравнений (10.54) на периоде $(0, L)$ можно представить в форме (I.17), удобной для исследования методом возмущений. Нетрудно доказать, что если функции $p(s)$ и $q(s)$ четные на периоде $(0, L)$, то выполняется равенство $\alpha_{11} = \alpha_{22}$, и в этом случае поверхностная функция

$$\psi = B_0\{(\alpha_{21}Y_2^2 - \alpha_{12}Y_1^2)x^2 + (\alpha_{21}X_2^2 - \alpha_{12}X_1^2)y^2 + 2(\alpha_{12}X_1Y_1 - \alpha_{21}X_2Y_2)xy\}. \quad (10.55)$$

Учитывая начальные значения функций X_1, X_2, Y_1, Y_2, получаем в сечении $s = 0$ уравнение поперечных сечений магнитных поверхностей

$$\alpha_{21}x^2 + \alpha_{12}y^2 = \text{const}. \tag{10.56}$$

Формула (10.56) показывает, что в сечениях $s = \text{const}$, относительно которых коэффициенты уравнений силовых линий $p(s)$ и $q(s)$ симметричны, магнитные поверхности ориентированы по координатным осям x, y.

В полярных координатах (10.50) выражение для функции ψ приводится к виду

$$\psi = B_0 \frac{\psi_{11} + \psi_{22}}{2} \{1 + \varepsilon(s) \cos 2(\theta + \Delta - \delta)\} \rho^2, \tag{10.57}$$

где величины $\varepsilon(s)$ и $\delta(s)$ определяются формулами:

$$\varepsilon^2(s) = \frac{(\psi_{11} - \psi_{22})^2 + \psi_{12}^2}{(\psi_{11} + \psi_{22})^2}; \quad \operatorname{tg} 2\delta = \frac{\psi_{12}}{\psi_{11} - \psi_{22}}, \tag{10.58}$$

а ψ_{11}, ψ_{22}, ψ_{12} обозначают соответственно коэффициенты при x^2, y^2, xy в выражении (10.55).

Поскольку функции X_1, X_2, Y_1, Y_2 достаточно определить только на одном периоде $(0, L)$, то для их нахождения естественно воспользоваться обычным методом возмущений. Запишем уравнения силовых линий (10.54) в виде

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= (q_0 + \varepsilon q_1) y_1; \\ y_1' &= (p_0 + \varepsilon p_1) x_1, \end{aligned}\right\} \tag{10.59}$$

где ε — постоянный малый параметр. Считая известным невозмущенные решения $X_{10}(s)$, $X_{20}(s)$, $Y_{10}(s)$, $Y_{20}(s)$, ищем $X_1(s)$, $X_2(s)$, $Y_1(s)$, $Y_2(s)$ в виде разложений по малому параметру ε:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= X_{10} + \varepsilon\xi_{11} + \varepsilon^2\xi_{12} + \ldots, \quad X_2 = X_{20} + \varepsilon\xi_{21} + \varepsilon^2\xi_{22} + \ldots; \\ Y_1 &= Y_{10} + \varepsilon\eta_{11} + \varepsilon^2\eta_{12} + \ldots, \quad Y_2 = Y_{20} + \varepsilon\eta_{21} + \varepsilon^2\eta_{22} + \ldots. \end{aligned}\right\} \tag{10.60}$$

Искомые функции $\xi_{ik}(s)$ и $\eta_{ik}(s)$ находим методом вариации постоянных a_{ik}, b_{ik}:

$$\left.\begin{aligned} \xi_{i\kappa} &= a_{i\kappa}(s) X_{10}(s) + b_{i\kappa}(s) X_{20}(s); \\ \eta_{i\kappa} &= a_{i\kappa}(s) X_{10}(s) + b_{i\kappa}(s) Y_{20}(s). \end{aligned}\right\} \tag{10.61}$$

Подставляя выражения (10.61) в уравнения (10.59) и приравнивая члены при одинаковых степенях малого параметра ε, получаем следующие выражения для функций $a_{ik}(s)$ и $b_{ik}(s)$, удов-

летворяющих нулевым начальным условиям:

$$\left.\begin{aligned} a_{i1}(s) &= \int_0^s (q_1 Y_{i0} Y_{20} - p_1 X_{i0} X_{20})\, ds; \\ b_{i1}(s) &= -\int_0^s (q_1 Y_{i0} Y_{10} - p_1 X_{i0} Y_{10})\, ds; \\ a_{i2}(s) &= \int_0^s (q_1 \eta_{i1} Y_{20} - p_1 \xi_{i1} X_{20})\, ds; \\ b_{i2}(s) &= -\int_0^s (q_1 \eta_{i1} Y_{10} - p_1 \xi_{i1} X_{10})\, ds. \end{aligned}\right\} \qquad (10.62)$$

Взяв значения $a_{ik}(s)$ и $b_{ik}(s)$ в конце периода $s = L$, получим [см. Приложение I, формула (I.14)] выражения для параметров α_{ik}:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{i1} &= \alpha_{i1}^0 + \varepsilon(a_{11}\alpha_{i1}^0 + b_{11}\alpha_{i2}^0) + \varepsilon^2(a_{12}\alpha_{i1}^0 + b_{12}\alpha_{i2}^0) + \ldots; \\ \alpha_{i2} &= \alpha_{i2}^0 + \varepsilon(a_{21}\alpha_{i1}^0 + b_{21}\alpha_{i2}^0) + \varepsilon^2(a_{22}\alpha_{i1}^0 + b_{22}\alpha_{i2}^0) + \ldots. \end{aligned}\right\} \qquad (10.63)$$

б) Возмущение двухзаходного поля гофрированным

Рассмотрим конкретный пример возмущения двухзаходного поля гофрированным, полагая

$$\Delta' - \alpha' = u_0'; \; D = D_0(1+\nu); \; B_0(s) = B_0/(1 + h\cos\gamma s), \qquad (10.64)$$

где B_0, D_0, u_0', ν, h, γ — постоянные. Величина h характеризует амплитуду гофрировки продольного поля $B_0(s)$, а величина ν введена для возможности варьирования параметров невозмущенной конфигурации и определения ширины резонансной области. Параметры h и ν считаем малыми. Уравнения силовых линий (10.54) в координатах x_1, y_1 для такого поля:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{ds} &= -\left[u_0' - \frac{2D_0}{B_0}(1+\nu)(1 + h\cos\gamma s)\right] y_1; \\ \frac{dy_1}{ds} &= \left[u_0' + \frac{2D_0}{B_0}(1+\nu)(1 + h\cos\gamma s)\right] x_1, \end{aligned}\right\} \qquad (10.65)$$

а в невозмущенном состоянии при $\nu = 0$, $h = 0$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1^0}{ds} &= -\left(u_0' - \frac{2D_0}{B_0}\right) y_1^0 \equiv -k_1 y_1^0; \\ \frac{dy_1^0}{ds} &= \left(u_0' + \frac{2D_0}{B_0}\right) x_1^0 \equiv k_2 x_1^0. \end{aligned}\right\} \qquad (10.66)$$

Коэффициенты k_1 и k_2 связаны с параметром эллиптичности $\varepsilon_0 = 2D_0/B_0u_0'$ невозмущенных нормальных сечений магнитных поверхностей равенствами:

$$k_1 = u_0'(1-\varepsilon_0);\ k_2 = u_0'(1+\varepsilon_0). \tag{10.67}$$

Решение невозмущенных уравнений (10.66):

$$\left.\begin{aligned} x_1^0 &= x_{10}\cos\sqrt{k_1k_2}\,s - \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}\,y_{10}\sin\sqrt{k_1k_2}s; \\ y_1^0 &= x_{10}\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}\sin\sqrt{k_1k_2}\,s + y_{10}\cos\sqrt{k_1k_2}s. \end{aligned}\right\} \tag{10.68}$$

Отсюда следует, что функции X_1^0, X_2^0, Y_1^0, Y_2^0 соответственно равны

$$\left.\begin{aligned} X_1^0 &= \cos\sqrt{k_1k_2}\,s;\ X_2^0 = -\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}\sin\sqrt{k_1k_2}\,s; \\ Y_1^0 &= \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}\sin\sqrt{k_1k_2}\,s;\ Y_2^0 = \cos\sqrt{k_1k_2}\,s. \end{aligned}\right\} \tag{10.69}$$

Невозмущенный характеристический показатель μ_0 определяется выражением

$$\mu_0 = \sqrt{k_1k_2}\,L = u_0'\sqrt{1-\varepsilon_0^2}\,L. \tag{10.70}$$

Основной параметрический резонанс соответствует $\mu_0 = \pi$. При этом силовые линии невозмущенного поля в окрестности магнитной оси прокручиваются на одном периоде L на угол π и, следовательно, замыкаются после двух обходов по тору. Рассмотрим поведение магнитных поверхностей вблизи основного резонанса, полагая

$$\gamma = 2\pi/L;\ u_0'\sqrt{1-\varepsilon_0^2} = \pi/L. \tag{10.71}$$

В этом случае вычисление коэффициентов α_{ik} дает

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11} = \alpha_{22} &\approx -1;\ \alpha_{12} = -\frac{\pi\varepsilon_0}{\sqrt{1-\varepsilon_0^2}}\cdot\frac{\nu\varepsilon_0 + h/2}{1+\varepsilon_0}; \\ \alpha_{21} &= \frac{\pi\varepsilon_0}{\sqrt{1-\varepsilon_0^2}}\cdot\frac{\nu\varepsilon_0 - h/2}{1-\varepsilon_0}. \end{aligned}\right\} \tag{10.72}$$

Согласно формулам (I.16) (см. Приложение I), ширина резонансной области, в которой гофрировка поля приводит к образованию гиперболической оси (т. е. к появлению двухлепестковой розетки в окрестности эллиптической оси), определяется неравенствами

$$-\frac{h}{2\varepsilon_0} < \nu < \frac{h}{2\varepsilon_0}. \tag{10.73}$$

Более высокие резонансы имеют ширину резонансной зоны, пропорциональную различным степеням h.

Параметр эллиптичности $\varepsilon(s)$ в двух сечениях ($s = 0$ и $s = L/2$) соответственно равен

$$\varepsilon(0) = \frac{2\nu\varepsilon_0^2 - h}{2\nu\varepsilon_0 - h\varepsilon_0}\,;\quad \varepsilon\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{2\nu\varepsilon_0^2 + h}{2\nu\varepsilon_0 + h\varepsilon_0}\,. \tag{10.74}$$

При выполнении неравенств

$$-\frac{h}{2\varepsilon_0^2} < \nu < \frac{h}{2\varepsilon_0^2} \tag{10.75}$$

нормальные сечения магнитных поверхностей проворачиваются на периоде L на угол π вокруг магнитной оси в сторону, противоположную вращению токовых обмоток невозмущенного двухзаходного поля. Поскольку $|\varepsilon_0| < 1$, то появляющаяся розетка, согласно неравенствам (10.73), всегда проворачивается на угол π, приводя к возникновению так называемой гиперболической особой точки с перескоком изображающих точек силовой линии с одной ветви гиперболы на другую [19], или гипер-гиперболической особой точки. Вне резонансной области [см. формулу (10.73)], но при соблюдении условий (10.75) эллиптическое сечение магнитной поверхности также проворачивается вокруг магнитной оси s на угол π на периоде L.

Таким образом, под воздействием малого возмущения поля магнитные поверхности, вращающиеся в невозмущенном состоянии вместе с обмоткой двухзаходного поля, могут изменить угол своего прокручивания на периоде L на конечную величину. При этом они начинают прокручиваться так же, как силовые линии невозмущенного поля.

Если положить $\gamma = 2\pi n/L$, $v' = u_0'\sqrt{1-\varepsilon_0^2}$ и не делать никаких предположений относительно величины v', то вычисление коэффициентов α_{ik} в линейном приближении по параметрам ν и h дает:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_{11} = \alpha_{22} \approx \cos v'L;\\
&\alpha_{12} = \frac{1}{1-\varepsilon_0}\left\{-\sqrt{1-\varepsilon_0^2}\sin v'L + \nu u_0' L\varepsilon_0^2\cos v'L + \right.\\
&\qquad \left. + u_0'\varepsilon_0\left(\frac{\nu}{v'} - \frac{4v'h}{\gamma^2 - 4v'^2}\right)\sin v'L\right\};\\
&\alpha_{21} = \frac{1}{1+\varepsilon_0}\left\{\sqrt{1-\varepsilon_0^2}\sin v'L - \nu u_0' L\varepsilon_0^2\cos v'L + \right.\\
&\qquad \left. + u_0'\varepsilon_0\left(\frac{\nu}{v'} - \frac{4v'h}{\gamma^2 - 4v'^2}\right)\sin v'L\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{10.76}$$

Полученные выражения (10.76) формально содержат резонансные знаменатели $\gamma^2 - 4v'^2$, которые, однако, из-за наличия мно-

жителя $\sin v'L$ не приводят к большим значениям величин α_{12} и α_{21}. Например, в рассмотренном выше случае основного резонанса $v'L = \pi$, переходя в выражениях (10.76) к пределу $v'L \to \pi$, получаем формулы (10.72).

Рассмотрим важный частный случай возмущения гофрированным полем магнитных конфигураций с осью, не обладающей кручением, когда $\alpha' \equiv \varkappa = 0$. При этом из условия замкнутости оси вытекает, что $u_0' = 2\pi N$, и при малых ε_0 всегда имеет место близость к резонансу $\gamma = 2v'$ для возмущающего гофрированного поля с периодом, вдвое меньшим, чем период винтовой токовой обмотки, равный L/N. Полагая в выражениях (10.76) $\nu = 0$, $Lu_0' = \pi n$, $\gamma = 2u_0'$, получаем параметры α_{12} и α_{21} в виде

$$\alpha_{12} = -\sin v'L \sqrt{\frac{1-\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0}\left(1+\frac{h}{\varepsilon_0}\right)};$$

$$\alpha_{21} = \sin v'L \sqrt{\frac{1+\varepsilon_0}{1-\varepsilon_0}\left(1-\frac{h}{\varepsilon_0}\right)}. \qquad (10.77)$$

Согласно критерию появления гиперболической точки $\sin^2 \mu = -\alpha_{12}\alpha_{21} < 0$, заключаем, что при условии

$$|h| > |\varepsilon_0| \qquad (10.78)$$

эллиптическая магнитная ось превращается в гиперболическую. Таким образом, если относительная модуляция h продольного магнитного поля $B_0(s)$ превышает параметр эллиптичности ε_0, то в окрестности магнитной оси появляется розетка. Эта розетка в используемой системе координат вращается в сторону, противоположную вращению токовой обмотки, а в неподвижной системе координат не вращается, что соответствует малому прокручиванию силовых линий при $\varepsilon_0 \ll 1$.

в) Резонансное возмущение трехзаходного винтового поля гофрированным

Для иллюстрации методики расчета магнитных поверхностей, в случаях когда не возмущается вторая гармоника потенциала магнитного поля φ, рассмотрим возмущение винтового магнитного поля с прямой магнитной осью s гофрированным продольным полем $B_0 = B_0(s)$. Расчеты существенно упрощаются, если ограничиться случаем трехзаходного поля, когда невозмущенные магнитные поверхности в окрестности оси s круглые. При этом потенциал магнитного поля φ, удовлетворяющий уравнению Лапласа и представленный в виде ряда по степеням отклонения от оси ρ,

$$\varphi = \int_0^s B_0 ds - \frac{B_0'}{4}\rho^2 + \left(a_1 e^{3i\omega} + a_1^* e^{-3i\omega}\right)\rho^3 + a_2\rho^4 + \\ + \left(a_3 e^{3i\omega} + a_3^* e^{-3i\omega}\right)\rho^5 + a_4\rho^6 + \ldots \qquad (10.79)$$

Здесь зависимость от азимута ω представлена для удобства в экспоненциальной форме, звездочкой отмечены комплексно сопряженные величины, а функции $a_2(s)$ и $a_4(s)$ равны

$$a_2 = \frac{B_0'''(s)}{64}; \quad a_4 = \frac{B_0^{(V)}(s)}{2304}.$$

Если принять продольный период винтового поля L_1 за единицу, то

$$a_1 = Ae^{-3is}; \quad a_3 = \frac{9}{16} Ae^{-3is},$$

где $2A = \text{const}$ — амплитуда трехзаходного винтового поля.

Резонансному случаю соответствует совпадение периодов винтового и гофрированного полей (см. задачу к § 6). Как указывалось выше, разложение поверхностной функции ψ начинается при этом с члена, содержащего ρ^3. Учитывая, кроме того, что из соображений симметрии магнитного поля [см. формулу (10.79)] функция ψ должна содержать лишь экспоненты, кратные $e^{\pm 3i\omega}$ ищем ψ в виде

$$\psi = B_0^{3/2}(\alpha_1 e^{3i\omega} + \alpha_1^* e^{-3i\omega})\rho^3 + B_0^2\alpha_2\rho^4 + B_0^{5/2}(\alpha_3 e^{3i\omega} + \alpha_3^* e^{-3i\omega})\rho^5 + \\ + B_0^3(\alpha_4 + \alpha_5 e^{6i\omega} + \alpha_5^* e^{-6i\omega})\rho^6 + B_0^{7/2}(\alpha_6 e^{3i\omega} + \alpha_6^* e^{3i\omega})\rho^7 + \ldots \quad (10.80)$$

Коэффициенты $\alpha_i(s)$ определяются из уравнения $\nabla\varphi\nabla\psi = 0$ приравниванием членов при одинаковых степенях ρ. В отличие от нерезонансного случая возникающие при решении уравнений для $\alpha_i(s)$ произвольные постоянные находятся из условия разрешимости в периодических функциях последующих уравнений. В рассматриваемом случае для определения константы в выражении для α_2 используется условие разрешимости уравнения для α_3. Для определения константы в α_3 необходимо использовать уравнения для α_4, α_5 и т. д.

Ограничимся вычислением магнитных поверхностей с точностью до членов порядка ρ^5. Специфика расчета более высоких членов разложения ψ проиллюстрирована в задаче 1 в конце параграфа, где рассматривается случай возмущения винтового поля мультипольным.

Приравнивание коэффициентов при $\rho^3 e^{3i\omega}$, ρ^4, $\rho^5 e^{3i\omega}$, ρ^6, $\rho^6 e^{6i\omega}$, $\rho^7 e^{3i\omega}$ в уравнении $\nabla\varphi\nabla\psi = 0$ приводит к следующей системе уравнений для параметров магнитных поверхностей $\alpha_i(s)$:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1' &= 0; \\ \alpha_2' &= -18B_0^{-3/2}(a_1\alpha_1^* + a_1^*\alpha_1); \\ \alpha_3' &= -12B_0^{-3/2}a_1\alpha_2 - \frac{3\alpha_1}{16}\left(\frac{B_0''}{B_0^2}\right)'; \end{aligned}\right\}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\alpha_4' &= -24B_0^{-3/2}(a_1\alpha_3^* + a_1^*\alpha_3) - \frac{27}{2}B_0^{-5/2}(a_1\alpha_1^* + \\
&+ a_1^*\alpha_1) + \frac{9i}{2}B_0^{-7/2}B_0'(a_1\alpha_1^* - a_1^*\alpha_1) + \\
&+ \frac{1}{2}\frac{B_0''}{B_0^2}\alpha_2' - \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha_2 B_0''}{B_0^2}\right)'; \\
\alpha_5' &= -6B_0^{-3/2}a_1\alpha_3 - \frac{27}{8}B_0^{-5/2}a_1\alpha_1 + \frac{9i}{2}B_0^{-7/2}B_0'a_1\alpha_1; \\
\alpha_6' &= -18B_0^{-3/2}(a_1\alpha_4 + 2a_1^*\alpha_5) - \frac{45}{4}B_0^{-5/2}a_1\alpha_2 + \\
&+ 3iB_0^{-9/2}(B_0^2\alpha_2)'a_1 + \frac{9}{16}\frac{B_0''}{B_0^2}\alpha_3' - \\
&- \frac{5}{16}\left(\frac{B_0''\alpha_3}{B_0^2}\right)' + \frac{\alpha_1}{128}\left(\frac{B_0^{(IV)}}{B_0^3}\right)'.
\end{aligned}
\right\} \quad (10.81)
$$

Полученные уравнения можно проинтегрировать в элементарных функциях, если задать гофрированное поле $B_0(s)$ в виде

$$
B_0(s) = \frac{1}{(1 + \nu\cos 3s)^2}. \quad (10.82)
$$

Выберем $\alpha_1 = i$, тогда условием разрешимости уравнения для α_4 будет возможность выразить реальную часть α_3 в виде интеграла от нуля до s, а произвольная постоянная в мнимой части для α_3 определится из условия разрешимости уравнения для мнимой части α_5. Полагая

$$
\alpha_3 = \alpha_{31} + i\alpha_{32};\ \alpha_5 = \alpha_{51} + i\alpha_{52}
$$

и используя конкретное задание продольного поля (10.82), записываем систему уравнений, необходимую для вычисления параметров α_2, α_{31} и α_{32}:

$$
\left.
\begin{aligned}
\alpha_2' &= \frac{6A}{\nu}B_0^{-3}B_0'; \\
\alpha_{31}' &= -12AB_0^{-3/2}\alpha_2\cos 3s; \\
\alpha_{32}' &= \frac{2A}{\nu}B_0^{-3}\alpha_2 B_0' - \frac{3}{16}\left(\frac{B_0''}{B_0^2}\right)'; \\
\alpha_{52}' &= \frac{A}{2\nu}B_0^{-2}\alpha_{31}' - 6AB_0^{-3/2}\alpha_{32}\cos 3s + \frac{81A}{40}B_0^{-5/2}\cos 3s - \\
&- \left(\frac{A}{2\nu}B_0^{-2}\alpha_{31} + \frac{9A}{5}B_0^{-5/2}\sin 3s\right)'.
\end{aligned}
\right\} \quad (10.83)
$$

Отсюда получаем следующие выражения для искомых функций α_1, α_2, α_{31}, α_{32}:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 = \mathrm{i},\ \alpha_2 = \alpha_{20} - \frac{3A}{\nu} B_0^{-2}; \\ &\alpha_{31} = -12A \int_0^s B_0^{-3/2} \alpha_2 \cos 3s ds; \\ &\alpha_{32} = \alpha_{30} - \frac{A}{\nu}\left(\alpha_{20} B_0^{-2} - \frac{3A}{2\nu} B_0^{-4}\right) - \frac{3}{16} B_0^{-2} B_0'' . \end{aligned}\right\} \quad (10.84)$$

Постоянные интегрирования α_{20} и α_{30} определяются из условий равенства нулю средних значений (по s) правых частей уравнений для α_{31} и α_{52}. Используя формулу

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^{2n} x dx = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} = \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2},$$

находим выражения для α_{20} и α_{30}:

$$\left.\begin{aligned} &\left(1 + \frac{\nu^2}{4}\right)\alpha_{20} = \frac{7A}{\nu}\left(1 + \frac{15\nu^2}{4} + \frac{15\nu^4}{8} + \frac{5\nu^6}{64}\right); \\ &\left(1 + \frac{\nu^2}{4}\right)\alpha_{30} = \frac{11A^2}{2\nu^2}\left[1 + \frac{45\nu^2}{4} + \frac{21\nu^4}{4}\left(5 + \frac{25\nu^2}{8} + \right.\right. \\ &\left.\left. + \frac{15\nu^4}{32} + \frac{\nu^6}{128}\right)\right] + \frac{27}{16}\left(1 + 5\nu^2 + \frac{17\nu^4}{24}\right). \end{aligned}\right\} \quad (10.85)$$

Полученная поверхностная функция ψ описывает магнитные поверхности с трехлепестковой розеткой в центре, которая не вращается при движении вдоль оси s.

Если считать амплитуду гофрировки ν малой и оставить в разложении функции ψ лишь члены порядка $1/\nu$ и порядка единицы, то получим

$$\psi = -2B_0^{3/2}\rho^3 \sin 3\omega + B_0^2\left(\frac{4A}{\nu} - 3A\cos 3s\right)\rho^4 + \\ + B_0^{5/2}\left[\frac{32A^2}{\nu}\sin 3\theta - \left(72A^2 + \frac{27}{8}\right)\sin 3\omega\right]\rho^5 + \ldots, \quad (10.86)$$

где $\theta = \omega - s$. В предельном случае $\nu \to 0$ выражение для ψ примет вид

$$\psi = \frac{4A}{\nu}(\rho^4 + 8A\rho^5 \sin 3\theta + \ldots) = \frac{4A}{\nu}(\rho^2 + 4A\rho^3 \sin 3\theta + \ldots)^2. \quad (10.87)$$

Таким образом, в рассматриваемом предельном случае наш метод расчета резонансной конфигурации приводит к обычному выражению для поверхностной функции винтовой магнитной поверхности, взятому в квадрате.

В задаче 1 к данному параграфу будет показано, что в предельных случаях, получающихся из решения для резонансных конфигураций, могут получаться и более сложные функции от простейшей функции ψ, начинающейся с члена порядка ρ^2.

В противоположном предельном случае гофрированного поля ($A \to 0$) вместо привычных магнитных поверхностей круглого поперечного сечения получим магнитные поверхности с тройной особой точкой на оси s. Последнее обстоятельство связано с тем, что при отсутствии винтового поля мы приходим к конфигурации с замкнутыми силовыми линиями, и магнитные поверхности становятся произвольными.

5. Примеры расщепленных магнитных поверхностей

Рассмотрим возмущение прямого плазменного цилиндра с током. В этом случае можно получить точное решение задачи о нахождении магнитных поверхностей, если в качестве возмущающего поля взять магнитное поле, обладающее винтовой симметрией. Распределение магнитного поля в невозмущенном состоянии выберем в виде

$$\left.\begin{aligned} B_r &= 0; \\ B_\varphi &= B_0\left\{\mu r + h\left[J_1(\varepsilon r) - \frac{\varepsilon r}{2}\right]\right\}; \\ B_z &= B_0\{1 + h[J_0(\varepsilon r) - 1]\}, \end{aligned}\right\} \qquad (10.88)$$

где величина h связана с параметрами μ и ε (не путать с безразмерным параметром эллиптичности) соотношением

$$h = \frac{2}{\varepsilon^2}[\varepsilon(\mu - \alpha) + 2\alpha\mu], \quad \text{где } \alpha \equiv 2\pi/l; \qquad (10.89)$$

l — период винтовых возмущений. Рассматриваемая невозмущенная магнитная конфигурация [см. формулу (10.88)] зависит от параметров μ и ε, от которых зависит также и невозмущенное давление плазмы

$$p(r) = p_0 + B_0^2(2\mu - \varepsilon)\left\{\frac{\alpha - \mu}{2}r^2 + \frac{h}{\varepsilon}\left[J_0(\varepsilon r) - 1 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\varepsilon^2 r^2}{4} + \alpha r\left(J_1(\varepsilon r) - \frac{\varepsilon r}{2}\right)\right]\right\}. \qquad (10.90)$$

При наличии винтовых возмущений магнитного поля магнитные поверхности $\psi(r, \theta) = \text{const}$ определяются функцией ψ, равной

$$\psi = \psi_0(r) + \delta f_m(r)\cos m\theta; \quad \theta \equiv \varphi - \alpha z, \qquad (10.91)$$

где невозмущенная поверхностная функция

$$\psi_0(r) = \frac{B_0}{\varepsilon}\left\{\frac{\varepsilon - 2\mu}{\varepsilon}\alpha^2 r^2 + h[J_0(\varepsilon r) + \alpha r J_1(\varepsilon r)]\right\}. \qquad (10.92)$$

При условии равновесия плазмы $\nabla p = \frac{1}{c}$ [jB] радиальная часть возмущения равна

$$f_m(r) = \varepsilon J_m(\varkappa r) - \alpha r \varkappa J'_m(\varkappa r); \quad \varkappa^2 \equiv \varepsilon^2 - \alpha^2 m^2. \qquad (10.93)$$

Если же не налагать требования равновесия и выбирать возмущающее магнитное поле безвихревым, то функция $f_m(r)$ будет иметь вид

$$f_m(r) = r I'_m(\alpha m r). \qquad (10.94)$$

В обоих случаях возмущающее магнитное поле имеет следующие компоненты:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{B}_r &= -\frac{\delta}{r} f_m(r) \sin m\theta; \\ \tilde{B}_\varphi = -\frac{\delta}{\beta} f'_m(r) \cos m\theta; \quad \tilde{B}_z &= \frac{\alpha r}{\beta} f'_m(r) \cos m\theta, \end{aligned}\right\} \qquad (10.95)$$

где $\beta \equiv 1 + \alpha^2 r^2$. При выполнении численных расчетов поверхностная функция $\psi(r, \theta)$ задавалась в виде *

$$\psi(r, \theta) = \frac{r^2}{4} + \frac{A}{\varepsilon}[J_0(\varepsilon r) + r J_1(\varepsilon r)] + \gamma f_m(r) \cos m\theta. \qquad (10.96)$$

При этом в качестве единицы для измерения длины принята величина $l/2\pi$, а для магнитного поля — величина B_0. Параметры μ, h и δ выражаются через A, ε и γ формулами:

$$\mu = \varepsilon \frac{1 + 2A}{\varepsilon + 2 + 4A}; \quad h = \frac{4A}{\varepsilon + 2 + 4A}; \quad \delta = \frac{\gamma}{hA}. \qquad (10.97)$$

На рис. 25 изображены магнитные поверхности при возмущающем магнитном поле [см. формулу (10.93)], удовлетворяющем условию равновесия. На рис. 26 показаны магнитные поверхности при возмущающем магнитном поле [см. формулу (10.94)], удовлетворяющем условию $\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = 0$. Величина ε принята равной 20. Для величины A брались два значения: $A = 2$ (нерезонансный случай) и $A = 0{,}0556$ (резонансный случай).

Задача 1. Найти магнитные поверхности суперпозиции гексаполярного и трехзаходного винтового магнитных полей.

Решение. Потенциал магнитного поля рассматриваемой магнитной конфигурации зададим в виде

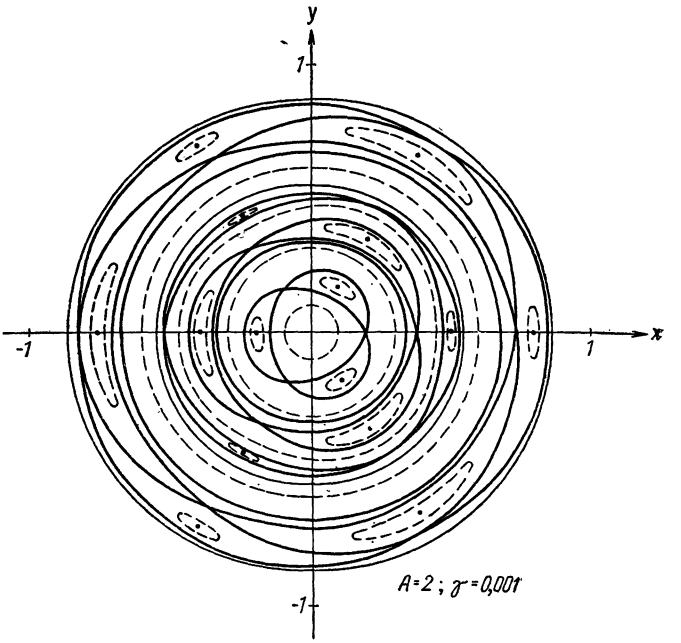
$$\varphi = s + \frac{32}{9} A I_3(3\rho) \cos 3(\omega - s) + 2h\rho^3 \cos 3\omega. \qquad (10.98)$$

В предельном случае винтового поля, когда $h = 0$, магнитные поверхности описываются функцией

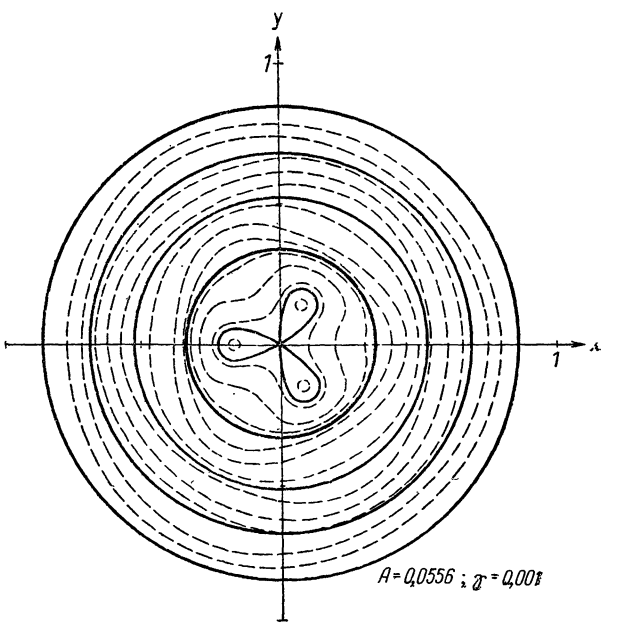
$$\psi_1 = \frac{\rho^2}{2} + \frac{32}{9} \rho I'_3(3\rho) \sin 3(\omega - s). \qquad (10.99)$$

---

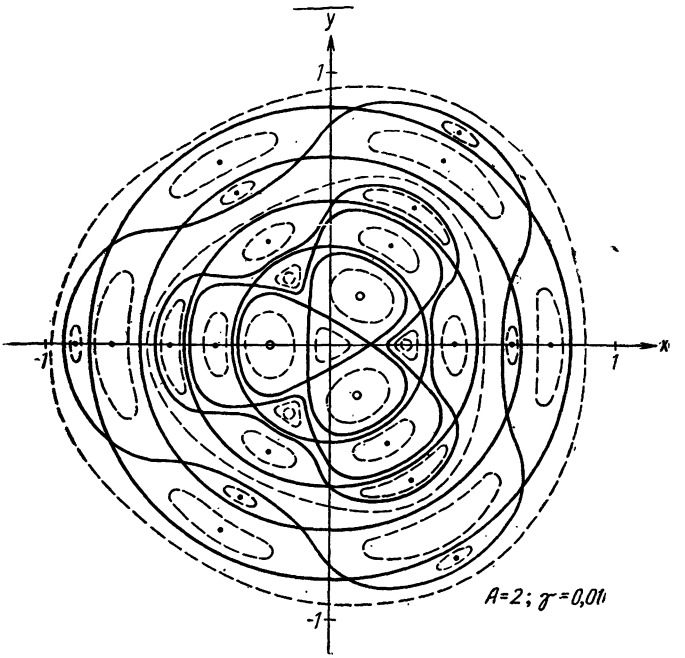
* Расчет и построение сечений магнитных поверхностей выполнены Н. М. Зуевой.



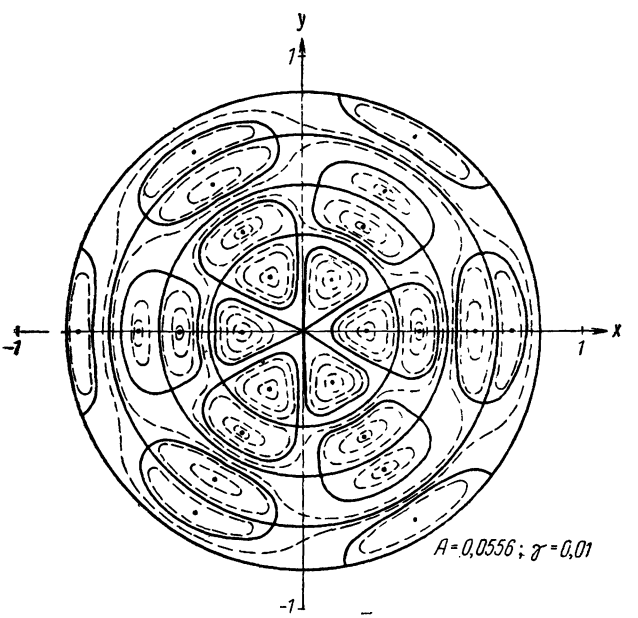
$A=2$; $\gamma=0{,}001$



$A=0{,}0556$; $\gamma=0{,}001$



$A=2;\ \gamma=0{,}01$



$A=0{,}0556;\ \gamma=0{,}01$

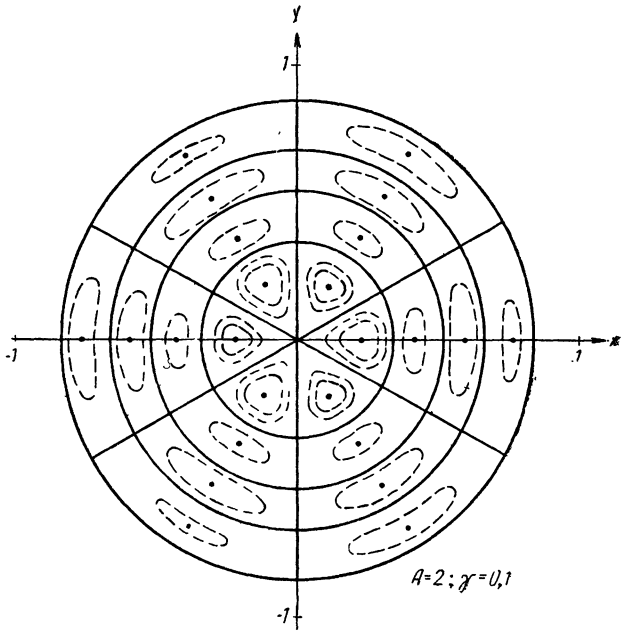


Рис. 25. Расщепленные магнитные поверхности равновесной винтовой конфигурации с продольным током.

В противоположном предельном случае, при $A = 0$, имеем

$$\psi_2 = \rho^3 \sin 3\omega. \qquad (10.100)$$

В общем случае поле, описываемое потенциалом (10.98), несимметрично, и его магнитные поверхности следует искать в виде разложения по степеням ρ.

Запишем потенциал φ в виде

$$\varphi = s + (a_1 e^{3i\omega} + a_1^* e^{-3i\omega})\rho^3 + (a_3 e^{3i\omega} + a_3^* e^{-3i\omega})\rho^5 + \cdots, \qquad (10.101)$$

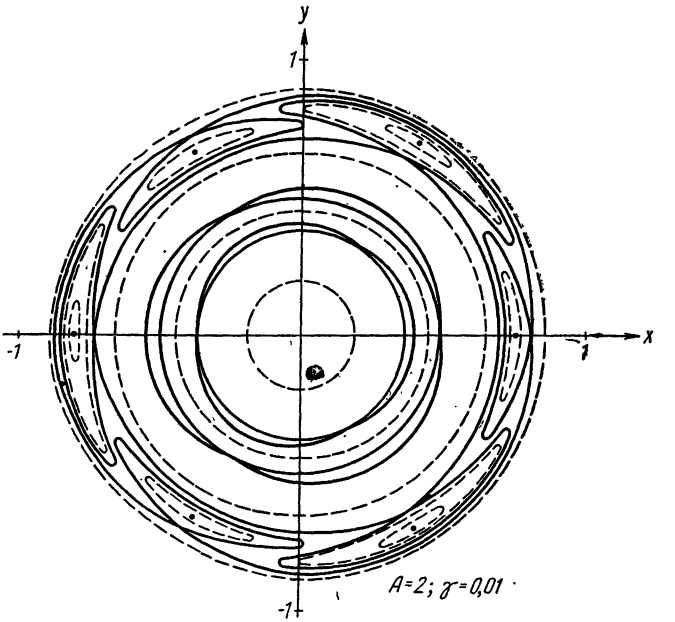
где функции $a_1(s)$ и $a_3(s)$ соответственно равны

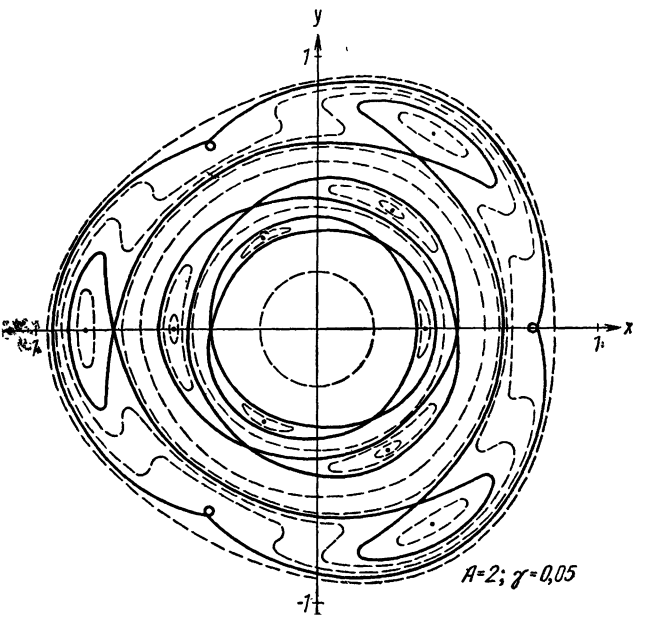
$$a_1 = A e^{-3is} + h; \quad a_3 = \frac{9}{16} A e^{-3is}. \qquad (10.102)$$

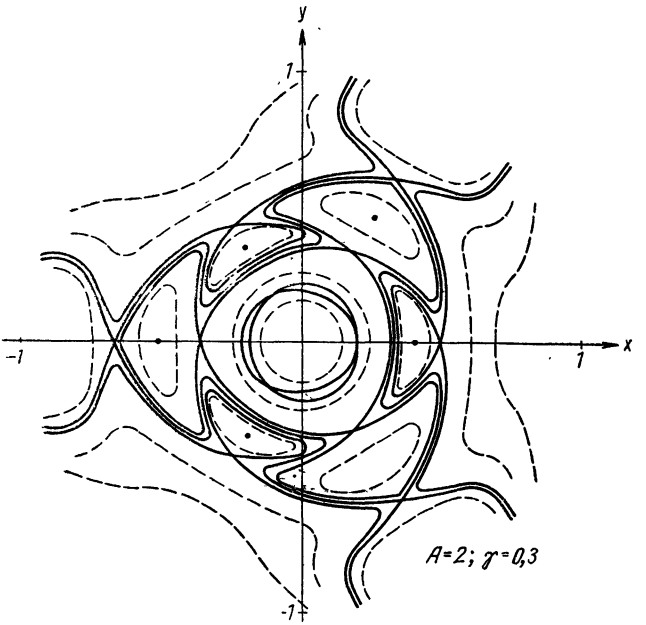
При такой записи потенциал (10.101) формально является частным случаем потенциала (10.79) при $B_0 = 1$. Рассматриваемая здесь конфигурация поля также является резонансной, и поэтому разложение поверхностной функции ψ по степеням ρ должно начинаться с члена порядка ρ^3. Аналогично выражению (10.80) представим ψ в виде

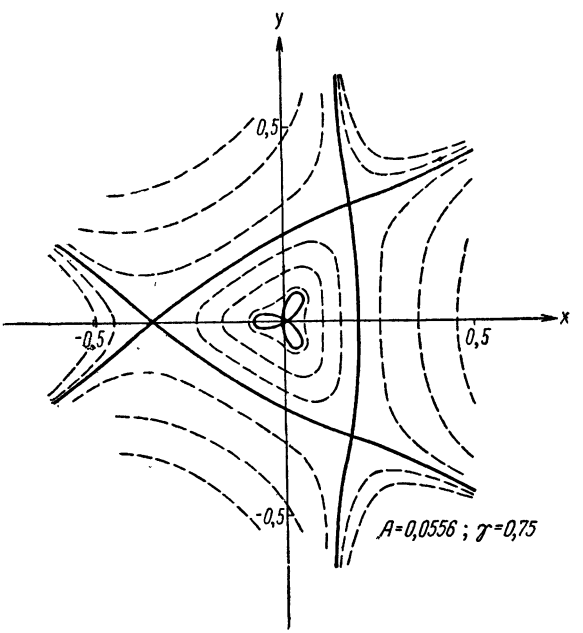
$$\psi = (\alpha_1 e^{3i\omega} + \alpha_1^* e^{-3i\omega})\rho^3 + \alpha_2\rho^4 + (\alpha_3 e^{3i\omega} + \alpha_3^* e^{-3i\omega})\rho^5 +$$
$$+ (\alpha_4 + \alpha_5 e^{6i\omega} + \alpha_5^* e^{-6i\omega})\rho^6 + (\alpha_6 e^{3i\omega} + \alpha_6^* e^{-3i\omega})\rho^7 + \cdots. \qquad (10.103)$$

Параметры $\alpha_i(s)$ можно определить из уравнения $\nabla\varphi\nabla\psi = 0$, приравняв коэффициенты при членах $\rho^3 e^{3i\omega}$, ρ^4, $\rho^5 e^{3i\omega}$, ρ^6, $\rho^6 e^{6i\omega}$, $\rho^7 e^{3i\omega}$. В результате


y
1
-1
1
x
-1
A=2; γ=0,01


y
1
x
1
-1
A=2; γ=0,05


y
1
-1
1
x
-1
A=2; γ=0,3


y
0,5
-0,5
0,5
x
-0,5
A=0,0556 ; γ=0,75

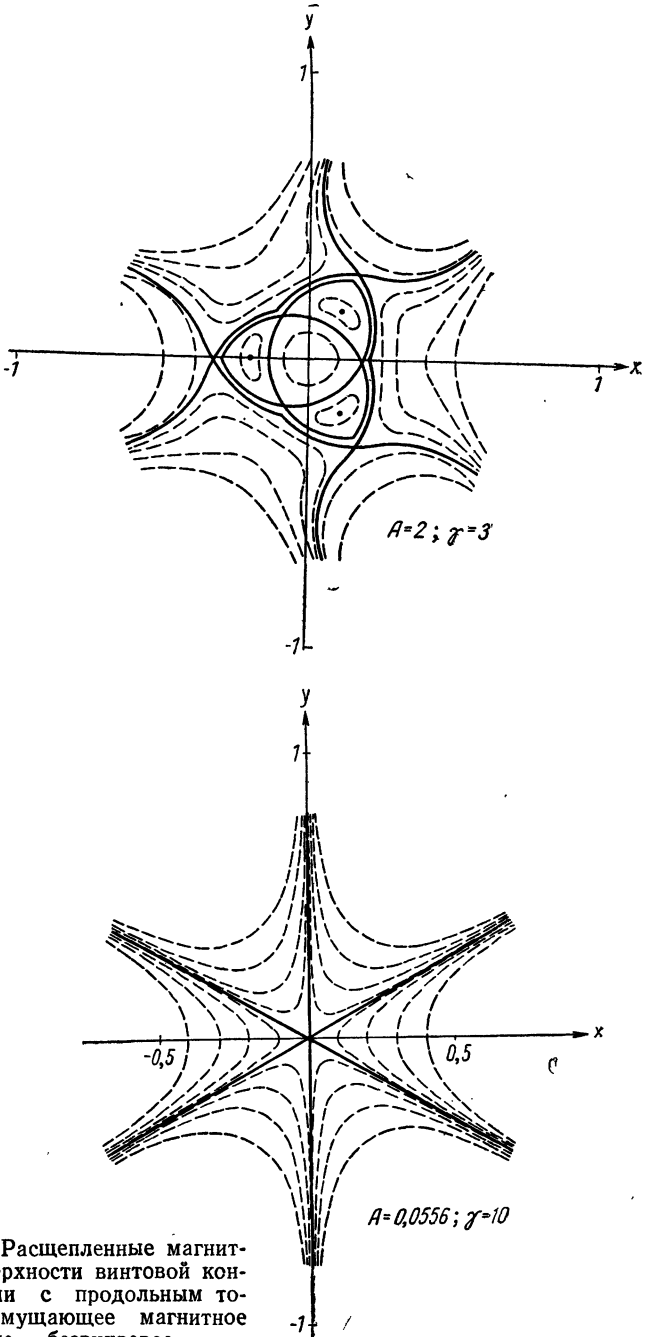


Рис. 26. Расщепленные магнитные поверхности винтовой конфигурации с продольным током. Возмущающее магнитное поле — безвихревое.

приходим к системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1' = 0;\\
&\alpha_2' = -18\left(a_1\alpha_1^* + a_1^*\alpha_1\right);\\
&\alpha_3' = -12a_1\alpha_2;\\
&\alpha_4' = -24\left(a_3\alpha_1^* + a_3^*\alpha_1 + a_1\alpha_3^* + a_1^*\alpha_3\right);\\
&\alpha_5' = -6\left(a_3\alpha_1 + a_1\alpha_3\right);\\
&\alpha_6' = -18\left(a_1\alpha_4 + 2a_1^*\alpha_5\right) - 20a_3\alpha_2 - a_1'\alpha_2'.
\end{aligned}\right\} \qquad (10.104)$$

Из условия разрешимости в периодических функциях уравнения для α_2 следует, что $\operatorname{Re}\alpha_1 = 0$. Положим $\alpha_1 = i$, тогда систему уравнений (10.104) при учете выражений (10.102) перепишем в виде

$$\alpha_2' = -18iA\left(e^{3is} - e^{-3is}\right);$$

$$\alpha_3' = -12\left(Ae^{-3is} + h\right)\alpha_2;$$

$$\alpha_4' = -24\left[\frac{9iA}{16}\left(e^{3is} - e^{-3is}\right) + \left(Ae^{-3is} + h\right)\alpha_3^* + \left(Ae^{3is} + h\right)\alpha_2\right]; \qquad (10.105)$$

$$\alpha_5' = -6\left[\frac{9iA}{16}e^{-3is} + \left(Ae^{-3is} + h\right)\alpha_3\right];$$

$$\alpha_6' = -18\left[\left(Ae^{-3is} + h\right)\alpha_4 + 2\left(Ae^{3is} + h\right)\alpha_5\right] +$$

$$+ 54A^2\left(1 - e^{-6is}\right) - \frac{45}{4}A^2e^{-3is}\alpha_2.$$

Проинтегрировав эти уравнения и определив константы из условия равенства нулю средних значений правых частей последующих уравнений, получим

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1 = i,\ \alpha_2 = 6\left(\frac{A^2}{h} - 2A\cos 3s\right);\\
&\alpha_3 = 24i\left[A^2 - \frac{A^3}{h}e^{-3is} - Ah\left(e^{3is} - e^{-3is}\right) + \frac{A^2}{2}e^{-6is}\right];\\
&\alpha_4 = \alpha_{40} - 288\left[\left(2A^3 + \frac{A}{32} - \frac{8Ah^2}{3}\right)\cos 3s - A^2h\cos 6s\right];\\
&\alpha_5 = \alpha_{50} + 24\left[\frac{3A}{64}e^{-3is} + 2Ah^2\left(e^{3is} + e^{-3is}\right) -\right.\\
&\left. - \left(\frac{A^4}{h} - \frac{3A^2h}{2}\right)e^{-6is} + \frac{A^3}{3}e^{-9is}\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (10.106)$$

Условие разрешимости уравнения для α_6 приводит к следующему соотношению для комбинации констант α_{40} и α_{50}:

$$\alpha_{40} + 2\alpha_{50} = \frac{288}{h}\left(A^4 + \frac{A^2}{32} - \frac{5A^2h^2}{3}\right). \qquad (10.107)$$

Невозможность определения обеих констант α_{40} и α_{50} порознь исходя из условий разрешимости уравнений для параметров $\alpha_i(s)$ связана с тем, что к функ-

ции ψ можно добавить величину ψ^2, умноженную на произвольную постоянную.

Некоторые ограничения на зависимость величин α_{40} и α_{50} от параметров A и h налагает рассмотрение предельных случаев $A \to 0$ и $h \to 0$. Действительно, запишем полученную поверхностную функцию ψ в виде

$$\psi = g_1\rho^3 + g_2\rho^4 + g_3\rho^5 + (g_4 + g_5)\rho^6 + \cdots \tag{10.108}$$

Тогда коэффициенты при степенях ρ будут соответственно равны

$$g_1 = -2\sin 3\omega;$$

$$g_2 = 6\left(\frac{A^2}{h} - 2A\cos 3s\right);$$

$$g_3 = 48\left[\frac{A^3}{h}\sin 3\theta - A^2\sin 3\omega + 2Ah\sin 3s\cos 3\omega - \frac{A^2}{2}\sin(3\omega - 6s)\right];$$

$$g_4 = \alpha_{40} - 288\left[\left(2A^3 + \frac{A}{32} - \frac{8Ah^2}{3}\right)\cos 3s - A^2h\cos 6s\right]; \tag{10.109}$$

$$g_5 = 2\alpha_{50}\cos 6\omega + 48\left[\frac{3A}{64}\cos(6\omega - 3s) + 4Ah^2\cos 3s\cos 6\omega - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{A^4}{h} - \frac{3A^2h}{2}\right)\cos 6\theta + \frac{A^3}{3}\cos(6\omega - 9s)\right],$$

где $\theta = \omega - s$. Для получения предельного случая при $h \to 0$ необходимо, чтобы $\alpha_{50}h \to 0$. Если потребовать, чтобы при $A \to 0$ получилось решение (10.100) без добавок типа $\text{const} \cdot \psi_2^2$, то в этом предельном случае $\alpha_{40} \to 0$, $\alpha_{50} \to 0$. Перечисленные ограничения выполняются, если определим α_{50}, потребовав равенства нулю среднего значения функции $\alpha_5(s)$. Тогда

$$\alpha_{50} = 0, \tag{10.110}$$

а константа α_{40} определяется равенством (10.107). При этом в предельном случае $A = 0$ получим выражение

$$\psi = -2\rho^3\sin 3\omega, \tag{10.111}$$

совпадающее с точным решением (10.100).

В другом предельном случае (при $h \to 0$) функция ψ получается равной

$$\psi = \frac{24A^2}{h}\left\{\frac{\rho^4}{4} + 2A\rho^5\sin 3\theta + \left(12A^2 + \frac{3}{8} - 2A^2\cos 6\theta\right)\rho^6 + \cdots\right\} \tag{10.112}$$

С принятой точностью это выражение можно представить в виде следующей функции от точного решения ψ_1, определяющегося формулой (10.99):

$$\psi = \frac{24A^2}{h}\{\psi_1^2 + (80A^2 + 3)\psi_1^3 + \cdots\} \tag{10.113}$$

В общем случае полученные магнитные поверхности представляют собой конфигурацию с трехлепестковой розеткой в окрестности $\rho = 0$, аналогичную конфигурации магнитных поверхностей при суперпозиции винтового и гофрированного полей в резонансном случае.

§ 11. РАВНОВЕСИЕ ПЛАЗМЫ В ТОРОИДАЛЬНЫХ ЛОВУШКАХ

Задачей теории равновесия плазмы в тороидальных магнитных ловушках является расчет токов в плазме и связанных с ними возмущений магнитного поля и магнитных поверхностей. Зна-

ние токов позволяет найти распределение электрического поля в ловушке и выяснить влияние параметров магнитной конфигурации на коэффициенты диффузии и теплопроводности. По возмущению магнитных поверхностей можно судить о предельном равновесном значении величины отношения давления плазмы к давлению магнитного поля $\beta = 8\pi p/B^2$ для данной ловушки. Решение задачи о равновесии плазмы в гидродинамическом приближении является также основой для исследования устойчивости плазмы в конкретных ловушках и для решения некоторых задач, связанных с кинетикой заряженных частиц.

Задачу о равновесии плазмы в ловушках можно решать методом возмущений при условии, если параметр β мал [2, 3]. За нулевое приближение принимается вакуумная конфигурация. В линейном по параметру β приближении находятся токи, соответствующие заданному распределению давления плазмы. По токам определяются поправки к вакуумному магнитному полю и затем искажение магнитных поверхностей.

1. Общие уравнения

Исходными для расчета служат уравнения равновесия:

$$\frac{1}{c}[\mathbf{jB}] = \nabla p; \tag{11.1}$$

$$\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} = \operatorname{rot}\mathbf{B}; \tag{11.2}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \tag{11.3}$$

Для описания магнитных поверхностей вводится функция $\psi(\mathbf{r})$, удовлетворяющая уравнениям

$$\mathbf{B}\nabla\psi = 0; \tag{11.4}$$

$$\mathbf{j}\nabla\psi = 0. \tag{11.5}$$

Давление плазмы, как следует из уравнений (11.1), (11.4) и (11.5), является функцией ψ:

$$p = p(\psi). \tag{11.6}$$

Положим

$$\mathbf{j} = cp'(\psi)\,\mathbf{j}_1; \tag{11.7}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1; \tag{11.8}$$

$$\psi = \psi_0 + \psi_1, \tag{11.9}$$

где $\mathbf{B}_0$ — вакуумное магнитное поле в отсутствие плазмы, а ψ_0 — функция вакуумных магнитных поверхностей. При этом вспомогательный вектор $\mathbf{j}_1$, согласно уравнениям (11.2), (11.5) и (11.7), так же как и $\mathbf{j}$, удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\operatorname{div}\mathbf{j}_1 = 0. \tag{11.10}$$

В линейном по давлению плазмы приближении получаем следующие уравнения для поправок $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{B}_1$, ψ_1:

$$[\mathbf{j}_1\mathbf{B}_0] = \nabla\psi_0; \tag{11.11}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}_1 = 4\pi p'(\psi_0)\,\mathbf{j}_1; \tag{11.12}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B}_1 = 0; \tag{11.13}$$

$$\mathbf{B}_1\nabla\psi_0 + \mathbf{B}_0\nabla\psi_1 = 0. \tag{11.14}$$

Из уравнения (11.11) можно найти поперечную относительно магнитного поля составляющую плотности тока. Суммарный вектор $\mathbf{j}_1$ выражается при этом следующим образом:

$$\mathbf{j}_1 = \mathbf{j}_\perp + \mathbf{j}_\parallel; \tag{11.15}$$

$$\mathbf{j}_\perp = \frac{[\mathbf{B}_0\nabla\psi_0]}{B_0^2}; \quad \mathbf{j}_\parallel = h\mathbf{B}_0. \tag{11.16}$$

Для функции h, характеризующей распределение продольного тока по сечению ловушки, из уравнения непрерывности (10.10) получается следующее магнитное дифференциальное уравнение:

$$\mathbf{B}_0\nabla h = -\operatorname{div}\frac{[\mathbf{B}_0\nabla\psi_0]}{B_0^2} = \frac{\mathbf{j}_\perp\nabla B_0^2}{B_0^2}. \tag{11.17}$$

Знание функции h позволяет найти с помощью закона Ома скалярный потенциал электрического поля $\mathbf{E} = -\nabla\varphi_E$, которое поддерживает продольный ток в ловушке. Уравнение для φ_E имеет аналогичную структуру с уравнением для h:

$$\mathbf{B}_0\nabla\varphi_E = -\frac{1}{\sigma_\parallel}(\mathbf{jB}) = -\frac{1}{\sigma_\parallel}hB_0^2. \tag{11.18}$$

Здесь $\sigma_\parallel$ — продольная электропроводность плазмы, которую можно обычно считать поверхностной функцией $\sigma_\parallel = \sigma_\parallel(\psi_0)$.

Оба уравнения (11.17) и (11.18) должны удовлетворять условиям разрешимости (10.18) и (10.19), рассмотренным в предыдущем параграфе. Правая часть уравнения (11.17) удовлетворяет первому из этих условий (10.18) автоматически, поскольку она представляет собой — $\operatorname{div}\mathbf{j}_\perp$.

Применение этого условия к уравнению (11.18) приводит к требованию

$$\int_{V_0}^{V_0+dV} hB_0^2 d\tau = 0, \tag{11.19}$$

которое, как можно показать (см. работы [3, 35]), соответствует условию равенства нулю суммарного продольного тока между двумя произвольными магнитными поверхностями

$$\delta J = \int j_s \rho d\rho d\omega = 0. \tag{11.20}$$

Этим требованиям можно удовлетворить за счет надлежащего выбора произвольной функции от ψ_0, входящей в общее решение уравнения (11.17) для h.

Второму условию разрешимости (10.19) уравнение типа (11.17) удовлетворяет, как видно из § 10, если вакуумные поверхности $\psi_0(\mathbf{r}) = \text{const}$ являются истинными магнитными поверхностями, т. е. если все замкнутые магнитные силовые линии, лежащие на одной магнитной поверхности, имеют одинаковую приведенную длину $\oint \frac{dl}{B_0} = U(\psi_0)$.

В общем случае правые части уравнений (11.17) и (11.18) имеют резонансные по отношению к вакуумным магнитным поверхностям гармоники, и условие разрешимости этих уравнений требует перенормировки функции ψ_0.

Условие разрешимости уравнения (11.18) требует наличия у функции h нулей на поверхностях $\Phi_0 = \Phi_{0mn}$:

$$h = \int h_0 \prod_{m,\,n} [m\mu(\Phi_0) - n]\, d\Phi_0, \tag{11.21}$$

а условие разрешимости уравнения (11.17) с учетом требования (11.21) приводит к необходимости следующего выбора поверхностной функции ψ_0, входящей в выражение для $\mathbf{j}_\perp$ в правой части уравнения (11.17):

$$\psi_0 = \int \prod_{m,\,n} [m\mu(\Phi_0) - n]^2\, d\Phi_0. \tag{11.22}$$

Отсюда можно заключить, что поверхности $p(\psi) = \text{const}$ при наличии резонансных возмущений должны иметь волокнистую структуру.

Отметим, что при решении задачи о равновесии плазмы в линейном приближении по кривизне системы трудностей с резонансами не возникает.

2. Выражение для плотности тока

Плотность тока, возникающего в плазме, помещенной в магнитную ловушку,

$$\mathbf{j} = c\frac{dp}{d\psi}(\mathbf{j}_\perp + h\mathbf{B}_0) \tag{11.23}$$

определяется двумя множителями: $p'(\psi)$ и $\mathbf{j}_1 = \mathbf{j}_\perp + h\mathbf{B}_0$,— один из которых связан с задаваемым распределением давления плазмы по магнитным поверхностям, а другой однозначно определяется по заданной вакуумной конфигурации. Второй множитель-вектор может быть найден поэтому в общем виде для произвольных конфигураций, если воспользоваться полученными ранее выражениями для вакуумного магнитного поля и магнитных по-

верхностей в виде разложения по степеням отклонения ρ от вакуумной магнитной оси.

Подставляя выражения для вакуумного поля и поверхностной функции в формулу (11.16) для $j_\perp$, получаем

$$j_{\perp\rho} = -\dot{g}_2\rho + (k\dot{g}_2\cos\theta - \dot{g}_3)\rho^2 + \ldots; \qquad (11.24)$$

$$j_{\perp\omega} = 2g_2\rho + (3g_3 - 2g_2 k\cos\theta)\rho^2 + \ldots; \qquad (11.25)$$

$$j_{\perp s} = \frac{2}{B_0}(A\dot{g}_2 - \dot{A}g_2)\rho^2 + \frac{1}{B_0}[2A\dot{g}_3 + 3B\dot{g}_2 - 2g_2\dot{B} - 3g_3\dot{A} - 4k(A\dot{g}_2 - \dot{A}g_2)]\rho^3 + \ldots \qquad (11.26)$$

При этом правая часть уравнения (11.17) принимает вид

$$\frac{\mathbf{j}_\perp \nabla B_0^2}{B_0^2} = -(2B_{0s}^2\dot{g}_2 k\cos\theta + 4B_{0s}^2 g_2 k\sin\theta)\rho + \{2g_2[-B_{0s}^2k^2\sin 2\theta + 2B_{0s}\dot{A}' + (8A + 2\ddot{A}) - \dot{g}_2[2B_{0s}^2k^2\cos^2\theta + 4B_{0s}A' + 8A^2 + 2\dot{A}^2] + 2B_{0s}^2 k\cos\theta(k\dot{g}_2\cos\theta - \dot{g}_3) + 2B_{0s}^2 k\sin\theta(2g_2 k\cos\theta - 3g_3) + 2(A\dot{g}_2 - \dot{A}g_2)(B_0^2)'\}\rho^2 + \ldots \qquad (11.27)$$

В этих формулах, как и ранее, точкой обозначается дифференцирование по ω, а штрихом — по s.

Будем рассматривать случай, когда плазма сосредоточена в приосевой области, далекой от сепаратрисы. Тогда в приведенном выражении достаточно удержать лишь первый член разложения по ρ, и уравнение (11.17) примет вид

$$\mathbf{B}_0\nabla h = -4ka[(1-\varepsilon)\cos\delta\sin u - (1+\varepsilon)\sin\delta\cos u]\rho. \qquad (11.28)$$

Напомним, что это уравнение есть следствие уравнения непрерывности электрического тока. Правая часть уравнения, совпадающая с $-\mathrm{div}\,\mathbf{j}_\perp$, описывает разделение зарядов из-за тороидального эффекта. При $\varepsilon \to 0$ выражение в квадратных скобках превращается в $\sin\theta$ и вся правая часть пропорциональна $y = \rho\sin\theta$, т. е. изменяется линейно в направлении бинормали к магнитной оси. Соответственно в этом направлении течет ток разделения зарядов. Левая часть уравнения, $\mathrm{div}\,\mathbf{j}_\parallel$, описывает замыкание тока разделения зарядов вдоль силовых линий магнитного поля. В раскрытом виде

$$\mathbf{B}_0\nabla h \equiv (2A\rho + 3B\rho^2 + \ldots)\frac{\partial h}{\partial\rho} + (\dot{A} + \dot{B}\rho + \ldots)\dot{h} + [B_{0s}(1 + k\rho\cos\theta) + \ldots]\frac{\partial h}{\partial s}. \qquad (11.29)$$

В рассматриваемом приближении разложения по ρ решение уравнения (11.29) имеет вид

$$h = h_1(u, s)\rho = [\lambda(s)\sin u + \mu(s)\cos u]\rho, \qquad (11.30)$$

где функции $\lambda(s)$ и $\mu(s)$ удовлетворяют следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\lambda' - \frac{1}{2}\left(\frac{B_{0s}'}{B_{0s}} - \eta'\right)\lambda - u'(1-\varepsilon)\mu = -\frac{4ka}{B_{0s}}(1-\varepsilon)\cos\delta; \qquad (11.31)$$

$$\mu' - \frac{1}{2}\left(\frac{B_{0s}'}{B_{0s}} + \eta'\right)\mu + u'(1+\varepsilon)\lambda = \frac{4ka}{B_{0s}}(1+\varepsilon)\sin\delta. \qquad (11.32)$$

Введением комплексной функции

$$\sigma_1 = B_{0s}^{-1/2}\left(\lambda e^{\eta/2} - i\mu e^{-\eta/2}\right) \qquad (11.33)$$

эта система уравнений сводится к стандартному уравнению (см. § 6)

$$\sigma_1' - iv'\sigma_1 = F_1, \qquad (11.34)$$

где

$$v(s) = \int_0^s u'\sqrt{1-\varepsilon^2}\,ds; \qquad (11.35)$$

$$F_1 = -4B_{0s}^{-3/2}ka\left[e^{\eta/2}(1-\varepsilon)\cos\delta + ie^{-\eta/2}(1+\varepsilon)\sin\delta\right]. \qquad (11.36)$$

Решение уравнения (11.34) удобно записать в виде разложения в ряд Фурье (см. § 9):

$$\sigma_1 = iL\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{F_{1l}}{v(L)-2\pi l}e^{iv(s)+i\left[\frac{2\pi l}{L}-\frac{v(L)}{L}\right]s}; \qquad (11.37)$$

$$F_{1l} = \frac{1}{L}\int_0^L F_1(s)e^{-iv(s)-i\left[\frac{2\pi l}{L}-\frac{v(L)}{L}\right]s}ds. \qquad (11.38)$$

Явные выражения для функций $\lambda(s)$, $\mu(s)$ легко получить для однородных конфигураций, характеризующихся условиями

$$B_{0s} = \text{const}; \quad \varepsilon = \text{const}; \quad u' = \text{const}. \qquad (11.39)$$

В этом случае $k\cos\delta$ и $k\sin\delta$ представляются в виде рядов Фурье, в которых амплитуда гармоник выражается через фурье-компоненты относительной кривизны магнитной оси [см. формулу (3.19)]. При этом

$$F_{1l} = -\frac{2a}{B_{0s}^{3/2}}\left[(1-\varepsilon)e^{\eta/2}\left(k_{n+l}+k_{n-l}^*\right) - (1+\varepsilon)e^{-\eta/2}\left(k_{n+l}-k_{n-l}^*\right)\right]. \qquad (11.40)$$

Если система имеет ось симметрии второго порядка (подобно конфигурациям, рассмотренным в задаче 2 к § 3), то при соответствующем выборе начала отсчета координаты s коэффициенты k_l будут вещественны. Функции $\lambda(s)$ и $\mu(s)$ в выражении (11.30) для h в этом случае представляются рядами:

$$\lambda(s) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \lambda_l \sin\frac{2\pi l}{L} s; \quad \mu(s) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mu_l \cos\frac{2\pi l}{L} s, \quad (11.41)$$

где

$$\lambda_l = \mu_l = \frac{4aL}{B_{0s}} \cdot \frac{2\pi l \varepsilon k_{n+l} + \{[\alpha(L) - 2\pi n](1-\varepsilon^2) - 2\pi l\} k_{n-l}}{4\pi^2 l^2 - [\alpha(L) - 2\pi n]^2 (1-\varepsilon^2)}. \quad (11.42)$$

Если вакуумная магнитная ось является винтовой линией или окружностью, то $k_l = 0$ при $l \neq 0$, так что отличны от нуля только коэффициенты $\lambda_l = \mu_l$ с $l = \pm n$. При этом

$$\lambda(s) = \Lambda \sin\frac{2\pi n}{L} s; \quad \mu(s) = M \cos\frac{2\pi n}{L} s, \quad (11.43)$$

где

$$\Lambda = \frac{4ka}{B_{0s}} \frac{u'(1+\varepsilon) + \delta'}{u'^2(1-\varepsilon^2) - \delta'^2}(1-\varepsilon); \quad (11.44)$$

$$M = \frac{4ka}{B_{0s}} \frac{u'(1-\varepsilon) + \delta'}{u'^2(1-\varepsilon^2) - \delta'^2}(1+\varepsilon). \quad (11.45)$$

3. Возмущения магнитного поля

Найденное выше выражение для продольного тока позволяет определить дополнительные поля, связанные с наличием плазмы. В наинизшем приближении разложения по ρ в s-компоненту плотности тока дает вклад только продольный ток, как это видно из формул (11.23)—(11.26) и (11.30):

$$j_s = c \frac{dp}{d\psi} B_{0s} [\lambda(s) \sin u + \mu(s) \cos u] \rho. \quad (11.46)$$

Уравнения (11.2) и (11.3) для магнитного поля в соответствующем приближении сводятся к системе уравнений:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho B_\omega)}{\partial\rho} - \frac{\partial B_\rho}{\rho \partial\omega} = \frac{4\pi}{c} j_s; \quad (11.47)$$

$$\frac{\partial(\rho B_\rho)}{\partial\rho} - \frac{\partial B_\omega}{\partial\omega} = 0. \quad (11.48)$$

Рассмотрим далее два случая: 1) эксцентриситет эллиптических сечений магнитных поверхностей в окрестности оси произвольный, $0 < \varepsilon < 1$, а давление p — линейная функция ψ; 2) эксцентриситет магнитных поверхностей мал, $\varepsilon \ll 1$, а распределение давления произвольное. В обоих случаях плотность тока j_s,

а следовательно, и обусловленные этим током компоненты B_ρ, B_ω магнитного поля зависят от ω как $\sin u$ и $\cos u$:

$$B_\rho = B_1 \sin u + B_2 \cos u; \tag{11.49}$$

$$B_\omega = \frac{d}{d\rho}(\rho B_1)\cos u - \frac{d}{d\rho}(\rho B_2)\sin u. \tag{11.50}$$

Амплитуды B_1, B_2 являются функциями ρ и зависят от s как от параметра. Зависимость от ρ определяется из уравнений:

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho^3 \frac{dB_1}{d\rho}\right) = 4\pi p' \rho^3 B_{0s}(s)\,\mu(s); \tag{11.51}$$

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho^3 \frac{dB_2}{d\rho}\right) = -4\pi p' \rho^3 B_{0s}(s)\,\lambda(s). \tag{11.52}$$

1. При $p'(\psi) = \text{const}$ находим

$$B_1 = \frac{\pi p'}{2} B_{0s}\mu(\rho^2 - c_1); \tag{11.53}$$

$$B_2 = -\frac{\pi p'}{2} B_{0s}\lambda(\rho^2 - c_2), \tag{11.54}$$

где c_1 и c_2 — константы интегрирования, которые должны определиться из граничных условий. Эти константы характеризуют однозаходное вакуумное магнитное поле, связанное с токами во внешних проводниках. Наряду с однозаходным полем необходимо предусмотреть возможность появления дополнительных гармоник вакуумного поля $\mathbf{B} = -\nabla\varphi$, связанного с индуцированными во внешних проводниках токами, которые могут потребоваться для удовлетворения необходимых граничных условий. Для задачи о равновесии плазмы в камере с эллиптическим сечением (см. следующий пункт) достаточно учесть дополнительное магнитное поле, описываемое скалярным потенциалом

$$\varphi = \frac{1}{6}(B_3 \sin 3u + B_4 \cos 3u)\rho^3. \tag{11.55}$$

2. При $\varepsilon \ll 1$ сечения магнитных поверхностей можно считать приближенно круглыми:

$$\psi_0 = B_0 a \rho^2. \tag{11.56}$$

В этом случае входящая в формулу для плотности тока (11.7) производная $p'(\psi)$ может быть заменена на $\frac{1}{2B_0 a\rho}\cdot\frac{dp_0}{d\rho}$. Уравнения (11.51) и (11.52) интегрируются один раз при произвольном распределении давления $p_0(\rho)$ и дают

$$\frac{dB_1}{d\rho} = \frac{2\pi}{a}\mu(s)\frac{p_0(\rho) - \langle p\rangle_\rho}{\rho}; \tag{11.57}$$

$$\frac{dB_2}{d\rho} = -\frac{2\pi}{a}\lambda(s)\frac{p_0(\rho) - \langle p\rangle_\rho}{\rho}, \tag{11.58}$$

где $\langle p \rangle_\rho$ — среднее значение давления в сечении радиусом ρ:

$$\langle p \rangle_\rho = \frac{1}{\pi\rho^2} \int_0^\rho p_0(\rho')\, 2\pi\rho' d\rho'. \qquad (11.59)$$

По этим формулам можно найти магнитное поле как внутри, так и вне плазменного шнура. Для определения внутреннего поля необходимо знать распределение давления $p_0(\rho)$. Внешнее поле выражается через среднее давление $\langle p \rangle_\rho$. Примем за радиус плазменного шнура ρ_0 радиус сечения некоторой магнитной поверхности, вне которой давление плазмы равно нулю: $p_0(\rho) = 0$ при $\rho \geqslant \rho_0$. Тогда

$$\langle p_0 \rangle_\rho = \langle p \rangle_{\rho_0} \frac{\rho_0^2}{\rho^2}.$$

Производя интегрирование уравнений (11.57) и (11.58), находим в этом случае

$$B_{1e}(\rho) = \frac{\pi\mu(s)}{a} \langle p \rangle_{\rho_0} \left(\frac{\rho_0^2}{\rho^2} - c_1 \right); \qquad (11.60)$$

$$B_{2e}(\rho) = -\frac{\pi\lambda(s)}{a} \langle p \rangle_{\rho_0} \left(\frac{\rho_0^2}{\rho^2} - c_2 \right). \qquad (11.61)$$

Константы интегрирования c_1, c_2, которые могут зависеть от s, должны определиться из граничных условий.

4. Магнитные поверхности при наличии плазмы

Поправка ψ_1 к поверхностной функции, связанная с наличием плазмы, определяется с помощью уравнения

$$\mathbf{B}_0 \nabla\psi_1 = -\mathbf{B}_1 \nabla\psi_0. \qquad (11.62)$$

В случае $p'(\psi) = \text{const}$, согласно формулам (11.53) и (11.54), возмущенное магнитное поле представляется в форме разложения по степеням ρ и отличается от вакуумного поля лишь тем, что поперечная компонента однозаходного поля содержит слагаемые, связанные с током и поэтому зависящие от ρ. Следовательно, как и в задаче о возмущении магнитных поверхностей вакуумным (безвихревым) магнитным полем (см. § 10), решение для поправки ψ_1 в объеме, занятом плазмой, можно искать в виде разложения в ряд по степеням ρ. Вне плазмы возмущенное магнитное поле представляется разложением по обратным степеням ρ. Однако и в этом случае решение уравнения (11.62) можно свести к стандартному методу разложения по степеням ρ путем соответствующей перенормировки нулевого решения ψ_0. Действительно, в качестве поверхностной функции можно вместо функции $\psi = \psi_0 + \psi_1$ взять любую ее степень:

$$\Psi = \psi^m = \Psi_0 + \Psi_1. \qquad (11.63)$$

Линеаризованное уравнение для Ψ:

$$B_0\nabla\Psi_1 = -\mathbf{B}_1\nabla\Psi_0 = -m\psi_0^{m-1}\mathbf{B}_1\nabla\psi_0. \qquad (11.64)$$

Как видно, выбором степени m можно всегда добиться того, чтобы правая часть уравнения не содержала отрицательных степеней ρ.

Исследуем условие равновесия плазмы в следующих двух ловушках, обладающих магнитной ямой: 1) в двухзаходном стелларатоpе с круговой осью; 2) в ловушках с пространственной магнитной осью. И в том и в другом случае будем считать конфигурации однородными, т. е. $B_0 = \text{const}$, $\varepsilon = \text{const}$, $\iota' = \text{const}$.

5. Равновесие плазмы в двухзаходном стелларатоpе

Рассмотрим задачу о равновесии плазмы в двухзаходном стелларатоpе с круговой магнитной осью и с профилированным идеально проводящим кожухом эллиптического сечения:

$$\rho^2 = \frac{\rho_0^2}{1+\varepsilon\cos 2u}. \qquad (11.65)$$

Если эллиптическое сечение кожуха проворачивается при продвижении вдоль оси s, то при наличии продольного поля внутри кожуха автоматически образуется конфигурация стелларатоpного типа. Будем считать $p'(\psi) = \text{const}$. В этом случае распределение давления плазмы описывается формулой

$$p = p_0\left(1 - \frac{\psi}{B_0 a\rho_0^2}\right) = 2\langle p\rangle\left(1 - \frac{\psi}{B_0 a\rho_0^2}\right). \qquad (11.66)$$

Здесь p_0 — давление плазмы на магнитной оси, а $\langle p\rangle = p_0/2$ — среднее (по сечению) давление плазмы.

Функция магнитных поверхностей ψ на поверхности кожуха должна удовлетворять условию

$$\psi\big|_S = B_0 a\rho_0^2 = \text{const}. \qquad (11.67)$$

При описании вакуумных магнитных поверхностей пренебрежем кривизной системы. При этом

$$\psi_0 = B_0 a\rho^2(1+\varepsilon\cos 2u). \qquad (11.68)$$

Очевидно, эта функция удовлетворяет условию (11.67).

Амплитуды возмущающего однозаходного поля (11.49) и (11.50), согласно формулам (11.53), (11.54), (11.66), представляются в виде

$$B_1 = -\frac{\pi\langle p\rangle}{a}\mu(s)\left(\frac{\rho^2}{\rho_0^2} - c_1\right); \qquad (11.69)$$

$$B_2 = \frac{\pi\langle p\rangle}{a}\lambda(s)\left(\frac{\rho^2}{\rho_0^2} - c_2\right). \qquad (11.70)$$

Положим, что функции B_3, B_4, входящие в выражение для дополнительного поля (11.55) третьей гармоники, пропорциональны соответственно $\mu(s)$ и $\lambda(s)$:

$$\left.\begin{aligned} B_3 &= B_0 u' b_3 \cos\delta; \\ B_4 &= B_0 u' b_4 \sin\delta. \end{aligned}\right\} \tag{11.71}$$

В рассматриваемом случае круговой оси функции $\mu(s)$ и $\lambda(s)$ определяются формулами (11.43)—(11.45), в которых следует положить $u' \equiv \delta'$, где $\delta = \frac{2\pi}{L} ns$

$$\lambda(s) = -\frac{4ka}{B_0\delta'} \frac{(2+\varepsilon)(1-\varepsilon)}{\varepsilon^2} \sin\delta; \tag{11.72}$$

$$\mu(s) = -\frac{4ka}{B_0\delta'} \cdot \frac{(2-\varepsilon)(1+\varepsilon)}{\varepsilon^2} \cos\delta. \tag{11.73}$$

Поправку ψ_1 к функции магнитных поверхностей ищем в виде

$$\psi_1 = B_0 a \{(\alpha_{10}\cos u + \alpha_{20}\sin u)\rho + (\alpha_1 \cos u + \alpha_2 \sin u + \alpha_3 \cos 3u + \alpha_4 \sin 3u)\rho^3\}. \tag{11.74}$$

Подставляя выражения для B_1, B_0, ψ_1, ψ_0 в уравнение (11.62) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ρ и одинаковых тригонометрических функциях $\sin u$, $\cos u$, $\sin 3u$, $\cos 3u$, получаем следующие шесть уравнений для параметров α_{10}, α_{20}, α_1, α_2, α_3, α_4:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha'_{10} + u'(1+\varepsilon)\alpha_{20} &= \frac{2\pi\langle p\rangle}{B_0 a}(1+\varepsilon)c_2\lambda(s); \\
\alpha'_{20} - u'(1-\varepsilon)\alpha_{10} &= -\frac{2\pi\langle p\rangle}{B_0 a}(1-\varepsilon)c_1\mu(s); \\
\alpha'_1 + u'(1+2\varepsilon)\alpha_2 + 3\varepsilon u'\alpha_4 &= \\
= -\frac{2\pi\langle p\rangle}{B_0 a\rho_0^2}(1+2\varepsilon)\lambda(s) &- \varepsilon b_4 \sin\delta; \\
\alpha'_2 - u'(1-2\varepsilon)\alpha_1 - 3\varepsilon u'\alpha_3 &= \\
= \frac{2\pi\langle p\rangle}{B_0 a\rho_0^2}(1-2\varepsilon)\mu(s) &- \varepsilon b_3 \cos\delta; \\
\alpha'_3 + 3u'\alpha_4 - \varepsilon u'\alpha_2 &= \frac{2\pi\langle p\rangle}{B_0 a\rho_0^2}\varepsilon\lambda(s) - b_4\sin\delta; \\
\alpha'_4 - 3u'\alpha_3 + \varepsilon u'\alpha_1 &= -\frac{2\pi\langle p\rangle}{B_0 a\rho_0^2}\varepsilon\mu(s) - b_3\cos\delta
\end{aligned}\right\} \tag{11.75}$$

Решение этой системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{10} &= \delta_1\cos\delta; \quad \alpha_{20} = \delta_2\sin\delta; \\ \alpha_1 &= \gamma_1\cos\delta; \quad \alpha_2 = \gamma_2\sin\delta; \\ \alpha_3 &= \gamma_3\cos\delta; \quad \alpha_4 = \gamma_4\sin\delta. \end{aligned}\right\} \tag{11.76}$$

Из граничного условия (11.67) получается связь между коэффициентами

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\gamma_3;\ \gamma_2 = \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\gamma_4; \\ \delta_1 &= -\frac{2\rho_0^2}{\varepsilon}\gamma_3;\ \delta_2 = -\frac{2\rho_0^2}{\varepsilon}\gamma_4. \end{aligned}\right\} \tag{11.77}$$

С учетом этой связи можно получить из уравнений (11.75) следующие значения параметров, характеризующих магнитные поля и магнитные поверхности:

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{2}{2+\varepsilon};\quad c_2 = \frac{2}{2-\varepsilon}; \\ b_3 &= \frac{3(2-\varepsilon)(1+\varepsilon)\varepsilon}{2+\varepsilon}kC;\quad b_4 = -\frac{3(2+\varepsilon)(1-\varepsilon)\varepsilon}{2-\varepsilon}kC; \end{aligned}\right\} \tag{11.78}$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma_3 &= -kC\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon(4-\varepsilon^2)}[(2+\varepsilon)^2+(1+\varepsilon)(2-\varepsilon)^2]; \\ \gamma_4 &= -kC\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon(4-\varepsilon^2)}[(2-\varepsilon)^2+(1-\varepsilon)(2+\varepsilon)^2]; \end{aligned}\right\} \tag{11.79}$$

остальные параметры γ_1, γ_2, δ_1, δ_2 связаны с γ_3, γ_4 соотношениями (11.77).

В приведенных формулах C — безразмерный параметр, пропорциональный давлению плазмы:

$$C = \frac{8\pi\langle p\rangle}{B_0^2\delta'^2\rho_0^2\varepsilon^2} = \frac{\beta R^2}{\varepsilon^2\rho_0^2 n^2}. \tag{11.80}$$

Наиболее простые формулы для функции ψ получаются в тех сечениях $s = \text{const}$, где полуоси эллипсов ориентированы по нормали к вакуумной магнитной оси (совпадающей с осью кожуха).

а) При $\sin\delta = 0$ (большая полуось эллипса перпендикулярна главной нормали к оси камеры)

$$\psi = B_0 a\left\{x^2(1+\varepsilon)+y^2(1-\varepsilon) - \right.$$

$$\left. -\frac{2\rho_0^2}{\varepsilon}\gamma_3 x + 2\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\gamma_3 x^3 + 2\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\gamma_3 x y^2\right\}, \tag{11.81}$$

где

$$x = \rho\cos\omega;\quad y = \rho\sin\omega.$$

Приравнивая к нулю производные функции ψ по x и y, находим новое положение магнитной оси. Координаты магнитной оси в рассматриваемом сечении определяются уравнениями:

$$x_1^2 - \frac{\varepsilon}{3|\gamma_3|}x_1 - \frac{\rho_0^2}{3(1+\varepsilon)} = 0;\quad y_1 = 0. \tag{11.82}$$

При достаточно малом β $\left(\text{когда } \beta \ll \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{n^2\varepsilon^4\rho_0}{R}\right)$ получим

$$x_1 = -\frac{\rho_0^2|\gamma_3|}{\varepsilon(1+\varepsilon)} = -\frac{R\beta}{n^2\varepsilon^4}\frac{1-\varepsilon}{4-\varepsilon^2}[(2+\varepsilon)^2+(1+\varepsilon)(2-\varepsilon)^2]. \quad (11.83)$$

б) При $\cos\delta = 0$ (большая ось эллипса ориентирована вдоль главной нормали к оси камеры)

$$\psi = B_0 a\left\{x^2(1-\varepsilon)+y^2(1+\varepsilon)-\frac{2\rho_0^2}{\varepsilon}\gamma_4 x+2\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\gamma_4 x^3+\right.$$
$$\left.+2\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\gamma_4 x y^2\right\}. \quad (11.84)$$

Координаты магнитной оси определяются уравнениями

$$x_2^2-\frac{\varepsilon}{3|\gamma_4|}x_2-\frac{\rho_0^2}{3(1-\varepsilon)}=0; \quad y_2=0. \quad (11.85)$$

При достаточно малом β получим

$$x_2 = -\frac{\rho_0^2|\gamma_4|}{\varepsilon(1-\varepsilon)} = -\frac{R\beta}{n^2\varepsilon^4}\frac{1+\varepsilon}{4-\varepsilon^2}[(2-\varepsilon)^2+(1-\varepsilon)(2+\varepsilon)^2]. \quad (11.86)$$

Из условия малости искажения магнитных поверхностей $|x_1| \sim |x_2| \ll \rho_0$ получается следующее ограничение на параметр β при малом эксцентриситете эллиптического сечения:

$$\beta \ll \frac{\rho_0}{2R}n^2\varepsilon^4 = \frac{2\rho_0}{R}\left(\frac{\iota}{2\pi}\right)^2. \quad (11.87)$$

6. Равновесие плазмы в ловушках с пространственной магнитной осью

При рассмотрении условий равновесия плазмы в двухзаходном стеллараторе с профилированным сечением идеально проводящего кожуха предполагалось, что плазма простирается до самой поверхности кожуха. Рассмотрим теперь несколько иную постановку задачи о равновесии, которая, по-видимому, больше соответствует условиям, осуществляющимся в экспериментах. Предположим, что плотность тока равна нулю вне некоторой тороидальной магнитной поверхности, находящейся целиком внутри камеры. Эту магнитную поверхность условно можно назвать границей плазменного шнура. Задача о равновесии сводится к нахождению зависимости положения и формы этой границы от среднего давления внутри плазменного шнура. При решении этой задачи для ловушек с пространственной магнитной осью ограничимся случаем малого эксцентриситета сечений магнитных поверхностей, когда $\varepsilon \ll 1$. Это ограничение позволяет найти решение при произвольном распределении давления плазмы.

Для решения задачи о положении плазменного шнура в ловушке достаточно найти положение внешних магнитных поверхностей. При $\varepsilon \ll 1$ возникающее при наличии плазмы однозаходное магнитное поле вне плазмы определяется формулами (11.49) и (11.50), (11.60) и (11.61):

$$\left.\begin{aligned} B_\rho &= B_{\rho_1} + B_{\rho_2};\\ B_{\rho_1} &= \frac{\pi\langle p\rangle \rho_0^2}{c_0}(\mu \sin u - \lambda \cos u)\frac{1}{\rho^2};\\ B_{\rho_2} &= \frac{\pi\langle p\rangle}{c_0}(c_2\lambda \cos u - c_1\mu \sin u). \end{aligned}\right\} \qquad (11.88)$$

Это поле содержит отрицательную степень ρ, и поэтому при нахождении магнитных поверхностей следует использовать перенормировку функции магнитных поверхностей [см. формулу (11.63)]. Положим

$$\left.\begin{aligned} \Psi &= \psi_0^2 + \Psi_1;\\ \Psi_1 &= g_0 + g_1\psi_0. \end{aligned}\right\} \qquad (11.89)$$

При $\varepsilon \ll 1$ в качестве ψ_0 можно принять $\psi_0 = B_0 c_0 \rho_0^2$. Линеаризованное уравнение для Ψ_1 приводит к двум идентичным уравнениям для функций g_0 и g_1:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{B}_0 \nabla g_0 &= -2B_{\rho_1}\psi_0 \frac{d\psi_0}{d\rho} = B_0(q_{01}\cos u + q_{02}\sin u)\rho;\\ \mathbf{B}_0 \nabla g_1 &= -2B_{\rho_2}\frac{d\psi_0}{d\rho} = B_0(q_{11}\cos u + q_{12}\sin u)\rho; \end{aligned}\right\} \qquad (11.90)$$

где

$$\left.\begin{aligned} q_{01} &= 4\pi\langle p\rangle B_0 c_0 \rho_0^2 \lambda(s);\quad q_{11} = -4\pi\langle p\rangle c_2\lambda(s);\\ q_{02} &= -4\pi\langle p\rangle B_0 c_0 \rho_0^2 \mu(s);\quad q_{12} = 4\pi\langle p\rangle c_1\mu(s), \end{aligned}\right\} \qquad (11.91)$$

а функции $\lambda(s)$, $\mu(s)$, согласно формулам (11.41) и (11.42), представляются разложениями:

$$\lambda(s) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \lambda_l \sin\frac{2\pi l}{L}s;\quad \mu(s) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \lambda_l \cos\frac{2\pi l}{L}s. \qquad (11.92)$$

Функции g_0, g_1 ищем в виде

$$\left.\begin{aligned} g_0 &= (g_{01}\cos u + g_{02}\sin u)\rho;\\ g_1 &= (g_{11}\cos u + g_{12}\sin u)\rho. \end{aligned}\right\} \qquad (11.93)$$

Для g_{01} и g_{02} получаем уравнения:

$$\left.\begin{aligned} g'_{01} + u'(1+\varepsilon)g_{02} &= q_{01};\\ g'_{02} - u'(1-\varepsilon)g_{01} &= q_{02}. \end{aligned}\right\} \qquad (11.94)$$

Решение этих уравнений представляется следующими рядами Фурье:

$$\left.\begin{aligned} g_{01} &= 4\pi \langle p \rangle B_0 c_0 \rho_0^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{u'(1+\varepsilon)+2\pi l/L}{u'^2(1-\varepsilon^2)-(2\pi l/L)^2} \lambda_l \cos\frac{2\pi l}{L} s; \\ g_{02} &= 4\pi \langle p \rangle B_0 c_0 \rho_0^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{u'(1-\varepsilon)+2\pi l/L}{u'^2(1-\varepsilon^2)-(2\pi l/L)^2} \lambda_l \sin\frac{2\pi}{L} s \end{aligned}\right\} \quad (11.95)$$

Аналогичную форму имеет решение уравнений для g_{11} и g_{12}:

$$\left.\begin{aligned} g_{11} &= -4\pi \langle p \rangle \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{c_1 u'(1+\varepsilon)+c_2 2\pi l/L}{u'^2(1-\varepsilon^2)-(2\pi l/L)^2} \lambda_l \cos\frac{2\pi l}{L} s; \\ g_{12} &= -4\pi \langle p \rangle \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{c_2 u'(1-\varepsilon)+c_1 2\pi l/L}{u'^2(1-\varepsilon^2)-(2\pi l/L)^2} \lambda_l \sin\frac{2\pi l}{L} s. \end{aligned}\right\} \quad (11.96)$$

Подставляя найденные значения функций g_0 и g_1 в выражение для Ψ_1, находим искомое решение. Константы c_1 и c_2 определяются из граничных условий. Пусть плазменный шнур находится внутри идеально проводящего кожуха. При $\varepsilon \ll 1$ сечение кожуха приближенно является кругом $\rho = \rho_1$. В этом случае из условия $\psi = \text{const}$ при $\rho = \rho_1$ находим

$$c_1 = c_2 = \rho_0^2/\rho_1^2. \quad (11.97)$$

Полное решение с учетом условия $\varepsilon \ll 1$ представляется в виде

$$\Psi = c_0^2 B_0^2 \left\{ \rho^4 + 2\beta\rho_0^2\rho \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_1^2}\right) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{(u'+2\pi l/L)^2 k_{n-l}}{[u'^2(1-\varepsilon^2)-(2\pi l/L)^2]^2} \times \right.$$

$$\left. \times \cos\left(u' - \frac{2\pi l}{L} s\right) \right\}. \quad (11.98)$$

Напомним, что

$$u = \omega + \frac{2\pi n - \alpha(L)}{L} s; \quad u' = \frac{2\pi n - \alpha(L)}{L}.$$

Ввиду резонансного характера отдельных слагаемых в сумме по l в знаменателях сохранено малое слагаемое ε^2. Уравнение поверхности плазменного шнура $\Psi = c_0^2 B_0^2 \rho_0^4$ можно записать как

$$\rho = \rho_0 - \Delta(u, s). \quad (11.99)$$

В предположении $\Delta(u, s) \ll \rho_0$ получаем

$$\Delta = \frac{\beta}{2}\left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho_1^2}\right) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{(u'+2\pi l/L)^2 k_{n-l}}{[u'^2(1-\varepsilon^2)-(2\pi l/L)^2} \cos\left(u - \frac{2\pi l}{L} s\right). \quad (11.100)$$

При $n = 0$ и $\varepsilon = 0$ получается формула для смещения плазменного шнура в тороидальных камерах с пространственной осью при наличии одного только продольного поля

$$\Delta = \frac{\beta}{2}\left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho_1^2}\right)\sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{k_l L^2}{[\alpha(L) - 2\pi l]^2} \cos\left(\theta + \frac{2\pi l}{L} s\right). \quad (11.101)$$

В частности, если ось является винтовой линией, то $k_l = 0$ при $l \neq 0$ и $\Delta = \Delta_0 \cos\theta$, где Δ_0 — величина смещения в направлении, противоположном главной нормали к оси:

$$\Delta_0 = \frac{k_0}{2\varkappa_0^2}\beta\left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho_1^2}\right) = \frac{k_0 (L/2\pi)^2}{2\mu_0^2}\beta\left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho_1^2}\right). \quad (11.102)$$

Здесь k_0 и $\varkappa_0$ — кривизна и кручение магнитной оси.

В полученных выше формулах для Ψ и Δ можно сделать переход и к двухзаходному стелларатору с плоской магнитной осью. Рассмотрим, например, выражение для смещения плазменного шнура в двухзаходном стелларараторе с круговой магнитной осью радиуса $R = 1/k_0$. В этом случае $k_{n-l} = 0$ при $n \neq l$, а $u - \frac{2\pi n}{L} s = \omega$. Выражение для Ψ принимает вид

$$\Psi = c_0^2 B_0^2 \left\{\rho^4 + \frac{2\beta\rho_0^2 R}{\mu_0^2}\rho\left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_1^2}\right)\cos\omega\right\}. \quad (11.103)$$

Здесь μ_0 — значение производной поперечного потока по продольному при $\varepsilon \ll 1$

$$\mu_0 = n\varepsilon^2/2. \quad (11.104)$$

Уравнение поверхности плазменного шнура можно записать в виде

$$\rho = \rho_0 - \Delta_0 \cos\omega, \quad (11.105)$$

где Δ_0 — смещение плазменного шнура наружу от центра кривизны

$$\Delta_0 = \frac{R\beta}{2\mu_0^2}\left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho_1^2}\right). \quad (11.106)$$

7. Равновесие плазмы при наличии продольного тока

Рассмотрим теперь равновесие плазменного шнура, ось которого является пространственной кривой с кривизной $k(s)$ и кручением $\varkappa(s)$ при наличии продольного тока. Предположим, что внешнее магнитное поле чисто продольное (магнитный потенциал $\varphi = B_0 s$) и сечение плазменного шнура представляет собой

круг. Под радиусом шнура a будем понимать радиус сечения некоторой внешней магнитной поверхности, вне которой плотность тока пренебрежимо мала.

Использованный выше метод решения задачи о равновесии круглого плазменного шнура с продольным током путем разложения по параметру β не применим, так как в нулевом приближении этого метода, т. е. при $\beta = 0$, конфигурация может не иметь магнитных поверхностей (если $\varkappa = 0$). Поэтому ниже применяется метод разложения по кривизне [18].

Исходными для расчета служат уравнения равновесия (11.1)—(11.3).

Распишем эту систему уравнений в компонентах, взяв вместо ω- и s-компонент векторного уравнения (11.1) эквивалентные уравнения $\mathbf{B}\nabla p = 0$ и $\mathbf{j}\nabla p = 0$:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{1}{c}(j_\omega B_s - j_s B_\omega); \tag{11.107}$$

$$B_\rho \frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{B_\omega}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial \omega} + B_s \frac{1}{1 - k\rho\cos\theta} \frac{\partial p}{\partial s} = 0; \tag{11.108}$$

$$j_\rho \frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{j_\omega}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial \omega} + j_s \frac{1}{1 - k\rho\cos\theta} \frac{\partial p}{\partial s} = 0; \tag{11.109}$$

$$\frac{4\pi}{c} j_\rho = \frac{1}{1 - k\rho\cos\theta} \left\{ \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} [(1 - k\rho\cos\theta) B_s] - \frac{\partial B_\omega}{\partial s} \right\}; \tag{11.110}$$

$$\frac{4\pi}{c} j_\omega = \frac{1}{1 - k\rho\cos\theta} \left\{ \frac{\partial B_\rho}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial \rho} [(1 - k\rho\cos\theta) B_s] \right\}; \tag{11.111}$$

$$\frac{4\pi}{c} j_s = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\omega) - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial B_\rho}{\partial \omega}; \tag{11.112}$$

$$\frac{1}{\rho(1 - k\rho\cos\theta)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} [(\rho - k\rho^2\cos\theta) B_\rho] + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial \omega} [(1 - k\rho\cos\theta) B_\omega] + \rho \frac{\partial B_s}{\partial s} \right\} = 0. \tag{11.113}$$

Положим

$$\left.\begin{aligned} p &= p_0(\rho) + p_1(\rho, \omega, s); \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0(\rho) + \mathbf{B}_1(\rho, \omega, s); \\ \mathbf{j} &= \mathbf{j}_0(\rho) + \mathbf{j}_1(\rho, \omega, s), \end{aligned}\right\} \tag{11.114}$$

где

$$\left.\begin{aligned} & p_0(\rho); \\ & \mathbf{B}_0(\rho) = \mathbf{B}_{\omega 0}(\rho)\,\mathbf{e}_\omega + B_{s0}(\rho)\,\mathbf{e}_s; \\ & \mathbf{j}_0(\rho) = \mathbf{j}_{\omega 0}(\rho)\,\mathbf{e}_\omega + j_{s0}(\rho)\,\mathbf{e}_s. \end{aligned}\right\} \tag{11.115}$$

решение уравнений равновесия в нулевом приближении [т. е. при $k(s) = 0$]. Нулевое приближение соответствует цилиндрически

симметричному распределению, для которого, как известно, справедливо следующее уравнение баланса давлений:

$$8\pi [\langle p_0(\rho)\rangle - p_0(a)] + \langle B_{s0}^2(\rho)\rangle = B_{s0}^2(a) + B_{\omega 0}^2(a), \quad (11.116)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \langle p_0(\rho)\rangle &= \frac{1}{\pi a^2}\int_0^a p_0(\rho)\,2\pi\rho d\rho; \\ \langle B_{s0}^2(\rho)\rangle &= \frac{1}{\pi a^2}\int_0^a B_{s0}^2(\rho)\,2\pi\rho d\rho. \end{aligned}\right\} \quad (11.117)$$

Поправки, связанные с кривизной, выразим по аналогии с формулой (3.17) в виде

$$p_1(\rho, \omega, s) = \mathrm{Re}\sum_n p_n(\rho)\exp[i(\omega - \varkappa_n s)]; \quad (11.118)$$

$$\mathbf{B}_1(\rho, \omega, s) = \mathrm{Re}\sum_n \mathbf{B}_n(\rho)\exp[i(\omega - \varkappa_n s)]; \quad (11.119)$$

$$\mathbf{j}_1(\rho, \omega, s) = \mathrm{Re}\sum_n \mathbf{j}_n(\rho)\exp[i(\omega - \varkappa_n s)]. \quad (11.120)$$

В первом приближении разложения по кривизне сечения магнитных поверхностей остаются кругами, но со смещенными центрами. Уравнение магнитной поверхности с радиусом сечения ρ', давление плазмы на которой равно $p_0(\rho')$, в первом приближении можно записать как:

$$\rho = \rho' + \xi(\rho', \omega, s) = \rho' + \mathrm{Re}\sum_n \xi_n(\rho')\exp[i(\omega - \varkappa_n s)]. \quad (11.121)$$

По определению, давление плазмы на этой поверхности $p(\rho' + \xi, \omega, s) = p_0(\rho')$. Разлагая левую часть этого уравнения $p(\rho' + \xi, \omega, s) = p_0(\rho') + p_1(\rho', \omega, s) + \xi(\rho, \omega, s)dp_0/d\rho + \ldots$, находим в линейном приближении связь смещения с поправкой к давлению

$$p_1(\rho, \omega, s) = -\xi(\rho, \omega, s)\,dp_0/d\rho. \quad (11.122)$$

Линеаризуя теперь уравнения (11.107)—(11.113), получаем систему уравнений для фурье-компонент давления, магнитного поля, плотности тока и смещения:

$$\frac{dp_n}{d\rho} = \frac{1}{c}(j_{\omega 0}B_{sn} - j_{s0}B_{\omega n} + j_{\omega n}B_{s0} - j_{sn}B_{\omega 0}); \quad (11.123)$$

$$B_{\rho n} = i\frac{\xi_n}{\rho}(B_{\omega 0} - \varkappa_n \rho B_{s0}); \quad (11.124)$$

$$j_{\rho n} = i\frac{\xi_n}{\rho}(j_{\omega 0} - \varkappa_n \rho j_{s0}); \quad (11.125)$$

$$\varkappa_n \rho B_{\omega n} + B_{sn} = k_n \rho B_{s0} + \xi_n(j_{\omega 0} - \varkappa_n \rho j_{s0})\,4\pi/c; \quad (11.126)$$

$$j_{\omega n} - \varkappa_n \rho j_{sn} = k_n \rho j_{\omega 0} - \frac{d}{d\rho}[\xi_n (j_{\omega 0} - \varkappa_n \rho j_{s0})]; \qquad (11.127)$$

$$\frac{4\pi}{c} j_{sn} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d(\rho B_{\omega n})}{d\rho} - \frac{i}{\rho} B_{\rho n}; \qquad (11.128)$$

$$B_{\omega n} - \varkappa_n \rho B_{sn} = k_n \rho B_{\omega 0} - \frac{d}{d\rho}[\xi_n (B_{\omega 0} - \varkappa_n \rho B_{s0})]. \qquad (11.129)$$

Здесь для получения уравнения (11.127) вместо уравнения (11.111) использовано уравнение $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$.

Из уравнений (11.123), (11.126), (11.129) и (11.127) находим связь компонент магнитного поля $B_{\omega n}$, B_{sn} и плотности тока $j_{\omega n}$, j_{sn} со смещением ξ_n и производной от смещения $d\xi_n/d\rho$:

$$B_{\omega n} = -\frac{4\pi}{c} j_{s0} \xi_n + \frac{1}{1 + \varkappa_n^2 \rho^2} \left\{ \left(k_n \rho + \frac{\xi_n}{\rho} \right) (B_{\omega 0} + \right.$$

$$\left. + \varkappa_n \rho B_{s0}) - (B_{\omega 0} - \varkappa_n \rho B_{s0}) \frac{d\xi_n}{d\rho} \right\}; \qquad (11.130)$$

$$B_{sn} = \frac{4\pi}{c} j_{\omega 0} \xi_n + \frac{1}{1 + \varkappa_n^2 \rho^2} \left\{ k_n \rho (B_{s0} - \varkappa_n \rho B_{\omega 0}) - \varkappa_n \xi_n (B_{\omega 0} + \right.$$

$$\left. + \varkappa_n \rho B_{s0}) + \varkappa_n \rho (B_{\omega 0} - \varkappa_n \rho B_{s0}) \frac{d\xi_n}{d\rho} \right\}; \qquad (11.131)$$

$$j_{sn} = -\xi_n \frac{dj_{s0}}{d\rho} + \frac{\varkappa_n \rho}{1 + \varkappa_n^2 \rho^2} (j_{\omega 0} - \varkappa_n \rho j_{s0}) \frac{d\xi_n}{d\rho} - \frac{k_n}{\varkappa_n} j_{\omega 0} -$$

$$- \varkappa_n \frac{\xi_n - k_n/\varkappa_n^2}{1 + \varkappa_n^2 \rho^2} \cdot \frac{(j_{\omega 0} - \varkappa_n \rho j_{s0})(B_{\omega 0} + \varkappa_n \rho B_{s0})}{B_{\omega 0} - \varkappa_n \rho B_{s0}}; \qquad (11.132)$$

$$j_{\omega n} = \xi_n \left(\varkappa_n j_{s0} - \frac{dj_{\omega_0}}{d\rho} \right) - \frac{j_{\omega 0} - \varkappa_n \rho j_{s0}}{1 + \varkappa_n^2 \rho^2} \frac{d\xi_n}{d\rho} -$$

$$- \varkappa_n^2 \rho \frac{\xi_n - k_n/\varkappa_n^2}{1 + \varkappa_n^2 \rho^2} \cdot \frac{(j_{\omega 0} - \varkappa_n \rho j_{s0})(B_{\omega 0} + \varkappa_n \rho B_{s0})}{B_{\omega 0} - \varkappa_n \rho B_{s0}}. \qquad (11.133)$$

При получении этих формул были использованы следующие соотношения, являющиеся следствием уравнений (11.1)—(11.3):

$$\frac{d}{d\rho} (B_{\omega 0} + \varkappa_n \rho B_{s0}) = \frac{4\pi}{c} (j_{s0} - \varkappa_n \rho j_{\omega 0}) - \frac{1}{\rho} (B_{\omega 0} - \varkappa_n \rho B_{s0}); \qquad (11.134)$$

$$c \frac{d^2 p_0}{d\rho^2} = -\frac{4\pi}{c} (j_{\omega 0}^2 + j_{s0}^2) + \frac{1}{\rho} j_{s0} B_{\omega 0} + B_{s0} \frac{dj_{\omega 0}}{d\rho} - B_{\omega 0} \frac{dj_{s0}}{d\rho}.$$

Подставляя теперь значения j_{sn}, $B_{\omega n}$, $B_{\rho n}$ в неиспользованную еще формулу (11.128), получаем следующее дифференци-

ального уравнение для смещения:

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d}{d\rho}\left[\rho\,\frac{(B_{\omega 0}-\varkappa_n\rho B_{s0})^2}{1+\varkappa_n^2\rho^2}\cdot\frac{d\xi_n}{d\rho}\right]+\frac{\varkappa_n^2\xi_n-k_n}{1+\varkappa_n^2\rho^2}\times$$

$$\times\left[2\,\frac{B_{\omega 0}^2-\varkappa_n^2\rho^2B_{s0}^2}{1+\varkappa_n^2\rho^2}-(B_{\omega 0}-\varkappa_n\rho B_{s0})^2-8\pi\rho\,\frac{dp_0}{d\rho}\right]=0. \qquad (11.135)$$

Это уравнение аналогично уравнению для возмущений в теории устойчивости цилиндрического плазменного шнура. Напомним, что при исследовании устойчивости цилиндрического плазменного шнура относительно возмущений вида $e^{i(m\omega+ks+\Omega t)}$ в предположении идеальной проводимости плазмы граница устойчивости определяется из условия $\Omega = 0$. При этом условии уравнения для возмущений совпадают с линеаризованными уравнениями равновесия. Уравнение для радиального смещения выглядит так:

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d}{d\rho}\left[\rho\,\frac{(mB_{\omega 0}+k\rho B_{s0})^2}{m^2+k^2\rho^2}\cdot\frac{d\xi_{m,k}}{d\rho}\right]+\frac{k^2\xi_{m,k}}{m^2+k^2\rho^2}\left[2\,\frac{m^2B_{\omega 0}^2-k^2\rho^2B_{s0}^2}{m^2+k^2\rho^2}-\right.$$

$$\left.-(mB_{\omega 0}+k\rho B_{s0})^2-8\pi\rho\,\frac{dp_0}{d\rho}-\frac{m^2-1}{k^2\rho^2}\,(mB_{\omega 0}+k\rho B_{s0})^2\right]=0. \qquad (11.136)$$

Как видно, при $k_n = 0$ уравнение (11.135) совпадает с уравнением (11.136), если в последнем положить $m = 1$ и $k = -\varkappa_n$. Кривизна в уравнении (11.135) играет роль внешней силы. Заметим, что частное решение неоднородного уравнения очень простое: $\xi_n = k_n/\varkappa_n^2$. Полагая

$$\xi_n = k_n/\varkappa_n^2 + \xi_n^0, \qquad (11.137)$$

получаем для ξ_n^0 однородное уравнение, совпадающее с уравнением (11.136) при $m = 1$, $k = -\varkappa_n$.

Если кривизна и угол поворота $\alpha(s) = \int_0^s \varkappa ds$ — плавные функции дуги s, то коэффициенты разложения относительной кривизны k_n быстро убывают с номером, так что в фурье-разложение всех тороидальных поправок основной вклад вносят члены с небольшим номером n. Ввиду этого можно считать выполненным условие

$$|\varkappa_n\rho| \ll 1. \qquad (11.138)$$

При этом условии в уравнении (11.135) следует опустить слагаемое $\varkappa_n^2\xi_n$, после чего уравнение один раз интегрируется:

$$\frac{d\xi_n}{d\rho} = k_n\rho\,\frac{G}{D}; \qquad (11.139)$$

$$G = 8\pi [\langle p_0 \rangle_\rho - p_0(\rho)] + \frac{1}{2}[\langle B_{\omega 0}^2 \rangle_\rho + 2\langle \varkappa_n \rho B_{\omega 0} B_{s0} \rangle_\rho - 3\langle \varkappa_n^2 \rho^2 B_{s0}^2 \rangle_\rho];$$

$$D = [B_{\omega 0}(\rho) - \varkappa_n \rho B_{s0}(\rho)]^2.$$

Для фурье-компоненты относительного смещения магнитных поверхностей с радиусами сечений a и b получаем

$$\xi_{\vartheta n} = k_n \int_b^a \rho \frac{G}{D} d\rho. \qquad (11.140)$$

В этих формулах $\langle p_0 \rangle_\rho$, $\langle B_{\omega 0}^2 \rangle_\rho$ и т. д.— средние по сечению радиуса ρ

$$\langle p_0 \rangle_\rho = \frac{1}{\pi\rho^2} \int_0^\rho p_0(\rho) 2\pi\rho d\rho = \frac{1}{\pi\rho^2} \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^\rho p(\rho, \omega, s)\, \rho d\rho \qquad (11.141)$$

и т. д.

Вычислим по формуле (11.140) смещение магнитной поверхности радиуса ρ относительно плазменного шнура радиуса a. Под радиусом шнура a будем понимать радиус сечения некоторой внешней магнитной поверхности, на которой плотность тока пренебрежимо мала. Тогда вне плазменного шнура ($\rho \geqslant a$) входящие в формулу (11.140) средние значения выразятся так:

$$\left.\begin{aligned}
\langle p_0 \rangle_\rho &= \langle p_0 \rangle_a a^2/\rho^2; \\
\langle B_{\omega 0}^2 \rangle_\rho &= \langle B_{\omega 0}^2 \rangle_a (a^2/\rho^2)[1 + 2\ln(\rho/a)]; \\
\langle \varkappa_n \rho B_{\omega 0} B_{s0} \rangle_\rho &= \{\langle \varkappa_n \rho B_{\omega 0} B_{s0} \rangle_a - \varkappa_n a B_{\omega 0}(a) B_{s0}(a)\} a^2/\rho^2 + \\
&\quad + \varkappa_n a B_{\omega 0}(a) B_{s0}(a); \\
\langle \varkappa_n^2 \rho^2 B_{s0}^2 \rangle_\rho &= \varkappa_n^2 B_{s0}^2(a) \rho^2/2 + \{\langle \varkappa_n^2 \rho^2 B_{s0}^2 \rangle_a - \\
&\quad - \varkappa_n^2 B_{s0}^2(a) a^2/2\} a^2/\rho^2.
\end{aligned}\right\} \qquad (11.142)$$

Последнее слагаемое здесь по порядку величины равно $\varkappa_n^2 \rho^2 (B_\omega^2/2 + 4\pi p)$. В соответствии с условием (11.138) это слагаемое нужно опустить. После подстановки выражений (11.139) в (11.140) интегрирование легко выполняется с использованием формулы

$$\int x \frac{\ln x - x^2/2\mu + 1/2}{(\mu - x^2)^2} dx = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{x^2 \ln x}{\mu - x^2}.$$

В результате получаем искомое смещение в виде

$$\xi_n = -\frac{3}{8} k_n b^2 \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) + \frac{k_n ab}{2\,[B_{\omega 0}(a) - \varkappa_n a B_{s0}]\,[B_{\omega 0}(b) - \varkappa_n b B_{s0}]} \times$$

$$\times \left\{\left(8\pi \langle p \rangle_a + \frac{\langle B_\omega^2 \rangle_a}{2} + \langle \varkappa_n \rho B_\omega B_s \rangle_a\right)\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) + B_{\omega 0}^2(a)\left[\ln \frac{b}{a} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)\right] - \varkappa_n a B_{s0} B_{\omega 0}(a)\left[\ln \frac{b}{a} + 1 - \frac{a^2}{b^2}\right]\right\}. \quad (11.143)$$

В случае отсутствия продольного тока ($B_{\omega 0} = 0$) из формулы (11.143) получаем

$$\xi_n = -\frac{3}{8} k_n \rho^2 \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2}\right) + \frac{k_n \beta}{2\varkappa_n^2}\left(1 - \frac{a^2}{\rho^2}\right). \quad (11.144)$$

Первое слагаемое определяет смещение вакуумных магнитных поверхностей (см. задачу 3 к § 4). Второе слагаемое определяет смещение магнитных поверхностей, обусловленное давлением плазмы, и совпадает с полученным другим методом в тех же условиях выражением (11.106).

В практически важном случае конфигурации с круговой магнитной осью радиусом R (система «Токамак»), когда $k_n = 0$ при $n \neq 0$, $k_0 = 1/R$, из формулы (11.143) получаем [29]

$$\xi(\rho) = \frac{\rho^2}{2R}\left\{\ln \frac{\rho}{a} + \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2}\right)\left(\frac{8\pi \langle p \rangle_a}{B_{\omega 0}^2(a)} + \frac{l_i - 1}{2}\right)\right\}, \quad (11.145)$$

где $l_i = \langle B_\omega^2 \rangle_a / B_\omega^2(a)$.

Если плазменный шнур находится в идеально проводящем кожухе радиуса $\rho = b$, то выражение для $\xi(b)$ определяет величину смещения центра сечения плазменного шнура относительно центра сечения кожуха.

Задача 1. Определить токи, возникающие в плазме, помещенной в m-заходный стелларатор с круговой магнитной осью (см. задачу 1 к § 4).

Решение. Плотность тока, возникающего в плазме, помещенной в ловушку, может быть записана в виде

$$\mathbf{j} = c\frac{[\mathbf{B}\nabla p]}{B^2} + h\mathbf{B} = cp'(\psi^{m-1})\left\{\frac{[\mathbf{B}\nabla\psi^{m-1}]}{B^2} + h_1\mathbf{B}\right\}. \quad (11.146)$$

Уравнение непрерывности тока $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$ приводит к следующему уравнению для h_1:

$$\mathbf{B}\nabla h_1 = \frac{[\mathbf{B}\nabla\psi^{m-1}]\,\nabla B^2}{B^4}. \quad (11.147)$$

В качестве аргумента давления p принята функция ψ^{m-1}. При таком выборе уравнение для h_1 имеет конечное при $\rho = 0$ решение. Основной вклад в ∇B^2 дает тороидальное продольное магнитное поле $B_s = B_0/(1 - k\rho\cos\omega)$. В остальных членах уравнения для $\mathbf{B}$ и ψ можно взять нулевое приближение, соответствующее стелларатору с прямой магнитной осью (влиянием кривизны на искажение формы вакуумных магнитных поверхностей пренебрегаем). Под-

ставляя в уравнение (11.147) значения $\mathbf{B}$ и ψ из задачи 1 к § 4, получаем уравнение

$$\frac{\partial h_1}{\partial s} + \varepsilon \frac{u' \rho^{m-1}}{\rho_S^{m-2}} \left[\sin mu \frac{\partial h_1}{\partial \rho} + \cos mu \frac{\partial h_1}{\rho \partial \omega} \right] = q \rho_\rho^{2m-3} \sin \omega, \quad (11.148)$$

где $q = -4(m-1)k$.

Решение этого уравнения, как нетрудно проверить, есть

$$h_1 = \frac{m \rho_S^{2m-3}}{(m-1)\varepsilon^2 u'} \left\{ \frac{\rho}{\rho_S} \cos \omega + \frac{\varepsilon}{m} \left(\frac{\rho}{\rho_S} \right)^{m-1} \cos (mu - \omega) \right\} q. \quad (11.149)$$

Таким образом, при $\varepsilon(\rho/\rho_S^m)^{-2} \ll 1$ плотность продольного тока $j_s = cp'(\psi^{m-1}) h_1$ дается следующим простым выражением:

$$j_s = -\frac{4cm^2}{\varepsilon^2 n} \rho_S^{2(m-2)} p'(\psi^{m-1}) \rho \cos \omega = -\frac{2cm^2}{\varepsilon^2 n (m-1)} \left(\frac{\rho_S}{\rho} \right)^{2(m-2)} \frac{dp}{d\rho} \cos \omega. \quad (11.150)$$

Поперечная составляющая плотности тока равна

$$j_\omega = 2(m-1) cp'(\psi^{m-1}) \rho^{2m-3}. \quad (11.151)$$

Задача 2. Определить искажение магнитных поверхностей, связанное с наличием плазмы, в m-заходном стелларатore с круговой магнитной осью [30].

Решение. Поперечные компоненты B_ρ, B_ω магнитного поля определяются с помощью s-компоненты уравнения $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ и уравнения $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, имеющих вид

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\omega) - \frac{\partial B_\rho}{\rho \partial \omega} = \frac{4\pi}{c} j_s; \quad \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho) + \frac{\partial B_\omega}{\rho \partial \omega} = 0. \quad (11.152)$$

Выражение для плотности тока j_s найдено в предыдущей задаче. Учитывая зависимость $j_s \sim \cos \omega$, получаем

$$B_\rho = B_1 \sin \omega; \qquad B_\omega = \frac{d(\rho B_1)}{d\rho} \cos \omega, \quad (11.153)$$

где B_1 определяется уравнением

$$\frac{dB_1}{d\rho} = -\frac{8\pi m^2 \rho_S^{2(m-2)}}{\varepsilon^2 n (m-1)} \cdot \frac{1}{\rho^3} \int_0^\rho \rho^{2(3-m)} \frac{dp}{d\rho} d\rho. \quad (11.154)$$

Для плазменного шнура радиусом ρ_1^0

$$B_1(\rho) = \left[C - \frac{m\beta}{\varepsilon^2 n} \left(\frac{\rho_S}{\rho_1} \right)^{2(m-2)} \frac{\rho_1^2}{\rho^2} \right] B_0, \quad (11.155)$$

где C — константа интегрирования, а β обозначает интеграл

$$\beta = -\frac{4\pi m}{(m-1) B_0^2} \int_0^{\rho_1} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{2(3-m)} \frac{dp}{d\rho} d\rho. \quad (11.156)$$

Для двухзаходного стелларатора ($m = 2$) $\beta = 8\pi \langle p \rangle / B_0^2$, где $\langle p \rangle$ — среднее по сечению давление плазмы; для трехзаходного стелларатора $\beta = 6\pi p(0)/B_0^2$.

Множитель перед интегралом выбран так, чтобы для простейшего распределения давления $p = p_0\left[1 - \left(\frac{\rho^2}{\rho_1^2}\right)^{2m-3}\right]$, при котором как уравнение непрерывности тока, так и уравнение для скалярного потенциала электрического поля $\sigma_{\parallel}(\mathbf{B}\nabla\varphi_E) = -hB^2$ имеют конечное при $\rho = 0$ решение, получилось бы $\beta = 8\pi\langle p\rangle/B_0^2$.

Новые магнитные поверхности при наличии плазмы $\Psi = \Psi_0 + \Psi_1$ найдем из линеаризованного уравнения $\mathbf{B}\nabla\Psi = 0$:

$$\mathbf{B}_0\nabla\Psi_1 = -\mathbf{B}_1\nabla\Psi_0 = -B_1(\rho)\frac{d\Psi_0}{d\rho}\sin\omega. \tag{11.157}$$

Положим

$$\left.\begin{aligned}\Psi_0 &= \psi_0^m;\\ \Psi_1 &= \psi_0 g_0 + g_1,\end{aligned}\right\} \tag{11.158}$$

тогда, учитывая, что $\mathbf{B}_0\nabla\psi_0 = 0$, получим вместо уравнения (11.157) при $\varepsilon(\rho/\rho_S)^{m-2} \ll 1$

$$\psi_0(\mathbf{B}_0\nabla g_0) + \mathbf{B}_0\nabla g_1 = -2mB_0\left[C\psi_0 - \frac{m\beta}{\varepsilon^2 n}\left(\frac{\rho_S}{\rho_1}\right)^{2(m-2)}\rho_1^2\right]^{2m-3}\sin\omega. \tag{11.159}$$

Это уравнение распадается на два уравнения для g_0 и g_1, совершенно идентичных уравнению (11.148). Решение легко находится из аналогии с уравнением (11.149). При $\varepsilon(\rho/\rho_s)^{m-1} \ll 1$

$$\Psi = \rho^{2m} + \frac{2(m-1)R\rho_1^{2(m-1)}}{\mu^2(\rho_1)}\beta\left(\rho - \frac{\rho^3}{\rho_1^2}\right)\cos\omega. \tag{11.160}$$

Константа выбрана из условия, что поверхность плазменного шнура определяется уравнением $\rho = \rho_1$, т. е. начало отсчета помещается в центре сечения плазменного шнура. Уравнение магнитных поверхностей вне плазменного шнура с радиусом сечения $\rho_2 > \rho_1$ можно записать в виде

$$\rho = \rho_2 + \xi(\rho_2)\cos\omega. \tag{11.161}$$

Подставляя это значение ρ в формулу для Ψ, получаем в линейном приближении по ξ из требования $\Psi = \text{const}$ на поверхности

$$\xi(\rho_2) = \frac{m-1}{m}\cdot\frac{R\beta}{\mu(\rho_1)\mu(\rho_2)}\left[1 - \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2}\right]. \tag{11.162}$$

Это выражение определяет величину расстояния между центрами сечений внешних магнитных поверхностей с радиусами ρ_1 и ρ_2. Если ρ_1 — радиус сечения плазменного шнура, а ρ_2 — радиус сечения кожуха, то $\xi(\rho_2)$ представляет собой смещение плазменного шнура наружу относительно кожуха. Условие малости этого смещения $\xi(\rho_2) \ll \rho_2$ определяет условие, которому должно подчиняться равновесное давление плазмы:

$$\beta \ll \mu(\rho_1)\mu(\rho_2)\frac{\rho_2}{R}. \tag{11.163}$$

§ 12. ВЛИЯНИЕ КРИВИЗНЫ НА КЛАССИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ДИФФУЗИИ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Как известно, в плазме, удерживаемой в равновесии магнитным полем, возникают различного вида неустойчивости, приводящие к увеличенным аномальным потокам частиц и тепла из

плазмы. Следует, однако, иметь в виду, что и классические, нетурбулентные, потоки в тороидальной геометрии могут значительно превышать те потоки, которые имелись бы в отсутствие неустойчивостей в цилиндрической геометрии. Основной механизм «классических» потерь частиц и тепла из плазмы в замкнутых конфигурациях связан с тороидальным дрейфом в продольном магнитном поле [31—34]. Как известно, неоднородность продольного поля

$$B_s = \frac{B_0}{1 - k\rho\cos\theta} \approx B_0(1 + k\rho\cos\theta) \qquad (12.1)$$

приводит к дрейфу частиц в направлении, перпендикулярном главной нормали к оси системы. В этом направлении создается поляризация плазмы и возникают электрическое поле и некоторый градиент температуры. Так как это электрическое поле и градиент температуры перпендикулярны основному, продольному магнитному полю, то возникают дрейфовые потоки частиц и тепла в направлении, противоположном главной нормали. Линии дрейфов частично замыкаются вдоль силовых линий магнитного поля. Однако интегральный поток через замкнутую тороидальную поверхность, ограничивающую конфигурацию, оказывается отличным от нуля. Величина поперечного электрического поля, вызывающего потери частиц в тороидальной конфигурации, зависит от продольной электропроводности плазмы. При идеальной электропроводности электрический потенциал на магнитной поверхности был бы постоянным и поляризация плазменного шнура в направлении, перпендикулярном главной нормали, не возникала бы. Следовательно и классические потери частиц в тороидальной геометрии зависят от продольной (а не от поперечной, как в цилиндрической геометрии) электропроводности. Точно так же возникающий в том же направлении градиент температуры поддерживается при наличии конечной теплопроводности плазмы вдоль магнитного поля. Следовательно, классические потери тепла в тороидальной геометрии зависят от коэффициента продольной, а не поперечной теплопроводности.

Для расчета потерь частиц и тепла в тороидальной геометрии необходимо найти нормальную к магнитной поверхности составляющую плотности дрейфового потока частиц и дрейфового потока тепла и проинтегрировать эти плотности потоков по всей магнитной поверхности. Проще поступить несколько иначе. Можно показать в общем виде, что дополнительный поток частиц из плазмы, обусловленный тороидальным дрейфом, связан с джоулевой диссипацией продольных токов (см. [3, 5, 35]). Суммарный эффективный классический коэффициент диффузии D может быть записан тогда в виде

$$D = D_0(1 + \xi), \qquad (12.2)$$

где D_0 — коэффициент диффузии в цилиндрической геометрии, а ξ — поправочный коэффициент, равный отношению энергий,

диссипируемых продольным и поперечным токами в объеме dV, заключенном между двумя бесконечно близкими магнитными поверхностями [32]:

$$\xi = \int\limits_{dV} (j_{\parallel}^2/\sigma_{\parallel})d\tau \Big/ \int\limits_{dV} (j_{\perp}^2/\sigma_{\perp})\, d\tau. \qquad (12.3)$$

В аналогичной форме можно записать и эффективный коэффициент поперечной теплопроводности

$$\varkappa_T = \varkappa_{\perp}(1 + \xi_T). \qquad (12.4)$$

Для определения коэффициента ξ_T заметим, что, как следует из общего выражения для потока тепла [36]

$$\mathbf{q} = -\varkappa_{\perp}\nabla_{\perp}T + \frac{5}{2}\frac{cnT}{ZeB^2}[\mathbf{B}\nabla T] - \varkappa_{\parallel}\frac{\mathbf{B}(\mathbf{B}\nabla T)}{B^2} \equiv \mathbf{q}_{\perp} + \mathbf{q}_{\wedge} + \mathbf{q}_{\parallel}, \qquad (12.5)$$

нормальная к поверхности $T = \text{const}$ его составляющая может быть записана в виде

$$q_n = \frac{q_{\perp}^2}{\varkappa_{\perp}|\nabla T|} + \frac{q_{\parallel}^2}{\varkappa_{\parallel}|\nabla T|}, \qquad (12.6)$$

где $q_{\perp} = -\varkappa_{\perp}\nabla_{\perp}T$ — поперечный, а $q_{\parallel} = -\varkappa_{\parallel}\frac{\mathbf{B}(\mathbf{B}\nabla T)}{B^2}$ — продольный по отношению к магнитному полю потоки тепла.

Усредняя выражение для q_n по поверхности $T = \text{const}$, получаем

$$\langle q_n \rangle = \frac{q_{\perp}^2}{\varkappa_{\perp}|\nabla T|}(1 + \xi_T) = \varkappa_{\perp}(1 + \xi_T)\nabla_{\perp}T = \varkappa_{\perp}\nabla_{\perp}T; \qquad (12.7)$$

где

$$\xi_T = \int \frac{q_{\parallel}^2 \delta S}{\varkappa_{\parallel}|\nabla T|} \Big/ \int \frac{q_{\perp}^2 \delta S}{\varkappa_{\perp}|\nabla T|} = \int\limits_{dV} \frac{q_{\parallel}^2}{\varkappa_{\parallel}} d\tau \Big/ \int\limits_{dV} \frac{q_{\perp}^2}{\varkappa_{\perp}} d\tau. \qquad (12.8)$$

При переходе от интеграла по поверхности к интегралу по объему слоя, заключенного между двумя бесконечно близкими поверхностями, учтено, что $\delta S/|\nabla T| = d\tau/dT$.

Таким образом, для нахождения коэффициента ξ_T необходимо определить величину $q_{\parallel}$ в тороидальной геометрии. Это можно сделать, если воспользоваться методом разложения по малому параметру $1/\omega_B\tau$, где $\omega_B = \frac{ZeB}{mc}$ — циклотронная частота зарядов данного сорта, а τ — среднее время между соударениями. Как известно, при $\omega_B\tau \gg 1$ поперечный, косой и продольный потоки сильно различаются по своей величине [36]:

$$q_{\parallel} : q_{\wedge} : q_{\perp} \sim 1 : \frac{1}{\omega_B\tau} : \frac{1}{\omega_B^2\tau^2}. \qquad (12.9)$$

Поэтому в нулевом приближении из уравнения переноса тепла следует, что $\operatorname{div} \mathbf{q}_{\parallel} = 0$, откуда вытекает, что в этом приближении температура отдельных сортов частиц, а следовательно, и плотность плазмы n являются поверхностными величинами $T_0 = T_0(\psi)$, $n_0 = n_0(\psi)$. Уравнение первого приближения

$$\operatorname{div}(\mathbf{q}_{\wedge}^{0} + \mathbf{q}_{\parallel}^{1}) = 0 \tag{12.10}$$

имеет точно ту же структуру, что и уравнение непрерывности электрического тока (11.10). Из сравнения выражений для $\mathbf{j}_{\perp}$ и $\mathbf{q}_{\wedge}$ нетрудно заключить, что $\mathbf{q}_{\wedge} = \frac{5}{2} \cdot \frac{n_0 T_0 T_0'(\psi)}{Zep_0'(\psi)} \mathbf{j}_{\perp}$, а следовательно, и

$$\mathbf{q}_{\parallel} = \frac{5}{2} \cdot \frac{n_0 T_0 T_0'}{Zep_0'} \mathbf{j}_{\parallel}. \tag{12.11}$$

Из выражений $\mathbf{q}_{\perp} = -\varkappa_{\perp} \nabla_{\perp} T^0 = -\varkappa_{\perp} \frac{T_0'}{p_0'} \nabla_{\perp} p^0$ и $\mathbf{j} = \frac{c}{B} \nabla_{\perp} p^0$ следует, что

$$\mathbf{q}_{\perp}^2 = \frac{\varkappa_{\perp}^2 B^2 T_0'^2}{c^2 p'^2} j_{\perp}^2. \tag{12.12}$$

Подставляя значения потоков $\mathbf{q}_{\parallel}$, $\mathbf{q}_{\perp}$, выраженных через электрические токи $\mathbf{j}_{\parallel}$, $\mathbf{j}_{\perp}$, в формулу для ξ_T и используя выражения для коэффициентов теплопроводности

$$\varkappa_{\parallel} = \alpha_{\parallel} \frac{nT\tau}{m}; \quad \varkappa_{\perp} = \alpha_{\perp} \frac{nT}{m\omega_B^2 \tau}, \tag{12.13}$$

где $\alpha_{\parallel}$ и $\alpha_{\perp}$ — численные коэффициенты, получаем

$$\xi_T = \frac{25\sigma_{\parallel}}{4\alpha_{\parallel}\alpha_{\perp}\sigma_{\perp}} \xi. \tag{12.14}$$

Например, для водородоподобной плазмы поправка к ионному коэффициенту теплопроводности составит ($\alpha_{\parallel} = 3{,}9$; $\alpha_{\perp} = 2$; $\sigma_{\parallel}/\sigma_{\perp} = 2$)

$$\xi_T = 1{,}6\xi. \tag{12.15}$$

Найденное выше (в § 11) выражение для $\mathbf{j}_{\parallel}$ позволяет рассчитать коэффициент ξ по формуле (12.3).

В наинизшем приближении разложения по ρ, согласно формуле (11.68), уравнение магнитных поверхностей

$$\rho^2 = \frac{\psi}{B_0 a(1 + \varepsilon \cos 2u)}. \tag{12.16}$$

Отсюда

$$d\tau = \frac{d\psi}{2B_0 a} \cdot \frac{d\omega/ds}{1 + \varepsilon \cos 2u}. \tag{12.17}$$

Подставляя выражения (11.23) — (11.26) и (11.30) для $j_\parallel = h_1 B_0 \rho$ и $j_\perp^2 = (4g_2^2 + g_2^2)\,\rho^2$ в формулу для ξ и производя интегрирование по ω, находим

$$\xi = \frac{\sigma_\perp}{c_0^2 \sigma_\parallel} \frac{\int_0^L \frac{B_0}{1-\varepsilon^2}\left[\lambda^2(1+\varepsilon) + \mu^2(1-\varepsilon)\right] dS}{\int_0^L \frac{ds}{B_0(1-\varepsilon^2)}}. \qquad (12.18)$$

Для однородных конфигураций $B_0 = \text{const}$, $\varepsilon = \text{const}$, $u' = \text{const}$, используя выражения (11.72) и (11.73) для λ, μ, получаем

$$\xi = \frac{2\sigma_\perp}{\sigma_\parallel} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{k_{n+l}^2 \left[\frac{4\pi^2 l^2}{L^2} - \frac{4\pi l}{L} u'(1-\varepsilon^2) + u'^2(1-\varepsilon^2)\right]}{\left[u'^2(1-\varepsilon^2) - \frac{4\pi^2 l^2}{L^2}\right]^2} - \frac{\varepsilon k_{n+l} k_{n-l}\left[u'^2(1-\varepsilon^2) - \frac{4\pi^2 l^2}{L^2}\right]}{\left[u'^2(1-\varepsilon^2) - \frac{4\pi^2 l^2}{L^2}\right]^2}. \qquad (12.19)$$

Если магнитная ось является винтовой линией или окружностью, то из всей суммы остается лишь слагаемое, содержащее k_{n+l}^2 с $l = -n$. Вводя угол прокручивания силовых линий в окрестности магнитной оси

$$\iota = \left[u' \sqrt{1-\varepsilon^2} - \delta'\right] L, \qquad (12.20)$$

получаем коэффициент ξ:

$$\xi = \frac{2\sigma_\perp}{\sigma_\parallel} \cdot \frac{k_0^2 L^2}{\iota^2} \left\{\frac{u'^2(1-\varepsilon^2) + \delta'^2 + 2u'\delta'(1-\varepsilon^2)}{u'^2(1-\varepsilon^2) + \delta'^2 + 2u'\delta'\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right\}. \qquad (12.21)$$

Множитель в фигурных скобках всегда близок к единице. Поэтому достаточно точной будет формула

$$\xi = \frac{2\sigma_\perp}{\sigma_\parallel} \cdot \frac{k_0^2 L^2}{\iota^2}. \qquad (12.22)$$

При этом

$$\xi_T = \frac{25}{2\alpha_\parallel \alpha_\perp} \cdot \frac{k_0^2 L^2}{\iota^2}. \qquad (12.23)$$

В частности, для систем с круговой магнитной осью имеем

$$\xi = \frac{2\sigma_\perp}{\sigma_\parallel} \cdot \frac{1}{\mu^2}; \quad \xi_T = \frac{25}{2\alpha_\parallel \alpha_\perp} \cdot \frac{1}{\mu^2}. \qquad (12.24)$$

Так как обычно $\mu^2 \ll 1$, то определенные здесь «поправки» являются основным механизмом потерь частиц и тепла в тороидальной геометрии в отсутствие турбулентных переносов.

Задача 1. Определить поправочный коэффициент ξ в формулах для эффективной диффузии и теплопроводности в m-заходном стелларатore с круговой магнитной осью.

Р е ш е н и е. Используя найденные в задаче 1 к § 11 значения продольной и поперечной компонент плотности тока и учитывая, что, согласно формуле (4.33), число вращений выражается в виде

$$\mu(\rho) = \frac{(m-1)\,n}{m^2}\,\varepsilon^2\left(\frac{\rho^2}{\rho_S^2}\right)^{m-2}, \tag{12.25}$$

находим

$$\xi = \frac{\langle j_s^2\rangle}{\langle j_\omega^2\rangle} = \frac{2}{\mu^2}. \tag{12.26}$$

Задача 2. Определить эффективную скорость классической (нетурбулентной) диффузии в «Токамаке» [34].

Р е ш е н и е. Введем квазицилиндрическую систему координат ρ, φ, ω с квадратом элемента дуги $dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 + r^2 d\varphi^2$, где $r = R(1 + k\rho\cos\omega)$; $k = 1/R$; R — расстояние от оси вращения до центра сечения некоторой фиксированной магнитной поверхности. Это сечение с достаточной степенью точности можно считать круглым $\rho = \text{const}$. На рассматриваемой поверхности, по определению, нормальные компоненты плотности тока и магнитного поля равны нулю ($j_\rho = B_\rho = 0$). Остальные требующиеся для расчета величины, входящие в уравнение равновесия и обобщенный закон Ома, имеют вид [3]:

$$E_\varphi = \frac{E_0(\rho)}{2\pi r}, \quad B_\varphi = \frac{2I(\psi)}{cr} = \frac{B_{\varphi_0}(\rho)}{1 + k\rho\cos\omega}; \tag{12.27}$$

$$j_\varphi = 2\pi c\frac{dp(\psi)}{d\psi}\,r + \frac{1}{cr^2}\cdot\frac{dI^2(\psi)}{d\psi}; \tag{12.28}$$

$$B_\omega = B_{\omega 0}(\rho)\,[1 + k\rho\Lambda_1(\rho)\cos\omega + k^2\rho^2\Lambda_2(\rho)\cos 2\omega + \cdots] = \frac{1}{2\pi r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\rho}; \tag{12.29}$$

$$j_\omega = j_\varphi\frac{B_\omega}{B_\varphi} - \frac{c}{B_\varphi}\cdot\frac{dp}{d\rho} = \frac{dI}{d\psi}B_\omega; \tag{12.30}$$

$$E_\omega = \left(\frac{j_\varphi}{\sigma_\parallel} - E_\varphi\right)\frac{B_\varphi}{B_\omega} + \frac{1}{\sigma_\parallel}j_\omega = E_{\omega_0} - \frac{\partial\varphi_E}{\rho\partial\omega}; \tag{12.31}$$

$$v_\rho = \frac{c}{B_\omega}\left(E_\varphi - \frac{j_\varphi}{\sigma_\parallel}\right) - \frac{c^2}{B^2}\left(\frac{1}{\sigma_\perp} - \frac{1}{\sigma_\parallel}\right)\frac{dp}{d\rho}. \tag{12.32}$$

Здесь ψ — поперечный магнитный поток, так что $\psi(\rho, \omega) = \text{const}$ представляет собой уравнение магнитной поверхности; $E_0(\rho)$ — напряжение на обходе тора; φ_E — однозначный потенциал; $E_{\omega 0}$ — среднее значение вихревого азимутального электрического поля.

Среднее по тороидальной поверхности значение нормальной скорости $v_{\text{эфф}}$ можно найти из формулы

$$v_{\text{эфф}} = \left\langle v_\rho\frac{r}{R}\right\rangle = \langle v_\rho(1 + k\rho\cos\omega)\rangle, \tag{12.33}$$

где угловые скобки означают усреднение по азимуту ω.

Усредняя выражение (12.31) по ω, находим связь функций; $I(\psi)$ и $p(\psi)$ с $E_0(\psi)$:

$$E_0 = \frac{\pi c \langle j_\omega \rangle / \sigma_\parallel - \langle E_\omega \rangle}{I \langle 1/r^2 B_\omega \rangle} + \frac{4\pi I I'(\psi)}{c\sigma_\parallel} + \frac{4\pi^2 c p'(\psi)}{\sigma_\parallel} \frac{\langle 1/B_\omega \rangle}{\langle 1/r^2 B_\omega \rangle}. \quad (12.34)$$

Подставляя выражения для E_0, j_φ, B_φ, j_ω в формулу (12.32) для радиальной скорости v_ρ и производя усреднение по формуле (12.33), получаем выражение для скорости расширения плазменного шнура

$$v_{эфф} = -\frac{c^2}{\sigma_\perp B^2}\left(1 + \frac{\sigma_\perp}{\sigma_\parallel} \cdot \frac{B_{\omega 0}^2}{B_{\varphi 0}^2}\right)\frac{dp}{d\rho} + \frac{c j_{\varphi 0} B_{\omega 0}}{\sigma_\parallel B_{\varphi 0}^2} - \frac{c E_{\omega 0}}{B_{\varphi 0}} - \frac{2c^2\rho^2}{\sigma_\parallel B_{\omega 0}^2 R^2} \cdot \frac{dp}{d\rho}. \quad (12.35)$$

Первый член в этом выражении представляет собой диффузионную скорость; второй член определяет скорость стягивания плазмы магнитным полем тока (пинч-эффект в продольном магнитном поле); третий — дрейф в вихревом азимутальном электрическом поле, связанном с изменением продольного магнитного поля; при $B_{\varphi 0} \ll B_{\omega 0}$

$$E_{\omega 0} = \frac{\rho}{2c} \frac{i}{B_{\varphi 0}} \frac{dB_{\varphi 0}}{dt}. \quad (12.36)$$

Усиленная за счет тороидальности диффузия описывается последним членом выражения (12.35). При $B_{\varphi 0}^2 \gg B_{\omega 0}^2$ суммарный эффективный коэффициент диффузии выражается через коэффициент диффузии в цилиндрической геометрии $D_\perp$ в виде

$$D_{эфф} = D_\perp \left(1 + \frac{2\sigma_\perp}{\sigma_\parallel} q^2\right), \quad (12.37)$$

где

$$q = \rho B_{\varphi 0} / R B_{\omega 0} = 1/\mu.$$

§ 13. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТОРОИДАЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

Интегральными характеристиками системы замкнутых магнитных поверхностей являются: объем V, ограниченный данной магнитной поверхностью, продольный магнитный поток Φ и поперечный (азимутальный) магнитный поток χ. В теории равновесия и устойчивости замкнутых плазменных конфигураций важную роль играют производные величин V и χ по продольному потоку: удельный объем $V'(\Phi)$ и удельный поперечный поток $\chi'(\Phi)$.

Под величиной χ понимается магнитный поток, проходящий через поверхность, натянутую на две замкнутые кривые: магнитную ось и линию, лежащую на магнитной поверхности, охватывающей эту ось. Причем если эта вторая кривая ни разу не обвивает магнитную ось, то при вычислении потока χ получим его истинное значение, которое связано со средним прокручиванием силовых линий вокруг магнитной оси равенством

$$\iota = 2\pi\chi'(\Phi). \quad (13.1)$$

Здесь ι — угол, на который проворачивается силовая линия вокруг оси при полном обходе вокруг тора. Если же вторая кривая обвивает магнитную ось N раз (при полном обходе), то из величины $\chi'(\Phi)$ вычитается целое число N в соответствии с тем, что теперь через выбранную поверхность проходит не только азимутальный поток χ, но N раз проходит продольный поток Φ.

Рассчитаем $\chi'(\Phi)$, принимая в качестве второй кривой линию, которая определяется уравнениями

$$\theta = \omega - \alpha(s) = \text{const}; \quad \psi(\rho, \theta, s) = \text{const} \tag{13.2}$$

и является следом пересечения магнитной поверхности нормалью к магнитной оси. При таком способе вычисления получаем величину $\chi'(\Phi)$, отличающуюся от ее истинного значения на целое число N, равное числу оборотов нормали к магнитной оси (см. Приложение III). Приращение определенного таким образом потока между двумя соседними магнитными поверхностями можно вычислить интегрированием по объему слоя между этими поверхностями.

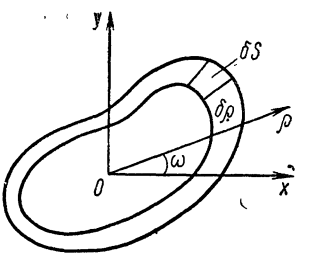


Рис. 27. Площадка dS между двумя близкими магнитными поверхностями.

Пусть dV, $d\Phi$ и $d\chi$ соответственно объем и потоки между двумя бесконечно близкими магнитными поверхностями $\psi = \text{const}$, $\psi + d\psi = \text{const}$, тогда, согласно определению, имеем

$$dV = \int \delta S\,(1 - k\rho\cos\theta)\,ds; \tag{13.3}$$

$$d\Phi = \int B_s \delta S; \tag{13.4}$$

$$d\chi = \frac{1}{2\pi}\int dS\left[\frac{B_\omega}{\rho}(1 - k\rho\cos\theta) - \alpha' B_s\right] ds. \tag{13.5}$$

Здесь интегрирование производится на площади δS, ограниченной двумя бесконечно близкими сечениями магнитных поверхностей плоскостью $s = \text{const}$ (рис. 27). Формула (13.5) легко выводится, если учесть, что, согласно выражению (1.4),

$$d\chi = \frac{1}{2\pi}\int (\mathbf{B}\nabla\theta)\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int \operatorname{div}(\mathbf{B}\,\theta)\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int \mathbf{B}\,\theta\, d\mathbf{S} = \int \mathbf{B}\, d\mathbf{S}, \tag{13.6}$$

где предпоследний интеграл берется по обеим сторонам поверхности разреза $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$, а последний интеграл дает значение потока $d\chi$ через поверхность, соединяющую следы нормали к магнитной оси на двух соседних магнитных поверхностях, а также что $\nabla\theta = \left\{0, \frac{1}{\rho}\mathbf{e}_\omega, -\frac{\alpha'}{1 - k\rho\cos\theta}\mathbf{e}_s\right\}$.

Обозначим угловыми скобками среднее значение по площади dS:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{dS} \int f \delta S, \tag{13.7}$$

тогда величины (13.3) — (13.5) можно представить контурными интегралами по ds:

$$dV = dS \oint (1 - \langle k\rho \cos\theta \rangle) ds; \tag{13.8}$$

$$d\Phi = dS \langle B_s \rangle; \tag{13.9}$$

$$d\chi = \frac{dS}{2\pi} \oint \left[\left\langle \frac{B_\omega}{\rho} (1 - k\rho \cos\theta) \right\rangle - \alpha' \langle B_s \rangle \right] ds. \tag{13.10}$$

При вычислении производных $V'(\Phi)$ и $\chi'(\Phi)$ удобно воспользоваться независимостью $d\Phi$ от s и ввести $d\Phi$ под знак интегралов по s:

$$V'(\Phi) = \frac{dV}{d\Phi} = \oint \frac{1 - \langle k\rho \cos\theta \rangle}{\langle B_s \rangle} ds; \tag{13.11}$$

$$\chi'(\Phi) = \frac{d\chi}{d\Phi} = \frac{1}{2\pi} \oint \left\{ \frac{\left\langle \frac{B_\omega}{\rho} (1 - k\rho \cos\theta) \right\rangle}{\langle B_s \rangle} - \alpha' \right\} ds. \tag{13.12}$$

Из уравнения магнитной поверхности $\psi(\rho, \theta, s) = \text{const}$ можно найти ρ как функцию ψ и θ. Тогда элемент поверхности площадки dS запишется в виде

$$\delta S = \rho \delta\rho d\omega, \tag{13.13}$$

где $\delta\rho$ выражается через приращение функции ψ *

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \delta\rho. \tag{13.14}$$

При этом поскольку $d\psi = \text{const}$, то площадь кольцевой области dS равна

$$dS = d\psi \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\omega}{\partial\psi/\partial\rho}, \tag{13.15}$$

а среднее значение произвольной величины f определится выражением

$$\langle f \rangle = \int_0^{2\pi} f \frac{\rho d\omega}{\partial\psi/\partial\rho} \Bigg| \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\omega}{\partial\psi/\partial\rho}. \tag{13.16}$$

Приведенные формулы являются точными. Далее при вычислении входящих в них интегралов будет использовано разложение подынтегральных выражений по степеням ρ.

---

* Заметим, что иногда более удобно использовать формулы $\delta S = \rho d\rho \delta\omega$ $d\psi \frac{\partial\psi}{\partial\omega} \delta\omega$ (см. § 15) или аналогичные формулы в декартовых координатах.

1. Удельный объем $V'(\Phi)$

Для вычисления удельного объема методом разложения по ρ представим продольное поле B_s в виде

$$B_s = B_0(s) + B_{1s}(\rho, \theta, s), \tag{13.17}$$

где $B_{1s} \sim \rho$, и разложим подынтегральное выражение (13.11) по степеням ρ. Тогда в первом приближении получим

$$V'(\Phi) = \oint \frac{ds}{B_0} \left\{ 1 - \frac{\int_0^{2\pi} (B_{1s} + k\rho\cos\theta B_0) \frac{\rho d\omega}{\partial\psi/\partial\rho}}{B_0 \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\omega}{\partial\psi/\partial\rho}} \right\}. \tag{13.18}$$

Учитывая, что выражения для ψ и B_s представляются разложениями

$$\left.\begin{aligned} \psi &= B_0(s)(g_2\rho^2 + g_3\rho^3 + g_4\rho^4 + \ldots); \\ B_s &= \frac{B_0(s)}{1 - k\rho\cos\theta} + A'\rho^2 + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{13.19}$$

и определяя ρ через ψ из первого соотношения (13.19)

$$\rho = \frac{\psi^{1/2}}{B_0^{1/2} g_2^{1/2}} - \frac{g_3\psi}{2B_0 g_2^2} + \ldots, \tag{13.20}$$

получаем с точностью до величин порядка ρ^2 включительно

$$V'(\Phi) = \oint \frac{ds}{B_0} \left\{ 1 - \frac{\psi}{B_0} \frac{\int_0^{2\pi} \left[4k\cos\theta g_2^{-3} g_3 - (k^2\cos^2\theta + A' B_0^{-1}) g_2^{-2} \right] d\omega}{\int_0^{2\pi} g_2^{-1} d\omega} \right\}. \tag{13.21}$$

Вместо величины ψ можем подставить сюда ее выражение через продольный магнитный поток Φ. Площадь кольца dS приближенно равна

$$dS = \frac{d\psi}{B_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{g_2} = \frac{2\pi d\psi}{B_0 a \sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{2\pi d\psi}{B_0 c_0}. \tag{13.22}$$

Отсюда следует, что площадь S нормального к магнитной оси сечения магнитной поверхности $\psi = \text{const}$ и магнитный поток через это сечение в том же приближении соответственно равны

$$S = \frac{2\pi\psi}{B_0 c_0}; \quad \Phi = \frac{2\pi\psi}{c_0}. \tag{13.23}$$

Подставляя выражения (6.6) и (6.26) для g_2 и g_3 и производя интегрирование (см. Приложение IV), получаем следующую формулу для удельного объема:

$$V'(\Phi) = \oint \frac{ds}{B_0} - \frac{\Phi}{\pi} \oint \frac{ds}{B_0^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}} \left\{ \frac{k^2}{2}(1 - \varepsilon\cos 2\delta) - \frac{B_0''}{4B_0} - \right.$$

$$- \varepsilon^2(\delta' - \alpha')^2 + \frac{\varepsilon}{4B_0}(B_0\eta')' - \frac{(2-\varepsilon)\alpha_1 - 3\varepsilon\alpha_3}{1+\varepsilon} k\cos\delta -$$

$$\left. - \frac{(2+\varepsilon)\alpha_2 - 3\varepsilon\alpha_4}{1-\varepsilon} k\sin\delta \right\}. \qquad (13.24)$$

Равенство (13.24) представляет собой по существу, первые члены разложения $V'(\Phi)$ в ряд по степеням Ф. Для того чтобы получить следующие члены этого ряда, необходимо производить вычисления, учитывая в разложениях по степеням ρ члены более высокого порядка: ρ^4 и т. д.

Удельный объем является убывающей функцией потока, т. е. усредненное магнитное поле нарастает к периферии, если множитель при Ф положителен. Чтобы выделить слагаемые, имеющие явно положительные или отрицательные знаки, проинтегрируем по частям члены, содержащие вторые производные по s. Учитывая соотношение $\mathrm{ch}\eta = 1/\sqrt{1-\varepsilon^2}$ и равенство нулю интегралов по замкнутому контуру от полных производных, получаем

$$V'(\Phi) = \oint \frac{ds}{B_0} - \frac{\Phi}{\pi} \oint \frac{ds}{B_0^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}} \left\{ \frac{k^2}{2}(1 - \varepsilon\cos 2\delta) - \frac{3}{4}\frac{B_0'^2}{B_0^2} - \right.$$

$$- \frac{\eta'^2}{4} - \varepsilon^2(\delta' - \alpha')^2 + \varepsilon\frac{\eta' B_0'}{B_0} -$$

$$\left. - k\left[\frac{(2-\varepsilon)\alpha_1 - 3\varepsilon\alpha_3}{1+\varepsilon}\cos\delta + \frac{(2+\varepsilon)\alpha_2 - 3\varepsilon\alpha_4}{1-\varepsilon}\sin\delta \right] \right\}. \qquad (13.25)$$

Как видно значение удельного объема зависит от величины продольного поля $B_0(s)$ на магнитной оси, от характеристик магнитной оси — ее кривизны k и кручения $\varkappa = \alpha'$ и параметров второй и третьей гармоник магнитных поверхностей: ε, δ, α_1, α_2, α_3, α_4. Изменение $\varepsilon(s)$ [или $\eta(s)$] характеризует изменение эксцентриситета нормальных сечений магнитных поверхностей, а изменение $\delta(s)$ — их проворачивание вокруг магнитной оси.

Формула (13.25) показывает, что в линейном по Ф приближении величина удельного объема $V'(\Phi)$ замкнутых магнитных конфигураций определяется характеристиками магнитных поверхностей третьего приближения по ρ, а в случае $k = 0$ достаточно знать параметры второго приближения по ρ.

Для определения функций $\alpha_i(s)$ необходимо вычисление интегралов (9.7), представление которых в виде рядов дается формулой (9.16). Заметим, что комбинации отклонений x_i от невозму-

щенных величин α_i^0, входящие в выражение (13.25), пропорциональны соответственно действительной и мнимой частям σ_1, так что для нахождения $V'(\Phi)$ достаточно вычислить только σ_1. Величина σ_3 нужна для определения формы магнитных поверхностей, и, в частности, местоположения сепаратрисы.

Если вместо параметров α_i подставить в формулу (13.25) их значения $\alpha_i = \alpha_i^0 + x_i$ и выразить x_i через комплексную функцию σ_1, то формула для $V'(\Phi)$ примет вид

$$V'(\Phi) = \oint \frac{ds}{B_0} - \frac{\Phi}{\pi} \oint \frac{ds}{B_0^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}} \left\{ -\frac{k^2}{1-\varepsilon^2} \left[1 + \right.\right.$$

$$\left. + 3\varepsilon^2 - \frac{\varepsilon}{4}(9 + 7\varepsilon^2)\cos 2\delta \right] - \frac{3}{4} \cdot \frac{B_0'^2}{B_0^2} - \frac{\eta'^2}{4} - \varepsilon^2 u'^2 +$$

$$\left. + \varepsilon \frac{\eta' B_0'}{B_0} + 2\varepsilon k \left(\frac{Q\cos\delta}{1+\varepsilon} + \frac{P\sin\delta}{1-\varepsilon} \right) - W \right\}, \qquad (13.26)$$

где

$$W = \frac{B_0^{1/2}}{2a} (k\cos\delta \operatorname{Re}\sigma_1 e^{-\eta/2} + k\sin\delta \operatorname{Im}\sigma_1 e^{\eta/2}). \qquad (13.27)$$

Знание выражения $V'(\Phi)$ в линейном приближении по Φ позволяет оценить допустимое для данной системы давление плазмы. Из теории гидродинамической устойчивости [37, 38] следует, что функция $-V'(\Phi)$ играет роль потенциальной энергии для плазмы низкого давления. Критическое значение параметра

$$\beta = \frac{8\pi p}{B^2},$$

при котором плазма еще устойчива, зависит от относительной глубины потенциальной ямы [15, 39]:

$$\frac{\delta U}{U} = -\frac{V''\Phi}{V'}. \qquad (13.28)$$

2. Удельный объем магнитных конфигураций с прямой магнитной осью

В случае прямой магнитной оси ее кривизна k и кручение α' равны нулю и формула (13.25) принимает вид

$$V'(\Phi) = \oint \frac{ds}{B_0} - \frac{\Phi}{\pi} \oint \frac{ds}{B_0^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}} \left(-\frac{3B'^2}{4B_0^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\eta'^2}{4} - \varepsilon^2 \delta'^2 + \varepsilon \frac{\eta' B_0'}{B_0} \right). \qquad (13.29)$$

Таким образом, величина V' для конфигураций с прямой осью определяется характеристиками магнитных поверхностей второго

приближения по ρ. В простейших случаях магнитных поверхностей с круговыми поперечными сечениями, когда $\varepsilon = 0$,

$$V''(\Phi) = \frac{3}{4\pi} \oint \frac{B_0'^2}{B_0^2}\, ds \tag{13.30}$$

и магнитных поверхностей с неизменной формой поперечных сечений ($B_0 = \text{const}$, $\varepsilon = \text{const}$)

$$V''(\Phi) = \frac{1}{\pi} \oint \frac{\varepsilon^2 \delta'^2 ds}{B_0^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}} \tag{13.31}$$

величина $V''(\Phi)$ заведомо положительна. Полезный для осуществления минимума $\overline{B}$ вклад в подынтегральное выражение (13.29) может дать лишь последний член, пропорциональный трем сомножителям $\varepsilon\eta' B_0'$. Следовательно, величину $V''(\Phi)$ можно сделать отрицательной только при одновременном, специальным образом подобранном изменении эксцентриситета сечений [характеризующегося параметром $\varepsilon(s)$] и продольного поля на оси $B_0(s)$. При этом, как показывает формула (13.29), прокручивание магнитных поверхностей вокруг оси ($\delta' \neq 0$) является неблагоприятным фактором.

Пример магнитной ловушки с $V''(\Phi) < 0$ (при $\delta' = 0$) был впервые построен Фюртом и Розенблютом [40], которые рассматривали поле вблизи прямой оси, представляющее собой наложение гофрированного и квадрупольного полей с чередующимися полярностями (см. также [41—43]).

Формула (13.29) приложима также и к замкнутым тороидальным конфигурациям при условии, что члены с кривизной в общей формуле (13.25) пренебрежимо малы. Кривизной можно пренебрегать лишь при сравнительно небольшом продольном периоде λ магнитного поля

$$\left(\frac{\lambda}{L}\right)^2 \ll \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2. \tag{13.32}$$

Здесь L — длина контура магнитной оси, а $\Delta B/B$ — относительная модуляция магнитного поля (либо других параметров магнитной конфигурации).

3. Средний угол прокручивания силовых линий $\iota = 2\pi\chi'(\Phi)$

Для вычисления удельного азимутального потока $\chi'(\Phi)$ в линейном приближении по Φ в общем случае необходимо знать разложение функций $\varphi(\mathbf{r})$ и $\psi(\mathbf{r})$ с точностью до членов порядка ρ^4 включительно. Разлагая $\chi'(\Phi)$ в ряд по степеням ρ и ограничиваясь при этом членами второго порядка, получаем

$$\chi'(\Phi) = \frac{1}{2\pi} \oint \left\{ -\alpha' + \frac{\langle \dot{A} \rangle}{B_0} + \frac{1}{B_0} \langle (\dot{B} - k\dot{A}\cos\theta)\rho + \right.$$

$$+ (\dot{C} - k\dot{A}\cos\theta)\rho^2 \rangle - \frac{1}{B_0^2} \langle \dot{A} \rangle \langle A'\rho^2 + k\cos\theta B_0 +$$

$$+ k^2 \cos^2\theta B_0 \rangle \} ds. \qquad (13.33)$$

Из разложения функции ψ до членов порядка ρ^4 вытекает, что

$$\frac{\rho}{\partial\psi/\partial\rho} = \frac{1}{2B_0 g_2}\left[1 - \frac{3g_3}{2g_2}\rho - \left(\frac{2g_4}{g_2} - \frac{9g_3^2}{4g_2^2}\right)\rho^2 + \ldots\right]. \qquad (13.34)$$

Используя это выражение и равенство (13.20), легко получить следующие формулы для интегралов от произвольной функции $f(\omega)$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{f\rho d\omega}{\partial\psi/\partial\rho} = \frac{1}{2B_0}\int_0^{2\pi} \frac{f}{g_2} d\omega + \frac{\psi}{2B_0^2}\int_0^{2\pi} f\,\frac{3g_3^2 - 2g_2g_4}{g_2^4} d\omega; \qquad (13.35)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{f\rho^2 d\omega}{\partial\psi/\partial\rho} = -\frac{\psi}{B_0^2}\int_0^{2\pi} \frac{fg_3}{g_2^3} d\omega; \qquad (13.36)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{f\rho^3 d\omega}{\partial\psi/\partial\rho} = \frac{\psi}{2B_0^2}\int_0^{2\pi} \frac{f}{g_2^2} d\omega. \qquad (13.37)$$

Согласно определению среднего значения по площади кольцевой области (13.16), в линейном по ψ приближении находим

$$\langle \dot{A} \rangle = \frac{1}{\int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{g_2}}\left\{\int_0^{2\pi} \frac{\dot{A}}{g_2} d\omega + \frac{\psi}{B_0}\int_0^{2\pi} (\dot{A} - \overline{\dot{A}})\,\frac{3g_3^2 - 2g_2g_4}{g_2^4} d\omega\right\}, \qquad (13.38)$$

где

$$\overline{\dot{A}} = \int_0^{2\pi} \frac{\dot{A}}{g_2} d\omega \Big/ \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{g_2}. \qquad (13.39)$$

Полное выражение для величины $\chi'(\Phi)$ получается подстановкой предыдущих соотношений в формулу (13.33):

$$\chi'(\Phi) = \frac{1}{2\pi}\oint ds\left(\frac{\overline{\dot{A}}}{B_0} - \alpha'\right) + \frac{\psi}{2\pi}\oint \frac{ds}{B_0^2 \int_0^{2\pi} g_2^{-1} d\omega}\int_0^{2\pi}\left[\left(\dot{A} - \overline{\dot{A}}\right)\times\right.$$

$$\times (3g_3^2 - 2g_2g_4)\,g_2^{-4} + \overline{\dot{A}}g_2^{-2}\left(2k\cos\theta g_3 g_2^{-1} - k^2\cos^2\theta - A'B_0^{-1}\right) -$$

$$\left. - 2(\dot{B} - k\cos\theta\dot{A})\,g_3 g_2^{-3} + (\dot{C} - k\cos\theta\dot{B})\,g_2^{-2}\right] d\omega. \qquad (13.40)$$

Первый из интегралов по замкнутому контуру дает прокручивание в окрестности магнитной оси, а второй интеграл определяет перекрещенность силовых линий (*shear*).

Поскольку интегралы по $d\omega$ от функций $\dot{A}g_2^{-1}$ и g_2^{-1} соответственно равны

$$\int_0^{2\pi} \dot{A}g_2^{-1}d\omega = \frac{2\pi}{c_0} B_0 u' \left(\sqrt{1-\varepsilon^2} - 1\right); \tag{13.41}$$

$$\int_0^{2\pi} g_2^{-1}d\omega = \frac{2\pi}{c_0}, \tag{13.42}$$

то величина $\chi'(\Phi)$ в нулевом приближении выражается формулой

$$\chi'(\Phi) = \frac{1}{2\pi}\oint ds\left[(\delta' - \alpha')\sqrt{1-\varepsilon^2} - \delta'\right]. \tag{13.43}$$

Отсюда следует, что величина прокручивания силовых линий в окрестности магнитной оси определяется кручением оси $\alpha' = \varkappa(s)$ и параметрами магнитных поверхностей: их прокручиванием вокруг оси $\delta(s)$ и эллиптичностью $\varepsilon(s)$.

Выражение (13.40) существенно упрощается в случае круглого нормального сечения магнитных поверхностей ($\varepsilon = 0$). При этом $\dot{A} = B_0\varepsilon u' \cos 2u = 0$, $g_2 = a = c_0$, и угол прокручивания силовых линий можно определить по формуле

$$2\pi\chi'(\Phi) = -\oint \varkappa ds - \frac{\Phi}{2\pi^2}\oint \frac{ds}{B_0^2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{2\xi_3}{a} + k\cos\theta\right)\dot{B}d\omega. \tag{13.44}$$

В случае однородных конфигураций ($B_0 = \text{const}$) при $\varepsilon = 0$ параметры магнитных поверхностей α_i равны α_i^0 (см. § 6) и формулу (13.44) для угла прокручивания легко записать в явном виде:

$$2\pi\chi'(\Phi) = -\oint \varkappa ds - \frac{\Phi}{\pi}\oint \frac{ds}{B_0}\left[\frac{5k^2}{32}\varkappa - \frac{2}{3}(Q^2+P^2)u' - \right.$$
$$\left. - \frac{2}{9}(PQ' - QP')\right]. \tag{13.45}$$

В рассматриваемом случае параметры четвертого приближения по ρ как в скалярном потенциале φ, так и в поверхностной функции ψ не влияют на величину $\chi'(\Phi)$, определяемую формулой (13.45).

4. Удельный объем $V'(\Phi)$ конфигураций с сечением, близким к круговому

Сравнительно простое выражение удельного объема можно получить для тороидальных конфигураций, поперечные сечения которых близки к круговым. Вследствие тороидального эффекта

центры сечений магнитных поверхностей смещены на некоторое расстояние $\xi(\rho_0)$, зависящее от радиуса ρ_0 сечения рассматриваемой поверхности, в сторону, противоположную направлению главной нормали. Уравнение смещенных сечений можно записать в виде

$$\rho = \rho_0 + \xi(\rho_0)\cos\theta, \tag{13.46}$$

так что

$$d\rho = d\rho_0\left(1 + \frac{d\xi}{d\rho_0}\cos\theta\right); \tag{13.47}$$

$$\rho^2 d\rho = \rho_0^2 d\rho_0\left\{1 + \left(2\frac{\xi}{\rho_0} + \frac{d\xi}{d\rho_0}\right)\cos\theta + \frac{\xi^2}{\rho_0^2}\cos^2\theta\right\}. \tag{13.48}$$

Для входящего в выражение (13.11) значения $\langle k\rho\cos\theta\rangle$, усредненного по кольцевой области шириной $d\rho_0$, получаем

$$\langle k\rho\cos\theta\rangle = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta\,\{k\rho\cos\theta\rho d\rho\}}{\int_0^{2\pi} d\theta\,\{\rho d\rho\}} = \frac{k\rho_0}{2}\left(2\frac{\xi}{\rho_0} + \frac{d\xi}{d\rho_0}\right). \tag{13.49}$$

В подынтегральном выражении для $V'(\Phi)$ в качестве B_s достаточно взять основное продольное поле с линейной по кривизне поправкой

$$\langle B_s\rangle = \left(\frac{B_0}{1 - k\rho\cos\theta}\right) \approx B_0(1 + \langle k\rho\cos\theta\rangle + \langle k^2\rho^2\cos^2\theta\rangle). \tag{13.50}$$

Таким образом,

$$V'(\Phi) = \oint \frac{1 - 2\langle k\rho\cos\theta\rangle - \langle k^2\rho^2\cos^2\theta\rangle}{B_0}\,ds. \tag{13.51}$$

Учитывая, что $\langle k^2\rho^2\cos^2\theta\rangle \approx \frac{1}{2}k^2\rho_0^2$, получаем окончательно

$$V'(\Phi) = \oint \frac{ds}{B_0(s)}\left[1 - k\rho_0\left(2\frac{\xi}{\rho_0} + \frac{d\xi}{d\rho_0}\right) - \frac{k^2\rho_0^2}{2}\right]. \tag{13.52}$$

В качестве примера применения этой формулы рассчитаем $V'(\Phi)$ в стелларатore типа спитцеровской восьмерки. Смещение магнитных поверхностей в такой системе выражается формулой (см. задачу 3 к § 4)

$$\xi(\rho_0) = -\frac{3}{8}k\rho_0^2. \tag{13.53}$$

Подставляя это выражение в формулу для $V'(\Phi)$, находим, что при $B_0 = \text{const}$

$$V'(\Phi) = \frac{L}{B_0} + \frac{\rho_0^2}{B_0}\oint k^2 ds = \frac{L}{B_0}\left\{1 + \frac{\Phi}{\pi B_0 L}\oint k^2 ds\right\}. \tag{13.54}$$

Это же значение $V'(\Phi)$ можно получить из формулы (13.26), положив $\varepsilon = Q = P = 0$.

5. Оценка удельного объема $V'(\Phi)$ на сепаратрисе

Как отмечалось в § 7, ребро сепаратрисы является замкнутой магнитной силовой линией. В некоторых случаях тороидальные конфигурации имеют сепаратрисы, не прокручивающиеся вокруг тора. Так, ребро сепаратрисы двухзаходного стелларатора с круговой магнитной осью (см. § 14) расположено с внутренней стороны тора и при продвижении вдоль тора лишь слегка отклоняется от экваториальной плоскости. В конфигурациях с винтовой симметрией ребра сепаратрисы сохраняют по всей длине постоянную ориентацию относительно главной нормали. Для подобного рода конфигураций удельный объем $V'(\Phi)$ на сепаратрисе можно оценивать по значению интеграла $U = \oint \frac{dl}{B}$, взятого по ребру сепаратрисы:

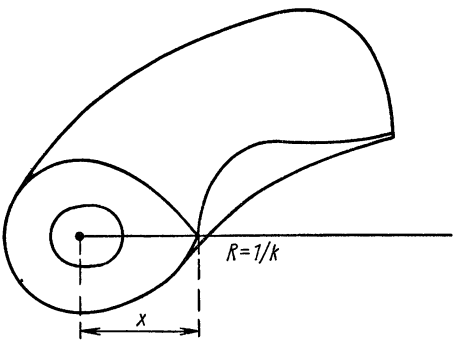


Рис. 28. Ребро сепаратрисы с благоприятной для устойчивости плазмы кривизной.

$$U = \oint \frac{dl}{B} = \oint \frac{(1 - k\rho\cos\theta)^2\, ds}{B_0} \approx$$

$$\approx \oint \frac{ds}{B_0}(1 - 2kx), \qquad (13.55)$$

где $x = \rho\cos\theta$ — расстояние от магнитной оси до проекции ребра сепаратрисы на главную нормаль к оси (рис. 28). Относительная глубина магнитной ямы при $B_0(s) = \text{const}$ равна [13]

$$\frac{\delta U}{U} = \frac{U(0) - U(x)}{U(0)} = 2\langle kx\rangle. \qquad (13.56)$$

Если ребро сепаратрисы расположено на внешней стороне тора, то $x < 0$. При этом среднее магнитное поле на ребре сепаратрисы меньше, чем на магнитной оси.

Следует помнить, что, как было показано в § 2, в общем случае интеграл $\oint \frac{dl}{B}$ имеет разные значения на разных силовых линиях, принадлежащих одной и той же магнитной поверхности. Поэтому оценка удельного объема $V'(\Phi)$ по значению интеграла $\oint \frac{dl}{B}$ на ребре сепаратрисы не всегда может оказаться правильной.

§ 14. НЕКОТОРЫЕ КОНКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим теперь характеристики некоторых простейших конфигураций магнитного поля, обладающих тороидальными магнитными поверхностями. Сначала исследуем конфигурации с

прямой магнитной осью. Их можно рассматривать как модель тороидальных конфигураций, магнитная ось которых почти плоская кривая с очень малой кривизной. Затем изучим конфигурацию с винтовой магнитной осью, являющуюся моделью тороидальных систем с пространственной магнитной осью, обладающей кривизной и кручением. В заключение рассмотрим несколько замкнутых тороидальных конфигураций, характеризующихся неизменностью основных параметров по длине (так называемые однородные конфигурации): двухзаходный стелларатор с круговой магнитной осью и конфигурации с пространственной магнитной осью.

1. Конфигурации с прямой магнитной осью

А. Однородные конфигурации. Рассмотрим сначала однородные конфигурации, когда продольное поле B_0 и амплитуды всех гармоник поля постоянны. Предположим, кроме того, что шаг винта всех гармоник одинаков и равен $L_1 = 2\pi/h$. В этом случае конфигурация обладает винтовой симметрией и для расчета магнитных поверхностей можно воспользоваться формулами § 6. Скалярный потенциал φ и функция магнитных поверхностей ψ могут быть записаны в виде

$$\varphi = B_0\left(s - \frac{\varepsilon}{2}h\rho^2\sin 2\theta - \frac{Q}{3}h\rho^3\sin 3\theta - \frac{G}{4}h\rho^4\sin 4\theta + \ldots\right); \tag{14.1}$$

$$\psi = \frac{h}{2}B_0\left\{\rho^2(1+\varepsilon\cos 2\theta) + \frac{2}{3}Q\rho^3\cos 3\theta + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{2}{3}\varepsilon h^2\cos 2\theta + \frac{G}{2}\cos 4\theta\right)\rho^4 + \ldots\right\}, \tag{14.2}$$

где

$$\theta = \omega - hs = \omega - \frac{2\pi}{L_1}s. \tag{14.3}$$

Шаг винта связан с общей длиной L системы соотношением

$$L_1 = L/n, \tag{14.4}$$

где n — число периодов поля на всей длине L.

Для числа вращений $\mu_1 = \mu/n$ на одном периоде получается формула

$$\mu_1 = 1 - \sqrt{1-\varepsilon^2} + \frac{\Phi}{\pi B_0}\left\{\varepsilon^2(1+\varepsilon^2)h^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{3}\,\frac{1+\varepsilon+\frac{5}{2}\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon^2)}Q^2 - \frac{3}{2}\cdot\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}G\right\}. \tag{14.5}$$

Производная объема по потоку равна

$$V'(\Phi) = \frac{L_1}{B_0}\left\{1 + \frac{\Phi}{\pi B_0}\,\frac{\varepsilon^2 h^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right\}. \tag{14.6}$$

Среднее магнитное поле

$$\overline{B} = \frac{L}{V'(\Phi)} = 1 - \frac{\Phi}{\pi B_0}\cdot\frac{\varepsilon^2 h^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \tag{14.7}$$

спадает от оси, и, следовательно, магнитной ямы не существует.

Б. Гофрированные конфигурации. а) Рассмотрим конфигурации с переменным продольным полем $B_0 = B_0(s)$ в простейшем случае, когда отсутствует вторая гармоника поля, т. е. $\varepsilon = 0$, и магнитные поверхности вблизи оси имеют круглые сечения. Зависимость продольного поля B_0 от s удобно выбирать в виде

$$B_0(s) = \frac{b_0}{(1+\nu\sin\gamma s)^2}, \tag{14.8}$$

где

$$\gamma = \frac{2\pi}{L}n_1 = \frac{2\pi}{L_1}\cdot\frac{n_1}{n} = h\,\frac{n_1}{n}. \tag{14.9}$$

При такой зависимости $B_0(s)$ легко интегрируются уравнения для параметров магнитных поверхностей.

Предположим сначала, что период гофрировки продольного поля не совпадает с периодом винтового поля:

$$\gamma \neq 3h; \quad n_1 \neq 3n, \tag{14.10}$$

так как в противном случае возникают резонансные эффекты, последствия которых будут рассмотрены ниже отдельно.

Выражения для φ и ψ в третьем приближении разложения по ρ:

$$\varphi = \int_0^s B_0 ds - \frac{B_0'}{4}\rho^2 - \frac{B_0}{3}hQ\sin 3\theta\cdot\rho^3 + \frac{B_0'''}{64}\rho^4 + \ldots; \tag{14.11}$$

$$\psi = B_0\left\{\rho^2 + \frac{2}{3}Q\rho^3\left[\left(1 + \frac{\nu\gamma^2\sin\gamma s}{(9h^2-\gamma^2)(1+\nu\sin\gamma s)}\right)\cos 3\theta + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{3\nu\gamma h\cos\gamma s}{(9h^2-\gamma^2)(1+\nu\sin\gamma s)}\sin 3\theta\right]\right\}. \tag{14.12}$$

Конфигурация магнитного поля, описываемая скалярным потенциалом [см. формулу (14.11)], отличается от конфигурации, рассмотренной в задаче к § 6 и в пункте «в» § 10 несколько иным заданием поля третьей гармоники.

Число вращений $\mu_1 = \mu/n$ на периоде винтовой обмотки и производная объема по потоку соответственно равны

$$\mu_1 = \frac{\Phi}{\pi b_0} \cdot \frac{2}{3} Q^2 \left(1 + \frac{9}{2} \cdot \frac{h^2 \nu^2}{9h^2 - \gamma^2}\right); \qquad (14.13)$$

$$V' = \oint \frac{ds}{B_0} + \frac{3}{4} \cdot \frac{\Phi}{\pi} \oint \frac{B_0'^2}{B_0^4} ds. \qquad (14.14)$$

Удельный объем $V'(\Phi)$ здесь также возрастает к периферии.

В резонансе при $\gamma = 3h$ коэффициент при ρ^3 в выражении для ψ обращается в бесконечность. Это означает, что разложение ψ по степеням ρ не может начинаться с квадратичного члена. В линейном по амплитуде ν гофрировки приближении выражение для ψ при совпадении периодов гофрировки и винтового поля будет

$$\psi = B_0^2 \left[-\frac{\nu}{Q} (1 + \nu \sin \gamma s) \rho^3 \sin 3\omega + (1 - \nu \sin \gamma s) \rho^4 + \right.$$
$$\left. + \frac{4}{3} Q (1 - 2\nu \sin \gamma s) \rho^5 \cos 3\theta \right]. \qquad (14.15)$$

Разложение начинается с члена $\rho^3 \sin 3\omega$. Это значит, что сечение поверхностей вблизи оси имеет вид трехлепестковой розетки с длиной лепестка, равной примерно ν/Q. При $\rho > \nu/Q$ слагаемое с ρ^4 начинает превалировать и сечения магнитных поверхностей становятся близкими к круговым. При $\nu \ll 1$ выражение для ψ в области $\rho \gg \nu/Q$ можно записать в виде

$$\psi = B_0^2 \left(\rho^4 + \frac{4}{3} Q \rho^5 \cos 3\theta + \ldots\right) =$$
$$= B_0^2 \left(\rho^2 + \frac{2}{3} Q \rho^3 \cos 3\theta + \ldots\right)^2. \qquad (14.16)$$

Как и следовало ожидать, вдали от розетки при $\nu \ll 1$ магнитные поверхности не отличаются от магнитных поверхностей обычного трехзаходного стелларатора.

Таким образом, резонанс $\gamma = 3h$ приводит при $\nu \ll 1$ лишь к небольшому расщеплению магнитных поверхностей вблизи оси и не сильно влияет на периферийные тороидальные поверхности. При достаточно сильной гофрировке ($\nu \sim 1$) искажение конфигурации оказывается существенным.

Более общее выражение для ψ можно получить разложением по ρ, начиная со второй степени и кончая шестой, введя общий коэффициент $9h^2 - \gamma^2$. В этом случае решение при резонансе получается автоматически из общего решения, если положить в нем $9h^2 - \gamma^2 = 0$.

б) Рассмотрим теперь конфигурацию с постоянным продольным полем, но с переменной амплитудой поля третьей гармоники $Q = Q(s)$, $P = P(s)$:

$$\varphi = B_0 \left\{ s - \frac{1}{9} \frac{\partial}{\partial s} (Q \cos^3 \theta + P \sin 3\theta) \rho^3 \right\}. \qquad (14.17)$$

Выражение для ψ в четвертом приближении разложения по ρ

$$\psi = \rho^2 + \frac{2}{3}(Q\cos 3\theta + P\sin 3\theta)\rho^3 + g(s)\rho^4. \qquad (14.18)$$

Для функции $g(s)$ получим уравнение

$$\frac{dg}{ds} = \frac{1}{3}\cdot\frac{d}{ds}(Q^2 + P^2). \qquad (14.19)$$

Отсюда

$$g(s) = \frac{1}{3}(Q^2 + P - \overline{Q^2} - \overline{P^2}) + g_0. \qquad (14.20)$$

Здесь из константы интегрирования выделено слагаемое $-\frac{1}{3}(\overline{Q^2} + \overline{P^2})$, (черта означает усреднение по длине системы) с тем чтобы явно учесть то обстоятельство, что при постоянных Q и P функция $g(s)$ не связана непосредственно с амплитудой поля третьей гармоники, как это видно из уравнения (14.19). Произвольная константа g_0 в рамках рассматриваемого приближения остается неопределенной (см. пункт «в» и задачу 1 в § 10).

2. Конфигурация с винтовой магнитной осью

А. Конфигурация поля с винтовой магнитной осью, обладающая постоянными кривизной и кручением, служит хорошей моделью замкнутых тороидальных конфигураций с пространственной магнитной осью. Если поле постоянно по длине s на азимуте $\theta = \omega - \varkappa s = \text{const}$, отсчитываемом от главной нормали к магнитной оси, то для расчета конфигурации можно использовать винтовую симметрию задачи. Выражение для скалярного потенциала в четвертом приближении разложения по ρ

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1; \qquad (14.21)$$

$$\varphi_0 = B_0\left(s - \varkappa\frac{\varepsilon}{2}\rho^2\sin 2\theta - \varkappa\frac{Q}{3}\rho^3\sin 3\theta - \varkappa\frac{G}{4}\rho^4\sin 4\theta\right); \qquad (14.22)$$

$$\varphi_1 = \varkappa B_0\left\{-\frac{k}{8}(1+\varepsilon)\rho^3\sin\theta - \frac{1}{12}\left[(13+5\varepsilon)\frac{k^2}{8} + 2\varepsilon\varkappa^2 + kQ\right]\rho^4\sin 2\theta\right\}. \qquad (14.23)$$

Поверхностная функция ψ легко рассчитывается с учетом винтовой симметрии задачи по формуле (6.61) и оказывается равной

$$\psi = \frac{\varkappa}{2}B_0[(1 + \varepsilon\cos 2\theta)\rho^2 + (\alpha_1\cos\theta + \alpha_3\cos 3\theta)\rho^3 + (\beta_0 + \beta_1\cos 2\theta + \beta_2\cos 4\theta)\rho^4], \qquad (14.24)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{3-\varepsilon}{4}k;\ \beta_0 = \frac{7-\varepsilon}{32}k^2; \\ \alpha_3 &= \frac{2}{3}Q - \frac{\varepsilon}{3}k;\ \beta_1 = \frac{17+\varepsilon}{48}k^2 + \frac{2}{3}\varepsilon\varkappa^2 - \frac{1}{6}kQ; \\ \beta_2 &= -\frac{kQ}{4} + \frac{G}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (14.25)$$

Для числа вращений на длине L получим формулу

$$\mu = \chi'(\Phi) = -\frac{\varkappa L}{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2} + \frac{\varkappa L}{2\pi}\cdot\frac{\Phi}{\pi B_0}\left\{\frac{k^2}{2}(1-\varepsilon) - \varepsilon^2\varkappa^2 - \right.$$
$$- \frac{k}{2}\cdot\frac{(2-\varepsilon)\alpha_1 - 3\varepsilon\alpha_3}{1+\varepsilon} +$$
$$+ \frac{3}{4}\frac{\left(2-2\varepsilon+\varepsilon^2\right)\alpha_1^2 + \left(2+2\varepsilon+5\varepsilon^2\right)\alpha_3^2 - 2\varepsilon(4-\varepsilon)\alpha_1\alpha_3}{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon^2)} -$$
$$\left. - \frac{(2+\varepsilon^2)\beta_0 - 3\varepsilon\beta_1 + 3\varepsilon^2\beta_2}{1-\varepsilon^2}\right\}. \quad (14.26)$$

В линейном по ε приближении эта формула выглядит сравнительно просто:

$$\mu = -\frac{\varkappa L}{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2} + \frac{\varkappa L}{2\pi}\cdot\frac{\Phi}{\pi B_0}\left[\left(\frac{5}{32} - \frac{\varepsilon}{4}\right)k^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{23}{6}\varepsilon kQ + \frac{2}{3}Q^2\right]. \quad (14.27)$$

Это выражение показывает, что при $\varkappa \neq 0$ перекрещенность силовых линий ($\mu' \neq 0$) имеет место и в случае чисто продольного поля B_0 ($\varepsilon = 0$, $Q = 0$). Наличие поля третьей гармоники $Q \neq 0$ всегда увеличивает значение $\mu'(\Phi)$.

Выражение для удельного объема в линейном по Φ приближении:

$$V'(\Phi) = \frac{L}{B_0} + \frac{L\Phi}{\pi B_0^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left\{\frac{k^2}{1-\varepsilon^2}\left[1 + 3\varepsilon^2 - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\varepsilon}{4}(9+7\varepsilon^2)\cos 2\delta\right] + \varepsilon^2\varkappa^2 - 2\varepsilon k\frac{Q}{1+\varepsilon}\right\}. \quad (14.28)$$

Как видно из этого выражения, условием существования магнитной ямы $V''(\Phi) < 0$ является наличие полей второй гармоники $\varepsilon \neq 0$ и третьей гармоники $Q \neq 0$. Относительная глубина магнитной ямы

$$\frac{\delta U}{U} = \frac{V'(0) - V(\Phi)}{V'(0)} = \frac{V''(0)\,\Phi}{V'(0)} \quad (14.29)$$

может быть записана как

$$\frac{\delta U}{U} = \frac{2\varepsilon}{(1+\varepsilon)\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[\frac{Q}{k} - \varepsilon(1+\varepsilon)\frac{\varkappa^2}{2k^2} - \frac{4-5\varepsilon+7\varepsilon^2}{8\varepsilon}\right]k^2\rho_0^2. \quad (14.30)$$

Входящий в выражение для $\delta U/U$ параметр $k^2\rho_0^2 \equiv k^2\Phi/\pi B_0$ ограничен сверху значением $\Phi_{макс}$ на сепаратрисе. В первом приближении поток Φ связан с функцией ψ соотношением $\Phi = \pi\psi/c_0$. Экстраполируя эту зависимость до сепаратрисы, можно получить оценку максимального значения параметра $(k\rho_0)_{макс}$. Полученная таким образом зависимость $(k\rho_0)_{макс}$ от параметра Q/k при разных значениях параметра ε изображена для случая $\varkappa = k$ (рис. 29). Излом кривых при некотором значении Q^*/k, помеченный крестиком,

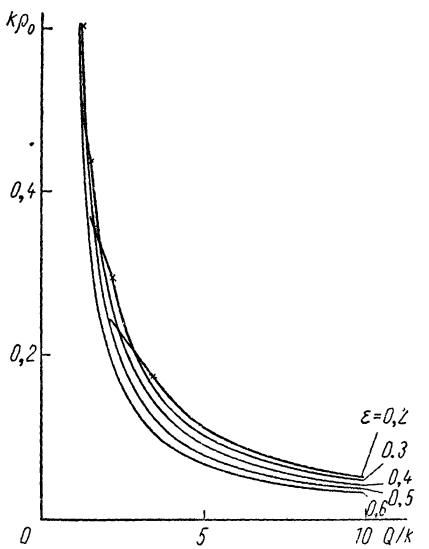


Рис. 29. Отношение максимального эффективного радиуса сечения магнитной поверхности к радиусу кривизны для винтовой конфигурации.

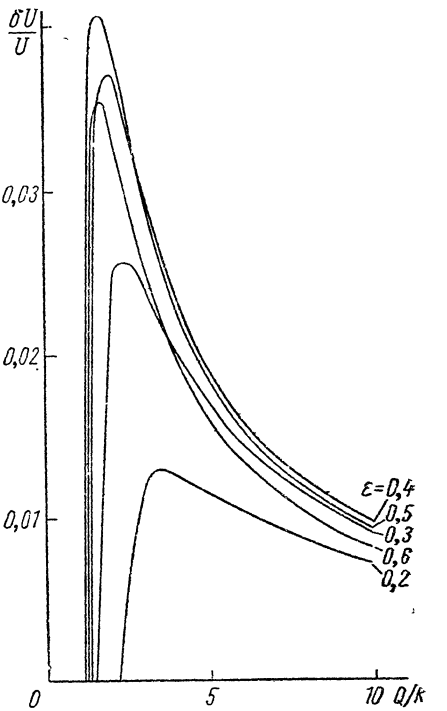


Рис. 30. Зависимость максимального значения относительной глубины магнитной ямы от параметров ε и Q/k, характеризующих величину амплитуд второй и третьей гармоник стабилизирующего поля для винтовой конфигурации.

соответствует перестройке сепаратрисы при $Q = Q^*$. При $Q < Q^*$ сепаратриса имеет одну особую точку (см. рис. 21, *а*); при $Q > Q^*$ — две особые точки (см. рис. 21, *д*); при $Q = Q^*$ — три особые точки (см. рис. 21, *б*).

На рис. 30 показана зависимость максимального значения $\delta U/U$, рассчитанного по формуле (14.30), экстраполированной на всю область, ограниченную сепаратрисой, от параметра Q/k, характеризующего амплитуду поля третьей гармоники, и параметра ε, характеризующего амплитуду поля второй гармоники.

Из графиков видно, что максимальная глубина магнитной ямы $\delta U/U \approx 4\%$, получается при $\varepsilon \sim 0{,}4$, $Q/k \sim 2$.

Необходимое поле второй и третьей гармоник может быть создано токами, расположенными на поверхности $\rho = \rho_M$, с поверхностной плотностью j, определяемой из условия

$$\frac{4\pi}{c} j = B_\omega(\rho_M) = B_0 \varepsilon \theta' \rho_M \cos 2\theta + B_0 Q \theta' \rho_M^2 \cos 3\theta. \quad (14.31)$$

Отсюда видно, что амплитуды полей второй и третьей гармоник имеют следующие порядки величин:

$$\left.\begin{aligned} B_\omega^{(2)}/B_0 &= \varepsilon \rho_M \theta' = \varepsilon \varkappa \rho_M; \\ B_\omega^{(3)}/B_0 &= Q \rho_M^2 \theta' \sim \frac{Q}{k} k \varkappa \rho_M^2. \end{aligned}\right\} \quad (14.32)$$

Амплитуды полей второй и третьей гармоник в оптимальном случае $\varepsilon = 0{,}4$, $Q/k = 2$ при $k = \varkappa$ составляют при $k\rho_M = 0{,}2$ соответственно $B_\omega^{(2)}/B_0 = 8\%$ и $B_\omega^{(3)}/B_0 = 8\%$ от основного продольного магнитного поля. Сечение магнитных поверхностей для оптимального случая показано на рис. 31.

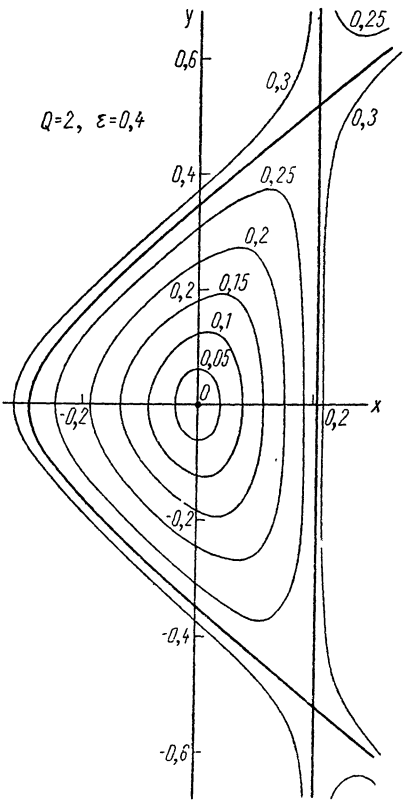


Рис. 31. Сечение магнитных поверхностей винтовой конфигурации в оптимальном с точки зрения глубины магнитной ямы случае. Масштабом длины служит радиус кривизны $1/k$. Цифрами отмечены средние радиусы сечений.

Напомним, что поле второй гармоники может быть создано также наложением на поле третьей гармоники поля первой гармоники (см. § 8).

Б. Для определения удельного объема в квадратичном по Φ приближении необходимо учитывать члены порядка ρ^5. При этих вычислениях ограничимся наиболее простым и интересным случаем «круглых» магнитных поверхностей, когда $\varepsilon = 0$.

В случае $\varepsilon = 0$ разложение скалярного потенциала не содержит квадратичного по ρ члена

$$\varphi = B_0 s + B\rho^3 + C\rho^4 + D\rho^5. \quad (14.33)$$

Подставляя это выражение в уравнения Лапласа (4.2), получаем систему трех уравнений для функций $B(\theta)$, $C(\theta)$ и $D(\theta)$:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{B} + 9B &= -k\varkappa B_0 \sin\theta; \\ \ddot{C} + 16C &= 12kB\cos\theta + k\frac{\partial}{\partial\theta}(\dot{B}\cos\theta) - k^2 B_0 \varkappa \sin 2\theta \\ \ddot{D} + 25D &= 20kC\cos\theta + k\frac{\partial}{\partial\theta}(\dot{C}\cos\theta) - \varkappa^2\ddot{B} - \\ &\quad - 3k^2\varkappa B_0 \cos^2\theta \sin\theta. \end{aligned}\right\} \quad (14.34)$$

Решение этих уравнений запишем в виде

$$\left.\begin{aligned} B &= B_1 \sin\theta + B_3 \sin 3\theta; \\ C &= C_2 \sin 2\theta + C_4 \sin 4\theta; \\ D &= D_1 \sin\theta + D_3 \sin 3\theta + D_5 \sin 5\theta. \end{aligned}\right\} \quad (14.35)$$

Коэффициенты B_3, C_4, D_5 являются свободными, а остальные выражаются через них. Согласно уравнениям (14.34), получаем

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= -\frac{\varkappa k}{8} B_0; \quad B_3 = -\frac{\varkappa Q}{3} B_0; \\ C_2 &= -\frac{\varkappa}{12}\left(\frac{13}{8}k^2 + kQ\right) B_0; \quad C_4 = -\frac{\varkappa G}{4} B_0; \\ D_1 &= -\frac{\varkappa B_0}{24}\left(\frac{63}{32}k^3 + \frac{3}{4}k^2 Q + \frac{k\varkappa^2}{8}\right); \\ D_3 &= -\frac{\varkappa B_0}{16}\left(\frac{163}{96}k^3 + kG + \frac{7}{12}k^2 Q + 3\varkappa^2 Q\right). \end{aligned}\right\} \quad (14.36)$$

Выражение для функции магнитных поверхностей $\psi(\rho, \theta)$ с точностью до членов порядка ρ^5 определим из соотношения (6.61), подставив туда выражение для полей, полученное из потенциала (14.33):

$$\psi = \frac{\varkappa}{2} B_0 (\rho^2 + f_3\rho^3 + f_4\rho^4 + f_5\rho^5). \quad (14.37)$$

Входящие сюда функции $f_i(\theta)$ равны

$$\left.\begin{aligned} f_3 &= \alpha_1 \cos\theta + \alpha_3 \cos 3\theta; \\ f_4 &= \beta_0 + \beta_2 \cos 2\theta + \beta_4 \cos 4\theta; \\ f_5 &= \gamma_1 \cos\theta + \gamma_3 \cos 3\theta + \gamma_5 \cos 5\theta. \end{aligned}\right\} \quad (14.38)$$

Интересующие нас коэффициенты даются выражениями:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{3}{4}k; \quad \beta_2 = \frac{17}{48}k^2 - \frac{kQ}{6}; \\ \alpha_3 &= \frac{2}{3}Q; \quad \beta_4 = -2G - \frac{kQ}{4}; \\ \beta_0 &= \frac{7}{32}k^2; \quad \gamma_1 = \frac{1}{12}\left(\frac{107}{32}k^3 - \frac{k^2 Q}{4} + \frac{5}{8}k\varkappa^2\right). \end{aligned}\right\} \quad (14.39)$$

Величина $V'(\Phi)$, согласно выражениям (13.8) и (13.9), равна

$$V'(\Phi) = \frac{L}{B_0} \cdot \frac{1 - \dfrac{d\psi}{dS} \displaystyle\int_0^{2\pi} k\rho \cos\theta \frac{\rho d\theta}{\partial\psi/\partial\rho}}{1 + \dfrac{d\psi}{dS} \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{B_{1s}}{B_0} \cdot \frac{\rho d\theta}{\partial\psi/\partial\rho}}, \qquad (14.40)$$

где

$$B_{1s} = B_s - B_0. \qquad (14.41)$$

Для нахождения $V'(\Phi)$ с точностью до квадратичных по ψ членов необходимо вычислить входящие сюда интегралы, учитывая члены порядка ρ^5 в разложениях по степеням ρ. Если обозначить через Ψ функцию $2\psi/\varkappa B_0$

$$\Psi = \rho^2 + f_3\rho^3 + f_4\rho^4 + f_5\rho^5, \qquad (14.42)$$

то разложение ρ по степеням $\Psi^{1/2}$ представляется в виде

$$\rho = \Psi^{1/2} - \frac{f_3}{2}\Psi - \frac{1}{2}\left(f_4 - \frac{5}{4}f_3^2\right)\psi^{3/2} - \frac{1}{2}(f_5 - 3f_3f_4 + 2f_3^3)\Psi^2 + \ldots \qquad (14.43)$$

Величины $\rho \Big/ \dfrac{\partial\Psi}{\partial\rho}$ и B_{1s}/B_0 представим в виде разложения по степеням ρ:

$$\frac{2\rho}{\partial\Psi/\partial\rho} = 1 - \frac{3}{2}f_3\rho - \left(2f_4 - \frac{9}{4}f_3^2\right)\rho^2 - \left(\frac{5}{4}f_5 - 6f_3f_4 + \frac{27}{8}f_3^3\right)\rho^3 + \ldots; \qquad (14.44)$$

$$\frac{B_{1s}}{B_0} = k\cos\theta\rho + k^2\cos^2\theta\rho^2 + \left(k^3\cos^3\theta - \frac{\varkappa\dot{B}}{B_0}\right)\rho^3 + \left(k^4\cos^4\theta - \frac{\varkappa\dot{B}}{B_0}k\cos\theta - \frac{\varkappa\dot{C}}{B_0}\right)\rho^4 + \ldots \qquad (14.45)$$

В функции от Ψ входящие в выражение для $V'(\Phi)$ интегралы можно привести к виду

$$\frac{dS}{d\Psi} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[1 - (2f_4 - 3f_3^2)\Psi]\,d\theta; \qquad (14.46)$$

$$\int_0^{2\pi} k\rho\cos\theta\frac{\rho d\theta}{\partial\Psi/\partial\rho} = \frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\cos\theta\{-2f_3\Psi - (3f_5 - 12f_3f_4 + 10f_3^3)\Psi^2\}\,d\theta; \qquad (14.47)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{B_{1s}}{B_0} \frac{\rho d\theta}{\partial\Psi/\partial\rho} = \int_0^{2\pi} k\rho\cos\theta \frac{\rho d\theta}{\partial\Psi/\partial\rho} + \frac{\pi k^2}{2}\Psi + \frac{\Psi^2}{2}\int_0^{2\pi}\Big\{(6k^2 f_3^2 - 3k^2 f_4 +$$

$$+ k^4\cos^2\theta)\cos^2\theta + 3\varkappa f_3 \frac{\dot{B}}{B_0} - 3k^3 f_3\cos^3\theta - \frac{\varkappa\dot{B}}{B_0} k\cos\theta - \frac{\varkappa\dot{C}}{B_0}\Big\} d\theta. \tag{14.48}$$

В линейном по Ψ приближении производная $d\Phi/d\Psi$, входящая в знаменатель выражения $dV/d\Phi$, равна

$$\frac{d\Phi}{d\Psi} = \pi B_0\left[1 + \left(\frac{5}{32}k^2 + \frac{2}{3}Q^2\right)\Psi\right]. \tag{14.49}$$

Отсюда с точностью до Φ^2 имеем

$$\Psi = \frac{\Phi}{\pi B_0} - \left(\frac{5}{64}k^2 + \frac{Q^2}{3}\right)\frac{\Phi^2}{\pi^2 B_0^2}. \tag{14.50}$$

Подставляя это значение Ψ во входящие в формулу для $dV/d\Phi$ интегралы (14.46), (14.48) и производя вычисления интегралов, приходим к следующей формуле для удельного объема $V'(\Phi)$ в квадратичном по Φ приближении при $\varepsilon = 0$:

$$V'(\Phi) = \frac{L}{B_0}\left\{1 + \frac{k^2\Phi}{\pi B_0} + \left[\frac{15}{64}k^2\varkappa^2 + \frac{35}{24}k^3 Q + (\varkappa^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 5k^2)Q^2 - 2kQG\right]\frac{\Phi^2}{\pi^2 B_0^2}\right\}. \tag{14.51}$$

Если ограничиться учетом членов с k и $\varkappa$, имеющих степени не выше второй, то полученное выражение можно переписать в виде

$$V'(\Phi) = \frac{L}{B_0}\left\{1 + k^2\frac{\Phi}{\pi B_0} + \left[(5k^2 + \varkappa^2)Q^2 - 2kQG\right]\frac{\Phi^2}{\pi^2 B_0^2}\right\}. \tag{14.52}$$

Величина продольного потока определяет радиус магнитной поверхности ρ:

$$\pi\rho^2 B_0 \approx \Phi. \tag{14.53}$$

Выражение (14.52) показывает, что при $\varepsilon = 0$ условие наличия магнитной ямы $V''(\Phi) < 0$ может быть выполнено на некотором расстоянии от магнитной оси $\rho > \rho_1$ только при наличии как третьей ($Q \neq 0$), так и четвертой ($G \neq 0$) гармоник «стабилизирующего» поля. При малых $k\rho$ и $\varkappa\rho$ радиус ρ_1 определяется выражением

$$\rho_1^2 = \frac{k^2}{2kQG - (5k^2 + \varkappa^2)Q^2}. \tag{14.54}$$

Для существования такого радиуса необходимо, чтобы величина $2kQG$ была положительной и превосходила второй член в знаменателе формулы (14.54). Радиус ρ_1, определенный формулой (14.54), минимален, когда

$$kG = (5k^2 + \varkappa^2)\,Q, \tag{14.55}$$

и равен при этом

$$\rho_{1\text{мин}} = \frac{k}{\sqrt{5k^2 + \varkappa^2}\,Q}. \tag{14.56}$$

При $Q \gg k$ радиус сепаратрисы определяется амплитудой поля третьей гармоники

$$\rho_S \approx \frac{1}{|Q|}. \tag{14.57}$$

Следовательно, при $\varkappa = k$ минимальный радиус перехода к области, где $V''(\Phi) < 0$, связан с ρ_S соотношением

$$\rho_{1\text{мин}} = \frac{\rho_S}{\sqrt{6}}. \tag{14.58}$$

Рис. 32. Магнитная яма, удаленная от оси.

Схематический вид магнитной ямы при $\varepsilon = 0$ показан на рис. 32.

3. Замкнутые однородные конфигурации

Рассмотрим теперь конфигурации, магнитная ось которых представляет собой замкнутую кривую, характеризующуюся кривизной $k(s)$ и кручением $\varkappa(s)$. Предположим, что продольное магнитное поле, а также амплитуда и скорость вращения поля второй гармоники постоянны:

$$B_0 = \text{const}; \quad \varepsilon = \text{const}; \quad u' = -\frac{\alpha(L)}{L} + \frac{2\pi}{L} n = \text{const}. \tag{14.59}$$

Величины $Q(s)$ и $P(s)$, характеризующие поле третьей гармоники, разложим в ряды Фурье:

$$Q(s) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} Q_l\, e^{i\frac{2\pi l}{L}s}; \tag{14.60}$$

$$P(s) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} P_l e^{i\frac{2\pi l}{L}s}. \tag{14.61}$$

Предположение $u' = \text{const}$ означает, что

$$\delta = \frac{2\pi}{L} ns + \alpha(s) - \frac{\alpha(L)}{L}\, s; \tag{14.62}$$

$$v(s) = \frac{2\pi n - \alpha(L)}{L} \sqrt{1 - \varepsilon^2 s} = \frac{v(L)}{L}\, s. \tag{14.63}$$

Из выражений (9.12) и (9.13) следует, что при условии $v(s) - \frac{v(L)}{L}\, s = 0$ функции $F_m(s)$, $\sigma_m(s)$ можно представить обычными рядами Фурье:

$$F_m(s) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} F_{ml} e^{i\frac{2\pi l}{L}s}; \quad F_{ml} = \frac{1}{L}\oint F_m(s)\, e^{-i\frac{2\pi l}{L}s}; \qquad (14.64)$$

$$\sigma_m(s) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sigma_{ml} e^{i\frac{2\pi l}{L}s} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{i\, LF_{ml}}{mv(L) - 2\pi l} e^{i\frac{2\pi l}{L}s}. \qquad (14.65)$$

Как видно из выражений (6.43)—(6.49), для определения фурье-компонент F_{ml} достаточно знать фурье-компоненты производных $(k\cos\delta)'$, $(k\sin\delta)'$, Q', P'.

Разложения функций $k\cos\delta$, $k\sin\delta$ в ряды Фурье легко получить из разложения функции $ke^{-i\delta}$, которая после подстановки в нее значения фазы δ принимает вид

$$ke^{-i\delta} = K(s)\, e^{i\frac{2\pi}{L}ns} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} k_{l+n} e^{i\frac{2\pi l}{L}s}, \qquad (14.66)$$

где k_l — коэффициенты фурье-разложения относительной кривизны

$$K(s) = k(s)\, e^{-i[\alpha(s) - \alpha(L)\, s/L]} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} k_l e^{i\frac{2\pi l}{L}s}. \qquad (14.67)$$

Из соотношения (14.66) следует

$$k\cos\delta = \frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{\infty} (k_{n+l} + k^*_{n-l})\, e^{i\frac{2\pi}{L}ls}; \qquad (14.68)$$

$$k\sin\delta = \frac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{\infty} (k_{n+l} + k^*_{n-l})\, e^{i\frac{2\pi l}{L}s}. \qquad (14.69)$$

Используя приведенные разложения, нетрудно написать формулы для фурье-компонент функций σ_1, σ_3, определяющих параметры магнитных поверхностей в третьем приближении разложения по ρ:

$$\sigma_{1l} = \frac{\pi l\varepsilon/2}{[\alpha(L) - 2\pi n]\sqrt{1-\varepsilon^2} + 2\pi l}\{(3-5\varepsilon)(k_{n+l} + k^*_{n+l})\, e^{-\eta/2} +$$

$$+ (3+5\varepsilon)(k_{n+l} - k^*_{n-l})\, e^{\eta/2} + \frac{8}{3}[(2-\varepsilon)Q_l e^{-\eta/2} + i(2+\varepsilon)P_l e^{\eta/2}]\}; \qquad (14.70)$$

$$\sigma_{3l} = \frac{\pi l\varepsilon/6}{3[\alpha(L) - 2\pi n]\sqrt{1-\varepsilon^2} + 2\pi l}\{-(7-\varepsilon)(k_{n+l} + k^*_{n-l})\,e^{-\eta/2} +$$

$$+ (7+\varepsilon)(k_{n+l} - k^*_{n-l})\,e^{\eta/2} + 8\varepsilon\,(Q_l e^{-\eta/2} + i P_l e^{\eta/2})\}. \qquad (14.71)$$

Используя эти разложения, можно рассчитать все характеристики конфигурации. Входящие в формулу для удельного объема средние значения произведений $\overline{Qk\cos\delta}$, $\overline{Pk\sin\delta}$, $\overline{\mathrm{Re}\,\sigma_1 k\cos\delta}$, $\overline{\mathrm{Im}\,\sigma_1 k\sin\delta}$ выражаются через сумму билинейных комбинаций соответствующих фурье-компонент:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{Qk\cos\delta} &= Q_0\,\mathrm{Re}\,k_n + \mathrm{Re}\sum_{l=1}^{\infty}(k_{n+l}Q^*_l + k_{n-l}Q_l);\\
\overline{Pk\sin\delta} &= -P_0\,\mathrm{Im}\,k_n - \mathrm{Im}\sum_{l=1}^{\infty}(k_{n+l}P^*_l + k_{n-l}P_l);
\end{aligned}\right\} \qquad (14.72)$$

$$\left.\begin{aligned}
\overline{k\cos\delta\,\mathrm{Re}\,\sigma_1} &= \mathrm{Re}\,\sigma_0\,\mathrm{Re}\,k_n + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\sum_{l=1}^{\infty}[k_{n+l}(\sigma^*_l + \\
&\quad + \sigma_{-l}) + k_{n-l}(\sigma_l + \sigma^*_{-l})];\\
\overline{k\sin\delta\,\mathrm{Im}\,\sigma_1} &= -\mathrm{Im}\,\sigma_0\,\mathrm{Im}k_n - \frac{1}{2}\mathrm{Re}\sum_{l=1}^{\infty}k_{n+l}(\sigma^*_l - \\
&\quad - \sigma_{-l}) - k_{n-l}(\sigma_l - \sigma^*_{-l})].
\end{aligned}\right\} \qquad (14.73)$$

В аналогичной форме можно записать усредненные по длине системы функции k^2 и $k^2\sin^2\delta$:

$$\overline{k^2} = |k_n|^2 + \sum_{l=1}^{\infty}(|k_{n+l}|^2 + |k_{n-l}|^2); \qquad (14.74)$$

$$\overline{k^2\sin^2\delta} = (\mathrm{Im}\,k_n)^2 + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}(|k_{n+l}|^2 + |k_{n-l}|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,k_{n+l}k_{n-l}). \qquad (14.75)$$

Рассмотрим конфигурацию магнитного поля, скалярный потенциал которого без учета поправок на кривизну задан в виде

$$\varphi = B_0\left\{s + \frac{\varepsilon}{2}u'\rho^2\sin 2u + \right.$$

$$\left. + \frac{2\pi p - 3\alpha(L)}{9L}q\rho^3\sin\left[3\left(\omega - \frac{\alpha(L)}{L}s\right) + \frac{2\pi}{L}ps\right]\right\}.$$

При таком задании потенциала коэффициенты разложения функций $Q(s), P(s)$ имеют следующие значения:

$$\left.\begin{aligned} Q_l = P_l = 0 \quad (l \neq \pm m); \\ Q_m = Q_{-m} = q/2; \quad P_m = -P_{-m} = q/2i, \end{aligned}\right\} \tag{14.76}$$

где

$$m = 3n - p. \tag{14.77}$$

Число вращения μ в такой конфигурации определяется при $\varepsilon = 0$ в пренебрежении членами, связанными с кривизной, формулой

$$\mu = \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{q^2}{B_0} \left(\frac{\alpha(L)}{2\pi} - \frac{p}{3} \right) \Phi. \tag{14.78}$$

Удельный объем (13.26) после подстановки в него выражений (14.70)—(14.73) принимает вид

$$\begin{aligned} V'(\Phi) = \frac{L}{B_0} + \frac{\Phi L}{\pi B_0^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}} \left\{ \frac{\bar{k}^2}{1-\varepsilon^2} \left[1 + 3\varepsilon^2 - \frac{\varepsilon}{4}(9 + 7\varepsilon^2) \right] + \right. \\ + \frac{\varepsilon}{2} \frac{9 + 7\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \overline{k^2 \sin^2 \delta} + \varepsilon^2 \frac{[\alpha(L) - 2\pi n]^2}{L^2} - \\ - \varepsilon q \left[\frac{\operatorname{Re}(k_{n+m} + k_{n-m})}{1+\varepsilon} - \frac{\operatorname{Re}(k_{n+m} - k_{n-m})}{1-\varepsilon} \right] + \\ + \frac{\varepsilon q}{[\alpha(L) - 2\pi n]^2 (1-\varepsilon^2) - 4\pi^2 m^2} [(\alpha - 2\pi n) \operatorname{Re}(k_{n+m} + k_{n-m}) e^{-\eta/2} + \\ + \frac{2\pi m}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} e^{\eta/2} \operatorname{Re}(k_{n+m} - k_{n-m})] + \\ + \pi\varepsilon \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{5l\varepsilon [\alpha(L) - 2\pi n] (|k_{n+l}|^2 - |k_{n-l}|^2)}{[\alpha(L) - 2\pi n]^2 (1-\varepsilon^2) - 4\pi^2 l^2} + \right. \\ \left. + \frac{\frac{4\pi l^2}{1-\varepsilon^2} [4\varepsilon (|k_{n+l}|^2 + |k_{n-l}|^2) - (3 + 5\varepsilon) \operatorname{Re}(k_{n+l} k_{n-l})]}{[\alpha(L) - 2\pi n]^2 (1-\varepsilon^2) - 4\pi^2 l^2} \right\}. \end{aligned} \tag{14.79}$$

Эта формула позволяет выяснить наличие магнитной ямы в центре тороидальной конфигурации для весьма широкого класса систем.

Рассмотрим сначала, как происходит переход к простейшему случаю систем с постоянной относительной кривизной магнитной оси, когда из всех коэффициентов k_l разложения относительной кривизны отличен от нуля только нулевой коэффициент k_0. Это системы с круговой и винтовой магнитными осями.

Во всех суммах по l, входящих в выражение для $V'(\Phi)$, отличны от нуля при $l = n \neq 0$ только слагаемые с $|k_{n-l}|^2$. По-

этому, например,

$$\overline{k^2} = k_0^2;\ \overline{k^2 \sin^2 \delta} = \frac{1}{2} k_0^2 (1 - \delta_{n0}), \tag{14.80}$$

где $\delta_{n0} = 0$ при $n \neq 0$ и $\delta_{n0} = 1$ при $n = 0$.

Слагаемое, пропорциональное q, отлично от нуля только при $m = n$ ($p = 2n$) или $m = -n$ ($p = 4n$).

Последний член, содержащий сумму по l, принимает вид

$$\pi\varepsilon^2 k_0^2 \frac{26\pi n^2 - 10\pi n^2\varepsilon^2 - 5\alpha n (1 - \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2)[\alpha^2 - 4\alpha\pi n - 4\pi^2 n^2 \varepsilon^2]}. \tag{14.81}$$

Когда $\varepsilon \to 0$, это выражение обращается в нуль, если $\alpha = \alpha(L) \neq 0$. Если же $\alpha = 0$, то это выражение в случае $\varepsilon \to 0$ стремится к $-\frac{13}{2} k_0^2$. При этом удельный объем стремится к значению

$$V'(\Phi) = \frac{L}{B_0} - \frac{\Phi L}{\pi B_0^2} \cdot \frac{11}{2} k_0^2. \tag{14.82}$$

Так как $V''(\Phi) < 0$, то имеется магнитная яма, в то время как при $\alpha \neq 0$ и $\varepsilon = 0$ $V''(\Phi) = \frac{L}{\pi B_0^2} k_0^2$ и ямы не существует. Такое различие в результатах при небольших изменениях значений α, ε связано с тем, что в случае $\varepsilon = \alpha = 0$ угол прокручивания силовых линий в окрестности оси обращается в нуль и конфигурация становится очень чувствительной к изменению ее параметров. Этот вывод сохраняет силу и для конфигураций с переменными кривизной и кручением. При $\alpha \neq 0$ результат (14.82) получается при условии

$$4\pi^2 n^2 \varepsilon^2 \gg \alpha^2 - 4\alpha\pi n. \tag{14.83}$$

Рассмотрим более подробно условия наличия магнитной ямы в однородных конфигурациях двух типов: в конфигурации, ось которой является замкнутой кривой, лежащей в плоскости (конфигурация, подобная рейстрековому стелларатору); и в конфигурации с пространственной магнитной осью (подобной стелларатору в форме восьмерки).

4. Однородные конфигурации с круговой магнитной осью

Простейшей конфигурацией первого типа является конфигурация с круговой осью. Магнитные поверхности в такой системе образуются продольным магнитным полем при наложении поля винтовых обмоток. При этом магнитные поверхности прокручиваются вокруг круговой оси радиуса R (см. рис. 14). Примем скорость прокручивания постоянной

$$\delta' = \frac{2\pi}{L} n = \text{const}. \tag{14.84}$$

При этом выражение (13.26) для $V'(\Phi)$ может быть записано в виде

$$V'(\Phi) = \frac{L}{B_0} - \frac{\Phi L}{\pi B_0^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}} \left\{ -k^2 \frac{1+3\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} - \varepsilon^2 \delta'^2 + 2k\varepsilon \left(\frac{\overline{Q\cos\delta}}{1+\varepsilon} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\overline{P\sin\delta}}{1-\varepsilon} \right) - \overline{W} \right\}, \qquad (14.85)$$

где $L = 2\pi R$, а чертой сверху обозначено усреднение по s. Отличный от нуля вклад в $V'(\Phi)$ дают слагаемые с Q и P, пропорциональные соответственно $\cos\delta$ и $\sin\delta$.

Положим

$$Q = Q_1 \cos\delta; \quad P = P_1 \sin\delta. \qquad (14.86)$$

Вычисление $\overline{W}$ по формуле (13.27) после решения уравнения (6.47) приводит к выражению

$$\overline{W} = -\frac{k^2}{2} \cdot \frac{13-5\varepsilon}{1-\varepsilon^2} + \frac{k}{3\varepsilon} \cdot \frac{4-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} [(1-\varepsilon) Q_1 + (1+\varepsilon) P_1]. \qquad (14.87)$$

Подставляя его в (14.85), находим

$$V'(\Phi) = \frac{L}{B_0} - \frac{\Phi L}{\pi B_0^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}} \left\{ \frac{11}{2} k^2 - \varepsilon^2 \delta'^2 - \frac{4k}{3\varepsilon} [(1-\varepsilon) Q_1 + \right.$$

$$\left. + (1+\varepsilon) P_1] \right\}. \qquad (14.88)$$

Требующееся для создания данной конфигурации магнитное поле описывается скалярным потенциалом

$$\varphi = B_0 s + B_0 \frac{\varepsilon}{2} \delta' \rho^2 \sin 2(\omega + \delta' s) + B_0 \frac{\delta'}{9} \rho^3 [(Q_1 + P_1) \sin(3\omega +$$

$$+ 2\delta' s) + 2(Q_1 - P_1) \sin(3\omega + 4\delta' s)]. \qquad (14.89)$$

Поле второй гармоники представляет собой двухзаходное винтовое поле с периодом $2\pi R/n$. Поле третьей гармоники является суперпозицией двух трехзаходных полей, делающих соответственно $2n/3$ и $4n/3$ оборотов вокруг оси при обходе вдоль всей системы. От гармоник с другим числом обходов выражение для $V'(\Phi)$ не зависит.

При отсутствии поля третьей гармоники, когда $Q_1 = P_1 = 0$, поле, описываемое потенциалом (14.89), является полем двухзаходного стелларатора. Условие наличия магнитной ямы в этом случае таково:

$$\varepsilon^2 < \frac{11}{2} \cdot \frac{k^2}{\delta'^2} = \frac{11}{2n^2}. \qquad (14.90)$$

Относительная глубина ямы $\delta U/U$ в однородных системах с круговой осью, согласно формулам (14.29), (14.88), равна

$$\frac{\delta U}{U} = k^2\rho_0^2 \frac{11/2 - \varepsilon^2 n^2 - 4\left[(Q_1 + P_1) - \varepsilon(Q_1 - P_1)\right]/3k\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \quad (14.91)$$

где ρ_0 — средний радиус сечения плазменного шнура, определяемый соотношением

$$\pi\rho_0^2 B_0 = \Phi. \quad (14.92)$$

Эффективный радиус потенциальной ямы ρ_0, от которого зависит ее глубина, ограничен сверху поперечным размером установки либо размером сепаратрисы. Параметры сепаратрисы в сечении $s = \text{const}$, где $\delta(s) = 0, \pi/2$, определяются следующими комбинациями параметров $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$:

$$\lambda_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{k}; \quad \lambda_2 = \frac{3\alpha_3 - \alpha_1}{k}; \quad \lambda_3 = \frac{\alpha_2 - \alpha_4}{k}; \quad \lambda_4 = \frac{3\alpha_4 + \alpha_2}{k}. \quad (14.93)$$

Выражения для параметров $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ оказываются довольно громоздкими:

$$\frac{\alpha_1}{\cos\delta} = \frac{\left(\frac{16}{3} - 2\varepsilon^2\right)Q_1 + \left(\frac{16}{3} + \frac{32}{3}\varepsilon + 6\varepsilon^2\right)P_1}{(8 - 9\varepsilon^2)\varepsilon} - \frac{20 + 25\varepsilon + 12\varepsilon^2 - \frac{9}{4}\varepsilon^3}{8 - 9\varepsilon^2} k; \quad (14.94)$$

$$\frac{\alpha_2}{\sin\delta} = \frac{\left(\frac{16}{3} - 2\varepsilon^2\right)P_1 + \left(\frac{16}{3} - \frac{32}{3}\varepsilon + 6\varepsilon^2\right)Q_1}{(8 - 9\varepsilon^2)\varepsilon} - \frac{20 - 25\varepsilon + 12\varepsilon^2 + \frac{9}{4}\varepsilon^3}{8 - 9\varepsilon^2} k; \quad (14.95)$$

$$\frac{\alpha_3}{\cos\delta} = \frac{\left(8 - \frac{4}{3}\varepsilon - 6\varepsilon^2\right)Q_1 + \left(\frac{8}{3} + 4\varepsilon + 2\varepsilon^2\right)P_1}{8 - 9\varepsilon^2} - \varepsilon\frac{18 + \frac{23}{4}\varepsilon - 3\varepsilon^2}{8 - 9\varepsilon^2}; \quad (14.96)$$

$$\frac{\alpha_4}{\sin\delta} = \frac{\left(8 + \frac{4}{3}\varepsilon - 6\varepsilon^2\right)P_1 + \left(\frac{8}{3} - 4\varepsilon + 2\varepsilon^2\right)Q_1}{8 - 9\varepsilon^2} - \varepsilon\frac{18 - \frac{23}{4}\varepsilon - 3\varepsilon^2}{8 - 9\varepsilon^2}. \quad (14.97)$$

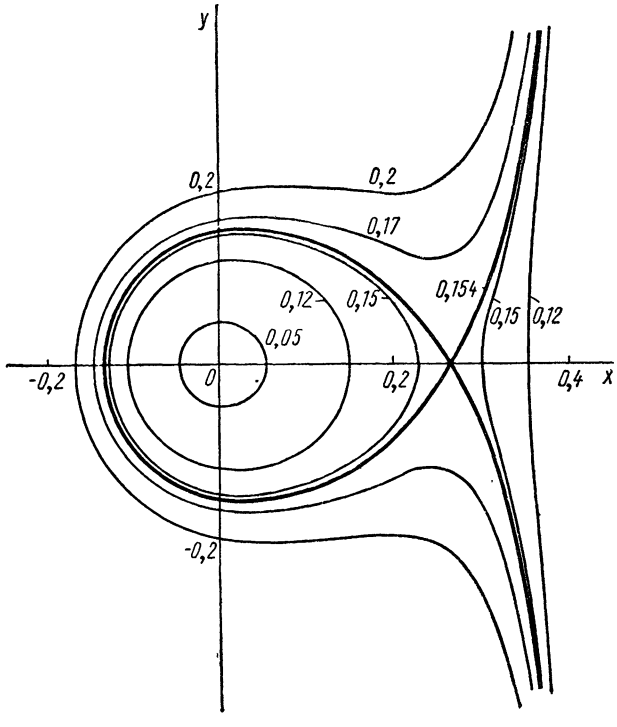


Рис 33. Сечения магнитных поверхностей двухзаходного стелларатора с круговой магнитной осью, $\varepsilon = 0$. За масштаб длины принят радиус кривизны $1/k$. Цифрами отмечены средние радиусы сечений.

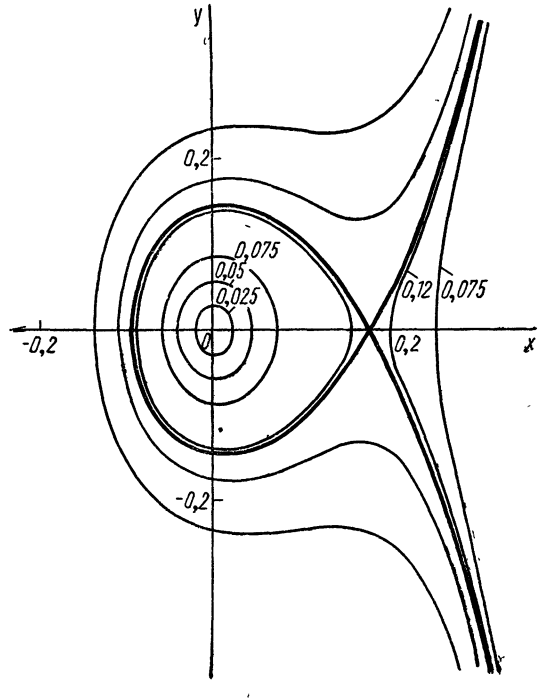


Рис. 34. Сечения магнитных поверхностей двухзаходного стелларатора с круговой магнитной осью, $\varepsilon = 0{,}3$. За масштаб длины принят радиус кривизны $1/k$. Цифрами отмечены средние радиусы сечений.

Сечения магнитных поверхностей для некоторых значений параметров ε, Q_1, P_1 изображены на рис. 33, 34, 35. Численные расчеты магнитных поверхностей двухзаходного стелларатора выполнены в работе [43]. Следует иметь в виду, что при учете в разложении ψ по степеням ρ четвертой степени ρ в системе магнитных поверхностей появляется вторая сепаратриса двухзаходного

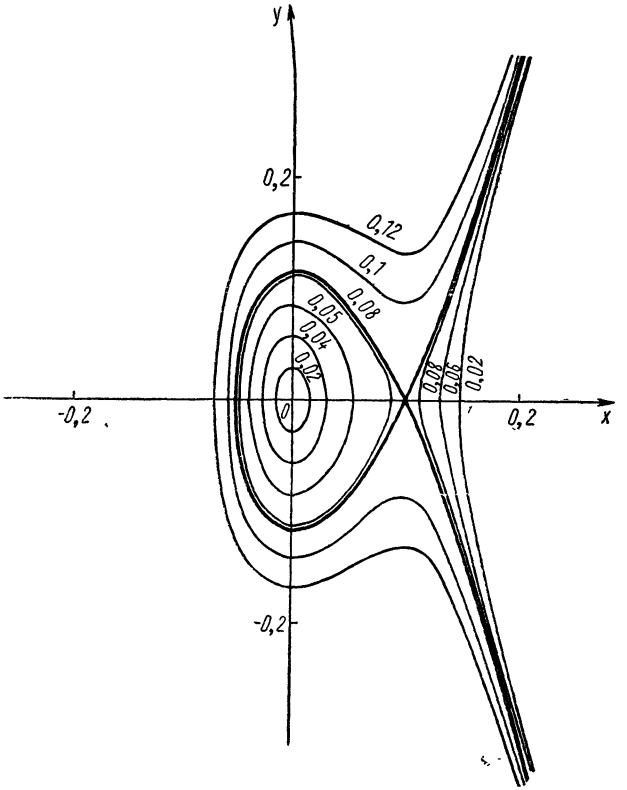


Рис. 35. Сечения магнитных поверхностей двухзаходного стелларатора с круговой магнитной осью, $\varepsilon = 0{,}6$. За масштаб длины принят радиус кривизны $1/k$. Цифрами отмечены средние радиусы сечений.

стелларатора, не связанная с кривизной системы. Поэтому картина, представленная на рис. 33, 34, 35, не является полной.

Экстраполируя выражение для $V''(\Phi)$, справедливое лишь при $\rho \ll \rho_S$ (ρ_S — координата ребра сепаратрисы), на всю область, ограниченную сепаратрисой, и определяя максимальное значение ρ_0 по максимальному значению ψ на сепаратрисе с помощью приближенного соотношения $\Phi = \pi\psi/c_0$, можно оценить относительную глубину магнитной ямы $\delta U/U$. На рис. 36 показана зависимость $\delta U/U$ от ε при разных значениях числа периодов n двухзаходного стелларатора, когда $Q_1 = P_1 = 0$. Максимальная

глубина магнитной ямы получается при $\varepsilon = 0$. Случай $\varepsilon = 0$ не является, однако, благоприятным с точки зрения устойчивости конфигурации относительно возмущений поля, поскольку при $\varepsilon \to 0$ угол прокручивания силовых линий

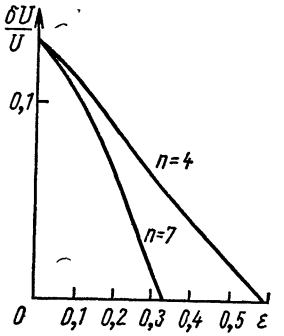


Рис. 36. Зависимость $\delta U/U$ от параметра ε для двухзаходного стелларатора.

$$\iota = 2\pi n(1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}) \approx \pi n \varepsilon^2 \quad (14.98)$$

стремится к нулю. При этом стремится к нулю, очевидно, и критическое значение β, определяемое из условий равновесия плазмы (см. § 11).

Заметим, что наличие поля третьей гармоники позволяет удовлетворить условию $V''(\Phi) < 0$ и при $\varepsilon^2 n^2 > \frac{11}{2}$. Однако это поле приводит к еще большему уменьшению размеров сепаратрисы и, следовательно, к уменьшению значения $\delta U/U$.

5. Однородные конфигурации с пространственной магнитной осью

Для определения характеристик тороидальных конфигураций с пространственной магнитной осью необходимо знать кривизну $k(s)$ и кручение $\varkappa(s)$ магнитной оси. Рассмотрим конфигурацию, образующуюся внутри соленоида, обвивающего круглый тор [44]. Магнитная ось при этом обвивает круглый тор, большой и малый радиусы которого обозначим соответственно R и r_0 (рис. 37). Уравнение магнитной оси можно записать в виде

$$\mathbf{r} = R\,\mathbf{e}_R + r_0\,\mathbf{e}_{r_0}, \quad (14.99)$$

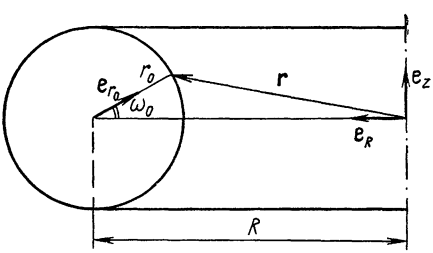


Рис. 37. К выводу формул для кривизны и кручения винтовой линии на торе.

где

$$\mathbf{e}_{r_0} = \mathbf{e}_z \sin\omega_0 - \mathbf{e}_R \cos\omega_0. \quad (14.100)$$

Учитывая, что $\frac{\partial \mathbf{e}_R}{\partial\varphi} = \mathbf{e}_\varphi$, находим из (14.99) и (14.100)

$$d\mathbf{r} = \left(1 - \frac{r_0}{R}\cos\omega_0\right)\mathbf{e}_\varphi ds_0 + r_0(\mathbf{e}_R \sin\omega_0 + \mathbf{e}_z \cos\omega_0)\,d\omega_0, \quad (14.101)$$

где $ds_0 = R d\varphi$ — элемент дуги оси тора. Координата s для винтовой линии, обвивающей тор, является функцией азимутально-

го угла ω_0. Введем для производной этой функции обозначение, определяющее новую функцию $\hbar$:

$$\frac{ds}{d\omega_0} = \frac{\hbar(\omega_0)}{1 - \frac{r_0}{R}\cos\omega_0}. \tag{14.102}$$

Из (14.101) получаем выражение для элемента дуги винтовой линии

$$ds^2 = |d\mathbf{r}|^2 = [\hbar^2(\omega_0) + r_0^2]\, d\omega_0^2. \tag{14.103}$$

Величина $2\pi\hbar(\omega_0)$ представляет собой шаг (период) винтовой линии, являющийся в общем случае функцией азимутального уг-

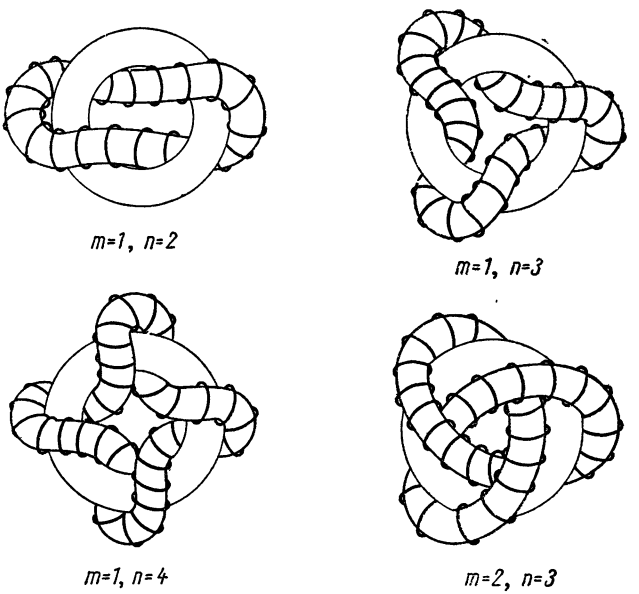


Рис. 38. Замкнутые винтовые конфигурации.

ла ω_0. Условием замыкания винтовой линии, намотанной на тор, служит требование

$$2\pi R\,\frac{m}{n} = \int_0^{2\pi} \frac{\hbar(\omega_0)\,d\omega_0}{1 - \frac{r_0}{R}\cos\omega_0}, \tag{14.104}$$

где m и n — целые числа; n — число оборотов вокруг магнитной оси; m — число обходов вдоль тора (рис. 38). Положив

$$\frac{\hbar(\omega_0)}{1 - \frac{r_0}{R}\cos\omega_0} = \left[1 + \frac{r_0}{R} f(\omega_0)\right]\frac{m}{n} R, \tag{14.105}$$

получим условие замыкания в виде

$$\int_0^{2\pi} f(\omega_0)\, d\omega_0 = 0. \qquad (14.106)$$

Кривизна $k(\omega_0)$ и кручение $\varkappa(\omega_0)$ линии $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\omega_0)$, заданные в функции параметра ω_0, связь которого с натуральным параметром s определяется формулой (14.103), вычисляются по известным формулам дифференциальной геометрии [17]:

$$k(\omega_0) = \frac{\left|\left[\frac{d\mathbf{r}}{d\omega_0}\,\frac{d^2\mathbf{r}}{d\omega_0^2}\right]\right|}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{d\omega_0}\right|^3}; \quad \varkappa(\omega_0) = \frac{\left[\left[\frac{d\mathbf{r}}{d\omega_0}\,\frac{d^2\mathbf{r}}{d\omega_0^2}\right]\frac{d^3\mathbf{r}}{d\omega_0^3}\right]}{\left[\left[\frac{d\mathbf{r}}{d\omega_0}\,\frac{d^2\mathbf{r}}{d\omega_0^2}\right]\right]^2}. \qquad (14.107)$$

Используя соотношения

$$\frac{\partial \mathbf{e}_R}{\partial \omega_0} = \frac{\mathbf{e}_\varphi}{R}\,\frac{\hbar(\omega_0)}{1-\frac{r_0}{R}\cos\omega_0}; \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \omega_0} = -\frac{\mathbf{e}_R}{R}\,\frac{\hbar(\omega_0)}{1-\frac{r_0}{R}\cos\omega_0}, \qquad (14.108)$$

нетрудно найти с помощью уравнений (14.103) и (14.104) входящие в формулы для кривизны и кручения производные:

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\omega_0} = r_0(\mathbf{e}_R\sin\omega_0 + \mathbf{e}_z\cos\omega_0) + \hbar(\omega_0)\,\mathbf{e}_\varphi; \qquad (14.109)$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{d\omega_0^2} = -\left[r_0\cos\omega_0 - \frac{\hbar^2(\omega_0)}{R - r_0\cos\omega_0}\right]\mathbf{e}_R + \left[r_0\,\frac{\hbar(\omega_0)\sin\omega_0}{R - r_0\cos\omega_0} + \frac{\partial\hbar}{\partial\omega_0}\right]\mathbf{e}_\varphi - r_0\sin\omega_0\,\mathbf{e}_z; \qquad (14.110)$$

$$\frac{d^3\mathbf{r}}{d\omega_0^3} = -\left[r_0\sin\omega_0 + \frac{3h(\omega_0)\frac{d\hbar}{d\omega_0}}{R - r_0\cos\omega_0}\right]\mathbf{e}_R + \left[2r_0\,\frac{\hbar(\omega_0)\cos\omega_0}{R - r_0\cos\omega_0} - \frac{\hbar^3(\omega_0)}{(R - r_0\cos\omega_0)^2} + \frac{d^2\hbar}{d\omega_0^2} + r_0\,\frac{\frac{d\hbar}{d\omega_0}\sin\omega_0}{R - r_0\cos\omega_0} - r_0^2\,\frac{\hbar(\omega_0)\sin^2\omega_0}{(R - r_0\cos\omega_0)^2}\right]\mathbf{e}_\varphi - r_0\cos\omega_0\,\mathbf{e}_z. \qquad (14.111)$$

Подставляя эти производные в формулы (14.107), после соответствующих расчетов получаем

$$k(\omega_0) = (r_0^2 + \hbar^2)^{-3/2}\left\{r_0^4 + r_0^2\left(\frac{d\hbar}{d\omega_0}\right)^2 + 2r_0\,\frac{(r_0^2+\hbar^2)\hbar\,\frac{d\hbar}{d\omega_0}\sin\omega_0}{R - r_0\cos\omega_0} + \right.$$

$$+\frac{r_0^2\left(r_0^2+R^2+2r_0^2\cos^2\omega_0-4r_0R\cos\omega_0\right)\hbar^2}{(R-r_0\cos\omega_0)^2}+$$

$$+\frac{\left[r_0\left(r_0\cos^2\omega_0+2r_0-2R\cos\omega_0\right)+\hbar^2\right]\hbar^4}{(R-r_0\cos\omega_0)^2}\Bigg\}^{1/2}; \qquad (14.112)$$

$$\varkappa(\omega_0)=\Bigg[r_0^2\frac{d^2\hbar}{d\omega_0^2}+\frac{\left(r_0^3\sin\omega_0+3r_0\cos\omega_0\hbar\frac{d\hbar}{d\omega_0}\right)\frac{d\hbar}{d\omega_0}-r_0\hbar^2\frac{d^2\hbar}{d\omega_0^2}\cos\omega_0}{R-r_0\cos\omega_0}+$$

$$+\frac{r_0^2\left(R^2-r_0^2\right)\hbar+r_0\left(3R-r_0\cos\omega_0\right)\hbar^2\frac{d\hbar}{d\omega_0}\sin\omega_0}{(R-r_0\cos\omega_0)^2}+$$

$$+\frac{r_0\left(2r_0^2-R^2+\hbar^2\right)\cos\omega_0-r_0^2R}{(R-r_0\cos\omega_0)^3}\hbar^3\Bigg]\Bigg[r_0^4+r_0^2\left(\frac{d\hbar}{d\omega_0}\right)^2+$$

$$+2r_0\frac{\left(r_0^2+\hbar^2\right)\hbar\frac{d\hbar}{d\omega_0}\sin\omega_0}{R-r_0\cos\omega_0}+$$

$$+\frac{r_0^2\left(R^2+r_0^2-4Rr_0\cos\omega_0+2r_0^2\cos\omega_0\right)\hbar^2}{(R-r_0\cos\omega_0)^2}+$$

$$+\frac{\left(r_0^2\cos^2\omega_0+2r_0-2r_0R\cos\omega_0+\hbar^2\right)\hbar^4}{(R-r_0\cos\omega_0)^2}\Bigg]^{-1}. \qquad (14.113)$$

При малой тороидальности $\left(\frac{r}{R}\ll 1\right)$ и большом числе витков $\left(\frac{nr_0}{mR}\gtrsim 1\right)$ приближенные формулы для кривизны и кручения

$$k(\omega_0)=k_0\left\{1+\frac{r_0}{R}\left[\frac{x^2(1-x)^2}{1+x^2}\cos\omega_0-\frac{2x^2}{1+x^2}f(\omega_0)\right]\right\}; \qquad (14.114)$$

$$\varkappa(\omega_0)=\varkappa_0\left\{1+\frac{r_0}{R}\left[\frac{2+5x^2+x^4}{1+x^2}\cos\omega_0+\frac{d^2f}{d\omega_0^2}+\frac{1-x^2}{1+x^2}f(\omega_0)\right]\right\}, \qquad (14.115)$$

где

$$x=\frac{mR}{nr_0}; \qquad (14.116)$$

$f(\omega_0)$ — функция, связанная с $\hbar(\omega_0)$ соотношением (14.105); k_0 и $\varkappa_0$ — кривизна и кручение винтовой линии с прямой осью:

$$k_0 = \frac{1}{r_0(1+x^2)}; \quad \varkappa_0 = \frac{x}{r_0(1+x^2)}. \tag{14.117}$$

Из формул (14.114) и (14.115) видно, что конфигурация, создаваемая в соленоиде с большим числом оборотов вокруг тора, мало отличается от рассмотренной выше конфигурации с винтовой симметрией. Различие состоит лишь в том, что теперь кривизна и кручение оси слегка промодулированы по длине

$$k = k_0 + k_1 \cos\frac{2\pi}{L} Ns; \quad \varkappa = \varkappa_0 + \varkappa_1 \cos\frac{2\pi}{L} Ns, \tag{14.118}$$

причем $k_1 \sim k_0 \frac{r_0}{R}$; $\varkappa_1 \sim k_0 \frac{r_0}{R}$. Пусть витки, создающие поле второй и третьей гармоник, составляют постоянный угол с магнитной осью, так что $u = -\varkappa_0 s$. Тогда

$$\delta = \delta_1 \sin\frac{2\pi}{L} Ns; \quad \delta_1 = \frac{\varkappa_1 L}{2\pi N}, \tag{14.119}$$

и поправка к $V''(\Phi)$ в формуле (14.28) имеет вид

$$\Delta V'' = \frac{2\varepsilon NL}{B_0^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}\,[(1-\varepsilon^2)\alpha^2(L) - 4\pi^2 N^2]} \left\{ -10\varepsilon\alpha(L) k_0 k_1 \delta_1 + \right.$$
$$\left. + \frac{\pi N}{2}\left(\frac{5\varepsilon-3}{1+\varepsilon} k_1^2 + \frac{5\varepsilon+3}{1-\varepsilon} k_0^2 \delta_1^2 \right) \right\}. \tag{14.120}$$

Наличие в этой формуле «резонансного» знаменателя связано с наличием возмущений поля, вызванных модуляцией кривизны и кручения, в соответствии с общими выводами § 6. В рассматриваемом случае этот знаменатель в нуль не обращается и поправка оказывается малой. Таким образом, все выводы, полученные для конфигураций с винтовой симметрией, сохраняют силу и для замкнутых конфигураций с $N \gg 1$.

Практический интерес представляют конфигурации с небольшим числом оборотов N, в частности конфигурация с $N = 2$, эквивалентная восьмерке Спитцера [1, 2]. При небольшом N для вычисления $V''(\Phi)$ удобно пользоваться общей формулой (14.79). Входящие в эту формулу фурье-компоненты относительной кривизны можно рассчитать численно.

Реальные тороидальные системы составляются из прямых и круговых тороидальных частей соленоидов, так что их геометрическая ось имеет разрывную кривизну $k(s)$ и угол поворота главной нормали $\alpha(s)$ и (см. § 2). Приближенно можно считать, что кривизна $k(s)$ и угол поворота главной нормали $\alpha(s)$ магнитной оси такие же, что и у геометрической оси соленоида. В этом при-

ближении В. С. Кудрявцев произвел с помощью формулы (14.79) расчет магнитной ямы в конфигурации, имеющей форму пространственной восьмерки, составленной из четырех полуокружностей одинаковой кривизны (см. рис. 10). При этом оказалось, что если витки, создающие поле второй и третьей гармоник, не делают ни одного оборота вокруг магнитной оси ($n = 0$), то размер сепаратрисы оказывается очень маленьким ($k\rho_s \sim 0{,}1$) и относительная глубина магнитной ямы также мала ($\delta U/U \sim \sim 0{,}4\%$). При $n = 2$ размер сепаратрисы и относительная глубина магнитной ямы оказались примерно такими же, как и для случая винтовой симметрии с $n = 0$ (рис. 39).

Задача 1. Определить удельный объем $V'(\Phi)$ в m-заходном сталлараторе (см. задачу 2 к § 11) вне плазменного шнура.

Решение. Если сечения магнитных поверхностей конфигурации близки к круговым, то удельный объем можно рассчитать по формуле (13.52). Входящее в эту формулу смещение магнитных поверхностей $\xi(\rho)$ выражается

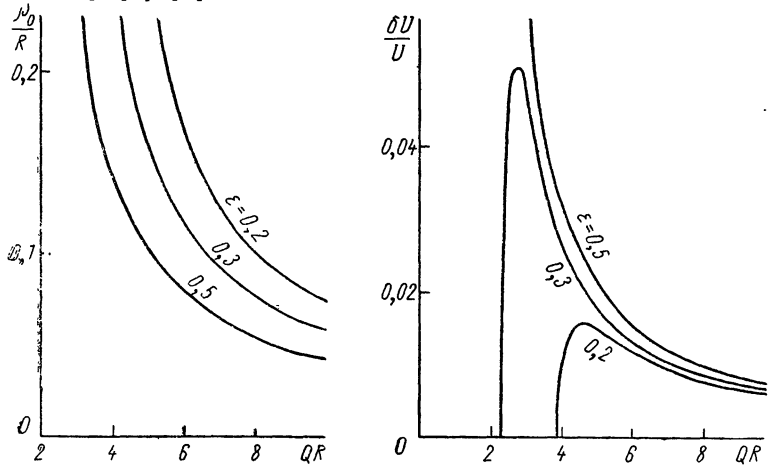


Рис. 39. Средний радиус сечений магнитных поверхностей и относительная глубина магнитной ямы в функции от QR для конфигурации типа восьмерки со стабилизирующими обмотками ($\alpha_0 = 30°$; $n = 2$).

формулой (11.162). Подставляя это выражение в формулу для $V'(\Phi)$, получаем при $B_0 = \text{const}$

$$V'(\Phi) = \frac{L}{B_0}\left\{1 - \frac{2(m-1)}{m}\cdot\frac{\beta}{\mu^2(\rho_1)}\left[(3-m)\left(\frac{\Phi_1}{\Phi}\right)^{m-2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + (m-2)\left(\frac{\Phi_1}{\Phi}\right)^{m-1}\right]\right\}, \qquad (14.121)$$

где

$$\beta = \frac{8\pi\langle p\rangle}{B^2}; \quad \Phi = \pi\rho^2 B.$$

Задача 2. Определить удельный объем $V'(\Phi)$ в системе «Токамак».

Р е ш е н и е. Используя формулу (13.52) и выражение (11.145) для смещения магнитных поверхностей в системе «Токамак», получаем выражение для $V'(\Phi)$ вне плазменного шнура с точностью до несущественной постоянной добавки, пропорциональной квадрату кривизны:

$$V'(\Phi) = \frac{L}{B_0}\left\{1 - 2\frac{\rho^2}{R^2}\left(\ln\frac{\rho}{a} + \frac{8\pi\langle p\rangle_a}{B_\omega^2(a)} + \frac{l_i}{2}\right)\right\}, \qquad (14.122)$$

где можно положить $\rho^2 = \Phi/\pi B_0$.

Как видно, $V''(\Phi) < 0$, т. е. усредненное вдоль силовой линии магнитное поле растет к периферии. Относительная глубина ямы на расстоянии кожуха ($\rho = b$)

$$\frac{\delta U}{U} = \frac{2b^2}{R^2}\left\{\ln\frac{b}{a} + \frac{8\pi\langle p\rangle_a}{B_\omega^2(a)} + \frac{l_i}{2}\right\}. \qquad (14.123)$$

Внутри плазмы при однородной плотности тока смещение выражается формулой [35]

$$\xi(\rho) = \frac{\rho^2}{2R}\left(\frac{8\pi\langle p\rangle_a}{B_\omega^2(a)} + \frac{1}{4}\right). \qquad (14.124)$$

Подставляя это выражение в формулу для $V''(\Phi)$ (13.52), получаем

$$V'(\Phi) = 1 - \frac{\rho^2}{R^2}\left(1 + \frac{16\pi\langle p\rangle_a}{B_\omega^2(a)}\right). \qquad (14.125)$$

Появление магнитной ямы в конфигурации связано со смещением плазменного шнура наружу от центра кривизны. При сближении магнитных поверхностей на внешней стороне тора силовые линии магнитного поля здесь быстрее прокручиваются и уходят на внутреннюю сторону тора, в область растущего к периферии тороидального магнитного поля.

Отметим, что в конфигурации стелларатора типа спитцеровской восьмерки, как следует из формулы (11.144), вакуумные магнитные поверхности смещены внутрь, поэтому вместо магнитной ямы здесь имеется магнитный бугор. При наличии плазмы смещение магнитных поверхностей наружу, обусловленное давлением плазмы, зависит от радиуса сечений поверхностей как $\xi_p \sim \frac{1}{\rho^2}$ [см. формулу (11.144)]. При этом $\frac{d\xi_p}{d\rho} + \frac{2\xi_p}{\rho} = 0$ и выражение для $V'(\Phi)$ остается неизменным.

§ 15. ВИНТОВЫЕ МАГНИТНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ

Как уже отмечалось выше, хорошей моделью замкнутых конфигураций с пространственной магнитной осью являются винтовые конфигурации, магнитная ось которых представляет собой винтовую линию с постоянными кривизной k и кручением $\varkappa$. Использование винтовой симметрии задачи позволяет в этом случае написать точное выражение для поверхностной функции ψ и вычислить функции $V'(\Phi)$ и $\chi'(\Phi)$ вплоть до сепаратрисы. Поскольку параметры магнитных конфигураций, обладающих винтовой симметрией, удобнее вычислять в цилиндрической системе координат, ось z которой обвивают винтовые магнитные трубки, остановимся на этих вычислениях более подробно.

По определению винтовой симметрии магнитное поле в цилиндрической системе координат r, φ, z зависит от двух переменных r и $\theta = \varphi - hz$, где $h = 2\pi/L_1$, L_1 — шаг винта, отсчитываемый вдоль оси z. Достаточно общее выражение для скалярного потенциала винтового поля имеет вид

$$\varphi_B = B_z^0 z + A\varphi + \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(hmr)\sin m\theta, \qquad (15.1)$$

где Z_m — бесселевы функции

$$Z_m(hmr) = A_m I_m(hmr) + B_m k_m(hmr). \qquad (15.2)$$

Такое поле представляет собой суперпозицию однородного поля B_z^0, направленного вдоль оси z; поля нити с током, натянутой вдоль оси z, и поля винтовых обмоток с током, расположенных на цилиндрах $r = R_1$ и $r = R_2$, так что $R_1 < r < R_2$. При внешнем расположении винтовых токов $B_m = 0$, а при внутреннем расположении $A_m = 0$.

Функция потока ψ является комбинацией компонент векторного потенциала **A**: $\psi = A_z + hrA_\varphi$,— и удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{r}{\beta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = \frac{2hI}{\beta^2}; \quad \beta \equiv 1 + h^2r^2. \qquad (15.3)$$

В рассматриваемом случае безвихревого магнитного поля $I = \text{const}$. Компоненты поля **B** выражаются через ψ и I соотношениями

$$rB_r = \frac{\partial\psi}{\partial\theta}; \quad hrB_z - B_\varphi = \frac{\partial\psi}{\partial r}; \quad B_z + hrB_\varphi = I. \qquad (15.4)$$

При известном магнитном поле $\mathbf{B}(r, \theta)$ функция $\psi(r, \theta)$ определяется интегрированием по r при фиксированном θ

$$\psi = \int_0^r (hrB_z - B_\varphi)\,dr. \qquad (15.5)$$

Поверхностная функция ψ, соответствующая полю (15.1),

$$\psi = B_z^0\frac{hr^2}{2} + A\ln r - r\sum_{n=1}^{\infty} Z_m'(hmr)\cos m\theta. \qquad (15.6)$$

Формулы (15.1) и (15.6) дают точные выражения для поля и магнитных поверхностей $\psi(r, \theta) = \text{const}$ в цилиндрической системе координат. Далее выведем приближенные аналитические выражения для удельного объема и среднего угла прокручивания силовых линий в окрестности оси винтовой магнитной трубки, а затем точные интегральные выражения для этих величин, пригодные для численного расчета.

Отметим, что тангенс угла произвольной винтовой линии $\theta = \text{const}$ с шагом L_1 равен hr, а компоненты поля, параллельная винтовой линии и перпендикулярная ей и радиусу-вектору r, соот-

ветственно равны $B_\parallel = I/\sqrt{\beta}$, $B_\perp = (\partial\psi/\partial r)\sqrt{\beta}$. Магнитная ось также является винтовой линией, шаг которой совпадает с шагом поля L_1.

1. Удельный объем винтовой магнитной трубки

Пусть в сечении $z = \text{const}$ магнитные поверхности представляют замкнутые линии $\psi(\rho, \vartheta, z) = \text{const}$, окружающие точку $\rho = 0$, которая сдвинута относительно оси z на некоторое расстояние $r = r_0$. Для случая винтовой симметрии удельный объем $V'(\Phi)$ можно записать в виде

$$V'(\Phi) = \frac{L_1}{\overline{B}_z}, \tag{15.7}$$

где среднее значение $\overline{B}_z$

$$\overline{B}_z = \frac{1}{dS}\int B_z \delta S \tag{15.8}$$

определяется интегрированием по площадке dS сечения $z = \text{const}$ между двумя соседними магнитными поверхностями (рис. 40). Полагая $B_z = B_{z0} + B_{z1}$, где $B_{z0} = \text{const}$ — осевое поле в точке $\rho = 0$, и записывая элемент площади в виде $\delta S = \rho\delta\rho d\vartheta = d\psi \frac{\rho d\vartheta}{\partial\psi/\partial\rho}$, получаем

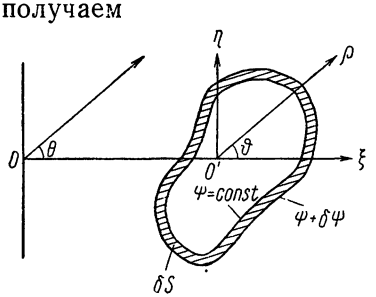


Рис. 40. Сечение двух близких магнитных поверхностей плоскостью $z = \text{const}$.

$$dS = d\psi \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\vartheta}{\partial\psi/\partial\rho}; \tag{15.9}$$

$$\overline{B}_z = \frac{d\psi}{dS}\int_0^{2\pi} B_z \frac{\rho d\vartheta}{\partial\psi/\partial\rho} = B_{z0} + \frac{d\psi}{dS}\int_0^{2\pi} B_{z1}\frac{\rho d\vartheta}{\partial\psi/\partial\rho}. \tag{15.10}$$

Для приближенного вычисления $V'(\Phi)$ представим B_z и ψ в окрестности магнитной оси в виде рядов по

$$\xi = \rho\cos\vartheta; \quad \eta = \rho\sin\vartheta \tag{15.11}$$

и ограничимся при этом случаем, когда магнитные поверхности симметричны относительно оси ξ:

$$B_z = B_{z0} + b_0\xi + b_1\xi^2 + b_2\eta^2 + \ldots; \tag{15.12}$$

$$\psi = \psi_1\xi^2 + \psi_2\eta^2 + \psi_3\xi^3 + \psi_4\xi\eta^2 + \ldots \tag{15.13}$$

В полярных координатах ρ, ϑ эти разложения запишем в виде

$$B_z = B_{z0} + h_1(\vartheta)\rho + h_2(\vartheta)\rho^2 + \ldots; \quad \psi = f_1(\vartheta)\rho^2 + f_2(\vartheta)\rho^3 + \ldots, \tag{15.14}$$

где

$$h_1 = b_0 \cos\vartheta, \quad h_2 = b_1 \cos^2\vartheta + b_2 \sin^2\vartheta;$$
$$f_1 = \psi_1 \cos^2\vartheta + \psi_2 \sin^2\vartheta, \quad f_2 = \psi_3 \cos^3\vartheta + \psi_4 \cos\vartheta \sin^2\vartheta. \qquad (15.15)$$

С точностью до членов порядка ρ^2 имеем $\rho = \frac{\psi^{1/2}}{f_1^{1/2}} - \frac{f_2\psi}{2f_1^2}$. Отсюда для величины B_z найдем следующее приближенное выражение

$$\overline{B}_z = B_{z0} + \psi \frac{d\psi}{dS} \int_0^{2\pi} \left(\frac{h_2}{2f_1^2} - \frac{h_1 f_2}{f_1^3} \right) d\vartheta, \qquad (15.16)$$

где

$$\frac{dS}{d\psi} \approx \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{f_1(\vartheta)} = \frac{\pi}{\sqrt{\psi_1\psi_2}}. \qquad (15.17)$$

Значение $V''(\Phi)$ можно определить из равенства $V'(\Phi) = \frac{L_1}{B_{z0}} + V''(\Phi)\frac{d\Phi}{d\psi}\psi$. Таким образом, получаем

$$V''(\Phi) = -\frac{L_1}{B_{z0}^3} \left(\frac{d\psi}{dS} \right)^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{h_2}{2f_1^2} - \frac{h_1 f_2}{f_1^3} \right) d\vartheta. \qquad (15.18)$$

Вычисление входящих сюда интегралов от тригонометрических функций дает (см. Приложение IV)

$$V''(\Phi) = -\frac{L_1}{B_{z0}^3} \left(\frac{d\psi}{dS} \right)^2 \frac{\pi\psi_2}{4(\psi_1\psi_2)^{5/2}} [2\psi_1 (b_1\psi_2 - b_2\psi_1) + b_0 (3\psi_2\psi_3 + \psi_1\psi_4)]. \qquad (15.19)$$

Местоположение эллиптической магнитной оси определяется уравнениями $\partial\psi/\partial\rho = 0$, $\partial\psi/\partial\vartheta = 0$. Коэффициенты разложений (15.12) — (15.14) не являются произвольными. Для определения связей между ними используем уравнение (15.3). Координаты ξ и η связаны с r и θ соотношениями (см. рис. 40)

$$\xi = r\cos\theta - r_0; \quad \eta = r\sin\theta. \qquad (15.20)$$

Запишем разложения (15.12) и (15.13) по степеням $r - r_0$ и θ в окрестности магнитной оси O'

$$B_z = B_{z0} + B_z'(r - r_0) + \frac{B_z''}{2}(r - r_0)^2 + \frac{\ddot{B}_z}{2}\theta^2 + \ldots; \qquad (15.21)$$

$$\psi = \frac{\psi''}{2}(r - r_0)^2 + \frac{\ddot{\psi}}{2}\theta^2 + \frac{\psi'''}{6}(r - r_0)^3 + \frac{\ddot{\psi}'}{2}(r - r_0)\theta^2 + \ldots \qquad (15.22)$$

Здесь штрихами и точками обозначены частные производные по r и по θ, причем их значения берутся в точке O', где $\psi' = \dot{\psi} = 0$. Согласно равенствам (15.4),

$$B_z = \frac{I}{\beta} + \frac{hr\psi'}{\beta}. \tag{15.23}$$

Отсюда, используя уравнение (15.3), находим связь производных, входящих в разложения (15.21) и (15.22):

$$\left.\begin{aligned} &B_z' = -\frac{h\ddot{\psi}}{r};\quad B_z'' = \frac{h}{r}\left(\frac{\ddot{\psi}}{r} - \ddot{\psi}'\right);\quad \dot{B}_z = \frac{hr}{\beta}\ddot{\psi}';\\ &\psi''' = -\frac{\psi''}{r} + \frac{4-2\beta}{r^3}\ddot{\psi}';\quad B_{z_0} = \frac{\beta}{2h}\left(\frac{\ddot{\psi}}{r^2} + \psi_{\cdot}''\right) = \frac{B_\parallel}{\sqrt{\beta}}. \end{aligned}\right\} \tag{15.24}$$

Значения всех величин здесь берутся на магнитной оси $r = r_0$, и соответственно $B_\parallel$ — значение поля при $r = r_0$. Таким образом, разложения (15.21) и (15.22) содержат всего три свободных параметра, в качестве которых можно выбрать, например, $\ddot{\psi}$, ψ'', $\ddot{\psi}'$. Подставляя в эти разложения $r - r_0 \approx \xi - \eta^2/2r_0$, $\theta \approx \eta/r_0 - \xi\eta/r_0^2$ и опуская для краткости индекс нуль у r_0, получаем

$$B_z = B_{z0} - \frac{h\ddot{\psi}}{r}\xi + \frac{h}{2r}\left(\frac{\ddot{\psi}}{r} - \ddot{\psi}'\right)\xi^2 - \frac{h}{2r}\left(\frac{\ddot{\psi}}{r} - \frac{\ddot{\psi}'}{\beta}\right)\eta^2 + \ldots; \tag{15.25}$$

$$\psi = \frac{\psi''}{2}\xi^2 + \frac{\ddot{\psi}}{2r^2}\eta^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{\psi''}{r} - \frac{4-2\beta}{r^3}\ddot{\psi} + \frac{\beta\ddot{\psi}'}{r^2}\right)\xi^3 + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\psi''}{r} - \frac{2\ddot{\psi}}{r^3} + \frac{\ddot{\psi}'}{r^2}\right)\xi\eta^2 + \ldots \tag{15.26}$$

Полученные разложения совпадают с разложениями (15.12) и (15.13) и дают выражения для входящих туда коэффициентов через свободные параметры $\ddot{\psi}$, ψ'' и $\ddot{\psi}'$.

Используя эти выражения, можно записать формулу для $V''(\Phi)$ через независимые производные $\ddot{\psi}$, ψ'', $\ddot{\psi}'$, взятые в точке $\rho = 0$:

$$V''(\Phi) = \frac{\ddot{\psi}}{2B_{z0}^3\left(\psi''\ddot{\psi}\right)^{3/2}}\left\{\frac{4h^2\ddot{\psi}^3}{r^3} + \left[\frac{\ddot{\psi}'}{\beta}\left(\psi'' - \frac{\beta\ddot{\psi}}{r^2}\right) - \right.\right. \\ \left.\left. - \frac{2\ddot{\psi}}{r^2}\right]\left(\psi'' - \frac{\beta\ddot{\psi}}{r^2}\right)\right\}. \tag{15.27}$$

В окрестности магнитной оси винтовые магнитные трубки имеют эллиптическое сечение, причем в плоскости, перпендикулярной к магнитной оси, отношение полуосей эллипса равно

$$\frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{r^2\psi''}{\beta\ddot{\psi}}\right)^{1/2}. \tag{15.28}$$

Формулу для $V''(\Phi)$ удобно выразить через введенную выше величину ε:

$$\varepsilon = \frac{l_1^2 - l_2^2}{l_1^2 + l_2^2} = \frac{\psi'' - \beta\ddot{\psi}/r^2}{\psi'' + \beta\ddot{\psi}/r^2}, \qquad (15.29)$$

при этом она принимает вид

$$V''(\Phi) = \frac{2h\sqrt{1-\varepsilon^2}}{B_\parallel^2 \beta^{3/2}(1+\varepsilon)^2}\left[h^2r^2(1-\varepsilon) - \left(\frac{\beta r\ddot{\psi}'}{\ddot{\psi}} - 1 + \varepsilon\right)\varepsilon\right]. \qquad (15.30)$$

Поскольку первый член в квадратных скобках всегда положителен, то в случае круглых нормальных сечений магнитной трубки ($\varepsilon = 0$) величина $V''(\Phi) > 0$. Для эллиптического нормального сечения ($\varepsilon \neq 0$) величина V'' может быть отрицательной.

2. Средний угол прокручивания силовых линий $\iota = 2\pi\chi'(\Phi)$

Для вычисления $\chi'(\Phi)$ воспользуемся формулой $\Phi - \chi = \frac{2\pi}{h}\psi$, связывающей продольный поток Φ и азимутальный поток χ с поверхностной функцией ψ в случае винтовой симметрии магнитного поля [19]. Отсюда имеем

$$\chi'(\Phi) = 1 - \frac{2\pi}{h}\psi'(\Phi). \qquad (15.31)$$

Заметим, что определяемый формулой (15.31) удельный азимутальный поток $\chi'(\Phi)$ отличается на единицу от введенного выше.

Если ограничиться лишь нулевым приближением в разложении $\chi'(\Phi)$ по степеням Φ, то, согласно выражениям (15.9) — (15.16),

$$\frac{d\Phi}{d\psi} \approx B_{z0}\int_0^{2\pi}\frac{\rho d\vartheta}{\partial\psi/\partial\rho}, \qquad (15.32)$$

и аналогично предыдущему найдем

$$\chi'(\Phi) = 1 - \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{\beta}}. \qquad (15.33)$$

Формула (15.33) показывает, что средний угол прокручивания силовых линий в окрестности магнитной оси полностью определяется эксцентриситетом эллиптического нормального сечения магнитной трубки и углом наклона винтовой магнитной оси к оси z цилиндра, на который навита магнитная ось.

3. Точные выражения для удельного объема $V'(\Phi)$ и угла прокручивания $\iota = 2\pi\chi'(\Phi)$

В случае, когда винтовое магнитное поле содержит только одну m-ю гармонику, т. е. скалярный потенциал φ_B в цилиндрической системе координат определяется выражением

$$\varphi_B = z - A\varphi + Z_m(mr)\sin m\theta, \quad \theta = \varphi - z, \tag{15.34}$$

можно в явном виде написать интегралы для $V'(\Phi)$ и $\chi'(\Phi)$. В выражении (15.34) однородное осевое поле B_z^0 принято равным единице, а в качестве единицы длины выбрана величина $L_1/2\pi = 1/h$. Потенциал $A\varphi$ дает поле $B_\varphi = -A/r$ нити с током, расположенной при $r = 0$. Последний член в выражении (15.34) описывает m-заходное винтовое поле $Z_m = A_1 I_m(mr) + B_1 K_m(mr)$.

Функция потока ψ, соответствующая потенциалу (15.34),

$$\psi = \frac{r^2}{2} + A\ln r - rZ_m'(mr)\cos m\theta. \tag{15.35}$$

Если $S(\psi)$ площадь перпендикулярного к оси z сечения магнитной поверхности, то для $S'(\psi)$ и $\Phi'(\psi)$ можно написать выражения

$$S'(\psi) = \int \frac{rdr}{\partial\psi/\partial\theta}; \quad \Phi'(\psi) = \int B_z \frac{rdr}{\partial\psi/\partial\theta}. \tag{15.36}$$

Величины $V'(\Phi)$ и $\chi'(\Phi)$ выразим через $S'(\psi)$ и $\Phi'(\psi)$ формулами:

$$V'(\Phi) = 2\pi\frac{S'(\psi)}{\Phi'(\psi)}; \quad \chi'(\Phi) = 1 - \frac{2\pi}{\Phi'(\psi)}. \tag{15.37}$$

Осевое поле в рассматриваемом случае равно

$$B_z = 1 - mZ_m(mr)\cos m\theta. \tag{15.38}$$

Введем обозначения $f(r) = rZ_m'(mr)$; $F(r) = r^2/2 - A\ln r$ и выразим $\partial\psi/\partial\theta$ в виде явной функции r: $\psi = F - f\cos m\theta$; $\partial\psi/\partial\theta = mf\sin m\theta = m\sqrt{f^2 - (\psi - F)^2}$. Подстановка этих соотношений в выражения (15.36) и дает искомые формулы для $S'(\psi)$ и $\Phi'(\psi)$:

$$S'(\psi) = \frac{2}{m}\int_{r_{\text{мин}}}^{r_{\text{макс}}} \frac{rdr}{\sqrt{f^2 - (\psi - F)^2}}; \tag{15.39}$$

$$\Phi'(\psi) = S'(\psi) + 2\int_{r_{\text{мин}}}^{r_{\text{макс}}} \frac{Z_{mi}(mr)(\psi - F)\,dr}{Z_m'(mr)\sqrt{f^2 - (\psi - F)^2}}, \tag{15.40}$$

где интегрирование производится по r от $r_{\text{мин}}$ до $r_{\text{макс}}$, обращающих в нуль подкоренное выражение. Вычисляя эти интегралы, по-

лучаем точные выражения для удельного объема и угла прокручивания в функции ψ.

4. Отношение удельных объемов на магнитной оси и сепаратрисе

В случае винтовой симметрии легко получить аналитические выражения для удельных объемов на магнитной оси и на сепаратрисе. Действительно, поскольку среднее значение B_z на сепаратрисе определяется только окрестностью ребер сепаратрисы, то

$$\bar{B}_z = \frac{1}{dS}\int B_z \delta S = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} B_{Sk}, \tag{15.41}$$

где суммирование производится по значениям осевого поля $B_z = B_{Sk}$ на n ребрах сепаратрисы. Учитывая, что в особых точках, где $\psi' = 0$, каковыми и являются магнитная ось и ребра сепаратрисы,

$$B_z = \frac{I}{\beta}, \tag{15.42}$$

получаем для $V'(\Phi) = L/\bar{B}_z$ соответственно выражения:

$$V'_S = \frac{nL_1}{\sum\limits_{k=1}^{n} B_{Sk}} = \frac{nL_1}{I\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\beta_{Sk}}}; \tag{15.43}$$

$$V'_0 = \frac{L_1}{B_{z0}} = \frac{L_1\beta_0}{I}. \tag{15.44}$$

В случае, когда имеется лишь одно ребро сепаратрисы ($n = 1$), отношение значений $V'(\varphi)$ на магнитной оси и на сепаратрисе равно

$$\frac{V'_0}{V'_S} = \frac{1+h^2r_0^2}{1+h^2r_S^2}. \tag{15.45}$$

Формула (15.45) показывает, что магнитная конфигурация обладает магнитной ямой, по крайней мере вблизи сепаратрисы, если расстояние от оси z до ребра сепаратрисы r_S меньше, чем расстояние до магнитной оси r_0.

5. Результаты численных расчетов

В качестве примеров были рассмотрены магнитные конфигурации, образуемые полями, которые описываются потенциалами:

$$\varphi_B = z - A\varphi + BI_1(r)\sin\theta; \tag{15.46}$$

$$\varphi_B = z - A\varphi + BK_1(r)\sin\theta. \tag{15.47}$$

Винтовое поле в первом примере создается однозаходной токовой обмоткой на цилиндре $r = R_2$, а во втором примере — токовой обмоткой на цилиндре $r = R_1$ (рис. 41), радиус центра винтовой магнитной трубки принят равным единице, что соответствует следующим значениям кривизны k и кручения $\varkappa$ магнитной оси; $k = h^2 r/\beta = 1/2$; $\varkappa = h/\beta = 1/2$. Рис. 42, 43, 44 относятся к первому примеру.

На рис. 42 изображены графики $V''(\Phi)$, A и B в функции ε. При этом V'' рассчитывается по формуле (15.30), где

$$\frac{r\ddot{\psi}'}{\ddot{\psi}} = \frac{m\beta Z_m(mhr)}{hrZ'_m(mhr)}. \tag{15.48}$$

Величины A и B при заданном ε определяются уравнением (15.29) и условием $\psi'(1, 0) = 0$. Область отрицательных $V''(\Phi)$ лежит при $\varepsilon > 0$. Минимум V'' соответствует $\varepsilon = 0{,}7$. Построенные для этого случая сечения магнитных поверхностей плоскостью $z = 0$ изображены на рис. 43.

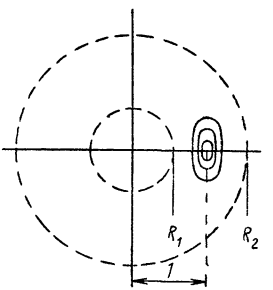


Рис. 41. Расположение замкнутых поверхностей с магнитной осью при $r = 1$ между винтовыми токовыми обмотками на цилиндрах $r = R_1$ и $r = R_2$.

Точные значения величин $V'(\Phi)$ и $\chi'(\Phi)$, рассчитанные численно по формулам (15.37) вплоть до сепаратрисы, показаны на рис. 44. Их значения на магнитной оси ($r = 1$) равны

$$V'(\Phi) = \frac{2\pi}{B_{z0}}; \quad \chi'(\Phi) = 1 - \frac{\sqrt{\psi''\ddot{\psi}}}{B_{z0}}, \tag{15.49}$$

а на сепаратрисе

$$V'(\Phi) = \frac{2\pi}{B_S}; \quad \chi'(\Phi) = 1, \tag{15.50}$$

так как $\Phi'(\psi) \to \infty$, $S'(\psi) \to \infty$ и величина $V'(\Phi)$ определяется полем B_S в бесконечно малой окрестности ребра сепаратрисы (см. рис. 43).

На рис. 45, 46, 47 приведены результаты для второго примера (15.47), причем магнитные поверхности построены для случая $\varepsilon = -0{,}7$.

§ 16. ОБ УДЕРЖАНИИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЗАМКНУТЫХ ТОРОИДАЛЬНЫХ КОНФИГУРАЦИЯХ

Основной проблемой в исследованиях по управляемому термоядерному синтезу является создание условий, при которых заряженные частицы высокотемпературной плазмы удерживаются в течение достаточно длительного времени в ограниченном объеме,

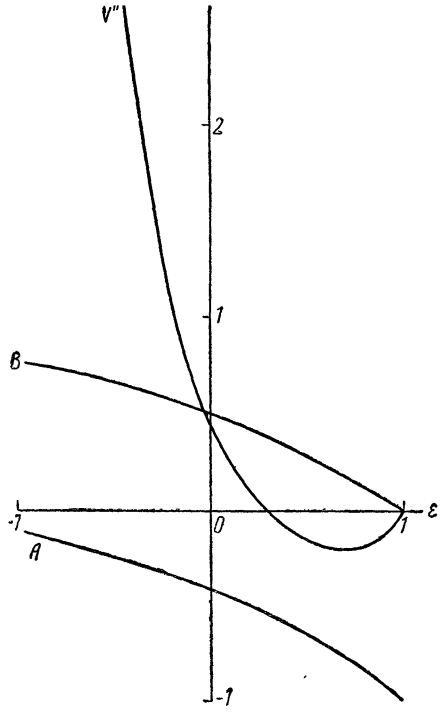


Рис. 42. Зависимость v'', A и B от параметра ε, характеризующего эксцентриситет нормальных сечений магнитных поверхностей для внешней токовой обмотки.

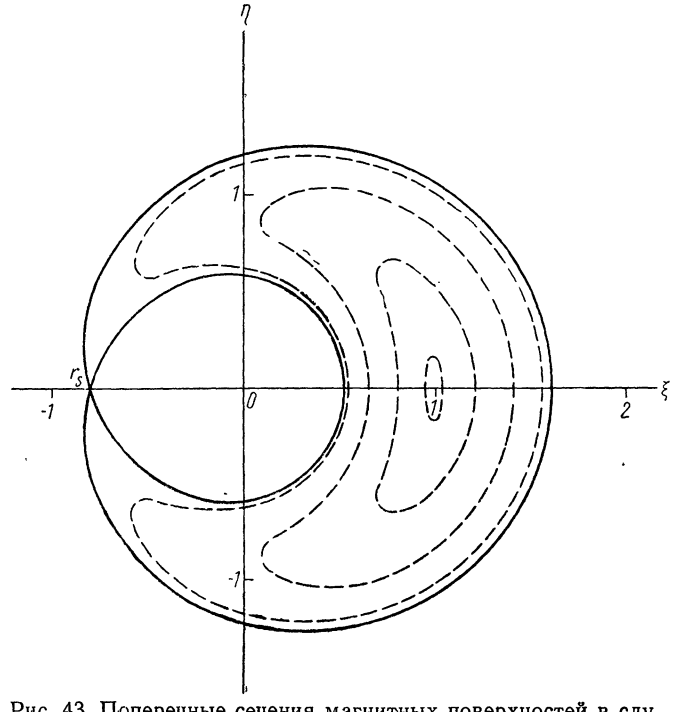


Рис. 43. Поперечные сечения магнитных поверхностей в случае внешнего расположения винтовой токовой обмотки при $\varepsilon = 0{,}7$.

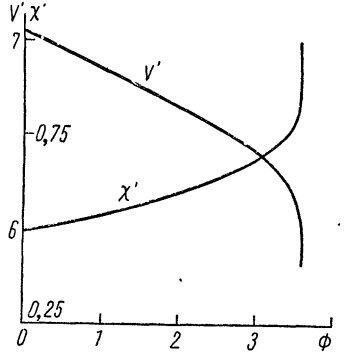


Рис. 44. Зависимость v' и χ' от продольного потока для внешней токовой обмотки.

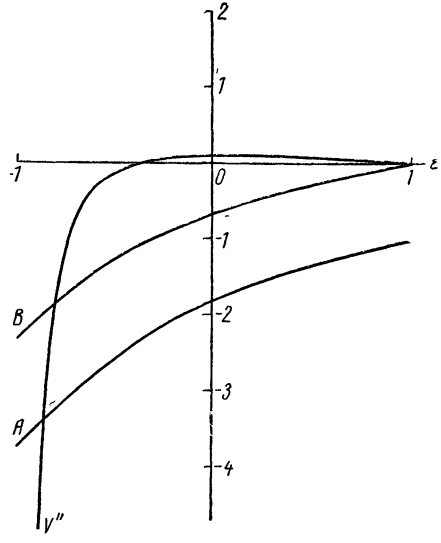


Рис. 45. Зависимость v'', A и B от ε для внутренней токовой обмотки.

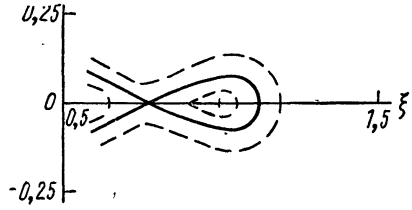


Рис. 46. Поперечные сечения магнитных поверхностей в случае внутреннего расположения винтовой токовой обмотки при ε = —0,7.

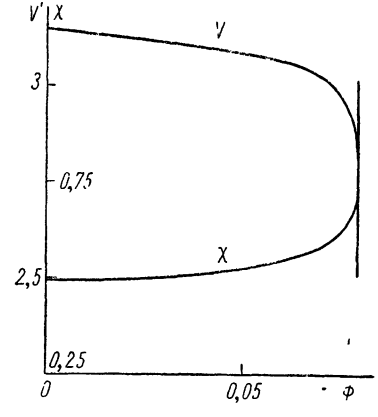


Рис. 47. Зависимость V' и χ' от Φ для внутренней токовой обмотки.

не контактируя со стенками камеры, содержащей плазму. С точки зрения гидродинамического описания, оперирующего с некоторыми усредненными характеристиками плазмы, удержание плазмы возможно в конфигурациях магнитного поля, обладающего замкнутыми тороидальными магнитными поверхностями.

Строго говоря, система вложенных тороидальных магнитных поверхностей возможна лишь при наличии симметрии, винтовой или осевой. Только в этом случае уравнение $\mathbf{B}\nabla\psi = 0$ имеет точный однозначный интеграл $\psi = \text{const}$, определяющий систему тороидальных поверхностей. Таким образом, замкнутые тороидальные конфигурации возможны лишь при осевой симметрии, когда они создаются продольным током в плазме (система типа «Токамак»). Однако при тщательном подборе магнитного поля можно создавать с достаточной степенью точности конфигурации, обладающие и необходимыми тороидальными вакуумными магнитными поверхностями.

Но даже при наличии соответствующей конфигурации магнитных поверхностей остается открытым вопрос об удержании отдельных резонансных групп частиц, выпадающих из гидродинамического описания. Для получения полной картины удержания плазмы в тороидальных конфигурациях необходимо решить задачу о движении заряженных частиц в конфигурации с учетом возникающих самосогласованных электромагнитных полей. В настоящее время эта задача не решена еще в полной мере, и мы здесь ограничимся отдельными замечаниями общего характера.

Рассмотрим сначала движение одиночного заряда в вакуумном магнитном поле, а затем выясним, как характер поведения заряженных частиц изменяется при учете усложняющих факторов. При этом, естественно, ограничимся лишь первым приближением дрейфовой теории движения зарядов в магнитном поле.

1. Движение одиночных зарядов в вакууме

А. Дрейфовые поверхности. В отсутствие электрического поля ($\mathbf{E} = 0$) и тока ($\text{rot}\,\mathbf{B} = 0$) уравнения, определяющие движение ведущего центра ларморовского кружка, имеют вид [46]

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_{\parallel}\frac{\mathbf{B}}{B} + \frac{mc\left(2v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2\right)}{2eB^3}[\mathbf{B}\nabla B]; \tag{16.1}$$

$$\frac{v_{\perp}^2}{B} = J_{\perp} = \text{const}; \tag{16.2}$$

$$v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2 = v_0^2 = \text{const}. \tag{16.3}$$

Здесь $v_{\parallel}$ и $v_{\perp}$ — компоненты скорости заряда, параллельные и перпендикулярные вектору $\mathbf{B}$ напряженности магнитного поля.

Как вытекает из работы [46], совокупность траекторий ведущих центров частиц с одинаковыми значениями интегралов движения $J_\perp$ и v_0 образует систему «магнитных» поверхностей эффективного магнитного поля

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{B} + \mathbf{B}_1 = \mathbf{B} + \frac{mc\left(2v_\parallel^2 + v_\perp^2\right)}{2eB^2 v_\parallel}\,[\mathbf{B} \nabla B]. \qquad (16.4)$$

Уравнение этих поверхностей $\psi^* = \text{const}$, которые мы назовем *дрейфовыми поверхностями*, определяется из условия $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \nabla \psi^* = 0$ или

$$\mathbf{B}^* \nabla \psi^* = 0. \qquad (16.5)$$

Добавочное слагаемое $\mathbf{B}_1$ к магнитному полю удовлетворяет условию

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_1 = 0, \qquad (16.6)$$

и отношение его к $\mathbf{B}$ равно примерно отношению ларморовского радиуса $r_B = \frac{v}{\omega_B} = \frac{mcv}{eB}$, подсчитанного по полной скорости, к радиусу кривизны R силовой линии:

$$\frac{|\mathbf{B}_1|}{|\mathbf{B}|} \sim \frac{r_B}{R}.$$

Поскольку предполагается, что $r_B/R \ll 1$, добавку $\mathbf{B}_1$ можно рассматривать как возмущение, и к дрейфовым поверхностям $\psi^* = \text{const}$ применимы все выводы, полученные в § 6 и 10 и относящиеся к вопросу существования магнитных поверхностей.

В линейном приближении метода возмущений отклонение ψ_1 дрейфовой поверхностной функции

$$\psi^* = \psi + \psi_1, \qquad (16.7)$$

от функции ψ магнитных поверхностей удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{B} \nabla \psi_1 = -\mathbf{B}_1 \nabla \psi. \qquad (16.8)$$

Пусть продольное магнитное поле постоянно на магнитной оси $B_0(s) = \text{const}$. В этом случае основной вклад в ∇B дает продольное поле

$$B_s \approx B_0 [1 + k(s)\rho \cos\theta]. \qquad (16.9)$$

Первые члены разложения векторного произведения $[\mathbf{B}\nabla B]$ и компонент скорости $v_\parallel$, $v_\perp$ в ряд по степеням ρ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &[\mathbf{B}\nabla B]_\rho \approx B_0^2 k \sin\theta, \quad [\mathbf{B} \nabla B]_\omega \approx B_0^2 k \cos\theta, \quad [\mathbf{B} \nabla B]_s \approx 0; \\ &v_\perp^2 = J_\perp B_0 = \text{const}, \quad v_\parallel^2 = v_0^2 - J_\perp B_0 = \text{const}. \end{aligned}\right\} \qquad (16.10)$$

При этом выражение для $\mathbf{B}_1$ можно записать как

$$\mathbf{B}_1 = \frac{mc\left(2v_\parallel^2 + v_\perp^2\right)}{2eB^2 v_\parallel}\,[\mathbf{B} \nabla B] = \nabla \varphi_1, \qquad (16.11)$$

где

$$\varphi_1 = \frac{mc\left(2v_\parallel^2 + v_\perp^2\right)}{2ev_\parallel} k\rho \sin\theta \equiv B_{1y}\rho\sin\theta. \qquad (16.12)$$

Отсюда видно, что задача нахождения дрейфовых поверхностей свелась к задаче об определении искажения магнитных поверхностей, вызванного эффективным возмущающим поперечным полем B_{1y}, направленным по бинормали к магнитной оси. Эта задача решена в § 8 (см. также Приложение I), где показано, что поперечное поле приводит к смещению тороидальных поверхностей и некоторому изменению их формы. Величина смещения оси равна примерно, согласно формуле (8.31), $x_0 \sim B_{1y}L/B_{01}$. Подставляя сюда значение B_{1y} из формулы (16.12), получаем оценку величины смещения дрейфовой оси относительно магнитной оси

$$x_0 \sim \frac{v_\parallel + \frac{v_\perp^2}{2v_\parallel}}{\omega_B} \cdot \frac{kL}{\iota}. \qquad (16.13)$$

Если угол прокручивания ι магнитных силовых линий не слишком мал ($\iota \sim 1$), то множитель $kL/\iota \sim 1$, и отклонение дрейфовых поверхностей от магнитных поверхностей оказывается порядка ларморовского радиуса заряда, рассчитанного по скорости $\bar{v} = v_\parallel + \frac{v_\perp^2}{2v_\parallel}$. Искажения становятся существенными для частиц с очень малыми продольными скоростями. Для правильного описания поведения таких частиц необходимо учитывать зависимость модуля поля, входящего в выражения для $v_\perp^2 = J_\perp B$ и $v_\parallel^2 = v_0^2 - J_\perp B$, от координат. Из-за тороидального эффекта напряженность магнитного поля $B \approx B_0(1 - k\rho\cos\theta)$ на внутренней стороне тора оказывается больше, чем на внешней. Силовые трубки имеют, таким образом, на внутренней стороне тора магнитные пробки. Соответствующее пробочное отношение, очевидно, равно

$$1 + \frac{\Delta B}{B_0} \approx 1 + 2k\rho. \qquad (16.14)$$

Частицы, у которых на внешней стороне тора

$$\left|\frac{v_\parallel}{v_\perp}\right| < \sqrt{2k\rho}, \qquad (16.15)$$

отражаются на внутренней стороне тора и совершают колебания вдоль силовых линий между магнитными пробками. Такие частицы называются *запертыми* в отличие от *пролетных* частиц с $|v_\parallel/v_\perp| > \sqrt{2k\rho}$, которые движутся в одном направлении, в основном вдоль силовых линий, по дрейфовой тороидальной поверхности. Как будет показано ниже, запертые частицы, как и пролет-

ные, удерживаются в тороидальной конфигурации, по крайней мере в дрейфовом приближении.

Б. Дрейфовый угол прокручивания. Наряду с движением вдоль силовой линии магнитного поля ведущий центр может испытывать систематическое прокручивание в азимутальном направлении. Поэтому угол прокручивания линий дрейфов зарядов ι^* может заметно отличаться от угла прокручивания магнитных силовых линий ι.

Для расчета угла прокручивания $\iota^* = 2\pi\chi'^*$ пролетных частиц воспользуемся формулой (13.12), заменив в ней B_ω на эффективное поле B^*_ω:

$$\iota^* = \oint \left\{ \frac{\langle B^*_\omega/\rho \rangle}{\langle B^*_s \rangle} - \alpha' \right\} ds. \tag{16.16}$$

Из выражения (16.4) для эффективного поля $\mathbf{B}^*$ следует

$$B^*_\omega = B_\omega + \frac{mc\left(2v_\parallel^2 + v_\perp^2\right)}{2eB^3 v_\parallel} \left(B_s \frac{\partial B}{\partial \rho} - B_\rho \frac{\partial B}{ds} \right). \tag{16.17}$$

Для определения ι^* вблизи оси достаточно учесть в скалярном потенциале магнитного поля только квадратичные по ρ члены:

$$\left.\begin{aligned} \varphi = \int_0^s B_0 ds + A\rho^2;\ A = -\frac{B_0'}{4} + A_1 \sin 2u + A_2 \cos 2u; \\ A_1 = \frac{\varepsilon}{2} u' B_0;\ A_2 = -\frac{\eta'}{4} B_0. \end{aligned}\right\} \tag{16.18}$$

Компоненты и модуль магнитного поля в необходимом приближении разложения по ρ:

$$\left.\begin{aligned} B_s = B_0 + A'\rho^2;\ B_\omega = A\rho,\ B_\rho = 2A\rho; \\ B = \sqrt{B_s^2 + B_\omega^2 + B_\rho^2} \approx B_0 + \left(A' + \frac{2A^2}{B_0} + \frac{A^2}{2B_0} \right)\rho^2. \end{aligned}\right\} \tag{16.19}$$

Подставляя эти выражения в B^*_ω и производя соответствующее усреднение в интеграле (16.16), получаем

$$\iota^* = \iota + \oint \frac{mc\left(2v_\parallel^2 + v_\perp^2\right)}{2eB_0^3 v_\parallel} \left[\frac{3}{4} B_0'^2 - \frac{1}{2} B_0 B_0'' + B_0^2 \varepsilon^2 u'^2 + B_0^2 \frac{\eta'^2}{4} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{3}{4} B_0 B_0' \eta' - \frac{1}{4} B_0^2 \eta'' + B_0^2 \varepsilon u'^2 \right) \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} - 1}{\varepsilon} \right] ds. \tag{16.20}$$

Члены, содержащие вторые производные по s, удобно проинтегрировать по частям, воспользовавшись вытекающим из закона сохранения энергии $v_\parallel^2 + JB = v_0^2$ соотношением

$$\left(\frac{2v_\parallel^2 + v_\perp^2}{v_\parallel}\right)' = \frac{v_\perp^4}{2v_\parallel^3} \cdot \frac{B'}{B}. \tag{16.21}$$

При этом

$$\iota^* = \iota + \frac{mc}{2e} \oint \frac{2v_\parallel^2 + v_\perp^2}{B_0 v_\parallel} \left\{ \left(-\frac{1}{4} + \frac{v_\perp^4}{4v_\parallel^2 \left(2v_\parallel^2 + v_\perp^2\right)} \right) \frac{B_0'^2}{B_0^2} + \right.$$
$$+ \frac{1 - \sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} \left[\frac{\eta'^2}{4\varepsilon} + \varepsilon \sqrt{1-\varepsilon^2} u'^2 - \right.$$
$$\left. \left. - \frac{\eta' B_0'}{4B_0} \left(2 + \frac{v_\perp^4}{2v_\parallel^2 \left(2v_\parallel^2 + v_\perp^2\right)} \right) \right] \right\} ds. \tag{16.22}$$

Из этого выражения видно, что дрейфовый угол прокручивания может существовать и при отсутствии прокручивания магнитных силовых линий. Так, в соленоиде с плоской осью ($\varkappa = 0$) в отсутствие поля второй гармоники ($\varepsilon = 0$) угол прокручивания силовых линий равен нулю ($\iota = 0$). Однако если продольное поле гофрированно ($B_0' \neq 0$), то $\iota^* \neq 0$. Пусть, например,

$$B_0(s) = B_0 \left(1 + \nu \cos \frac{2\pi}{L} ns\right)^2. \tag{16.23}$$

Тогда для частиц с нулевым магнитным моментом ($J_\perp = 0$) получаем из формулы (16.22)

$$\iota^* = -\frac{2r_B}{L} \pi^2 n^2 \nu^2, \tag{16.24}$$

где $r_B = \frac{mcv_0}{eB}$. (Более общую формулу для ι^* см. в работе [45, стр. 205].) Из-за наличия дрейфового угла прокручивания в гофрированном тороидальном поле ведущие центры заряженных частиц движутся по тороидальным поверхностям.

Отметим, что направление дрейфового прокручивания оказывается различным для зарядов противоположного знака и величина угла прокручивания различна для разных частиц.

2. Движение зарядов в бесстолкновительной плазме

А. Перейдем теперь к рассмотрению основных особенностей движения зарядов плазмы в замкнутых конфигурациях. Если столкновениями зарядов можно пренебречь, то основным отличием от вакуума является наличие электростатического поля **E** в

плазме, вызванного разделением зарядов. Кроме того, нужно учитывать, что в плазме текут токи, и, следовательно, магнитное поле уже не безвихревое.

Если электрическое поле **E** и магнитное поле **B** постоянны во времени, то дрейфовое движение заряженной частицы с массой m и зарядом e в нерелятивистском приближении описывается уравнениями:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_{\parallel}\frac{\mathbf{B}}{B} + \frac{mc\left(2v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2\right)}{2eB^3}[\mathbf{B}\nabla B] + \frac{c}{B^2}[\mathbf{EB}] + \frac{mcv_{\parallel}^2}{eB^4}[[\mathbf{B}\mathrm{rot}\mathbf{B}]\mathbf{B}]; \tag{16.25}$$

$$\frac{mv^2}{2} + e\varphi_E = \frac{mv_0^2}{2} = \mathrm{const}; \tag{16.26}$$

$$\frac{v_{\perp}^2}{B} = J_{\perp} = \mathrm{const}, \tag{16.27}$$

где φ_E — потенциал электрического поля; B — модуль магнитного поля. Составляющую скорости $v_{\parallel}$ вдоль магнитного поля удобно рассматривать как функцию положения $\mathbf{r}$ при фиксированных постоянных v_0 и $J_{\perp}$, характеризующих данную частицу:

$$v_{\parallel}(\mathbf{r}) = \sqrt{v_0^2 - \frac{2e}{m}\left(\varphi_E + \frac{mJ_{\perp}}{2e}B\right)}. \tag{16.28}$$

Движение частиц вдоль силовых линий магнитного поля происходит под действием эффективного электрического поля **E***:

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} - \frac{mJ_{\perp}}{2e}\nabla B = -\nabla\varphi_E^*, \tag{16.29}$$

где

$$\varphi_E^* = \varphi_E + \frac{mJ_{\perp}}{2e}B. \tag{16.30}$$

Как показано в работе [45], систему уравнений (16.25) — (16.27) можно записать в виде одного векторного уравнения

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{v_{\parallel}}{B}\left\{\left(1 - \frac{mcv_{\parallel}}{eB^3}\mathbf{B}\mathrm{rot}\mathbf{B}\right)\mathbf{B} + \frac{mc}{e}\mathrm{rot}\frac{v_{\parallel}\mathbf{B}}{B}\right\}. \tag{16.31}$$

Так как оба члена в фигурных скобках, пропорциональные массе частицы m, имеют порядок отношения r_B/L — ларморовского радиуса к характерному размеру системы и произведение этих членов не содержит величины $v_{\parallel}$ в знаменателе, то с точностью применимости дрейфовых уравнений формулу (16.31) можно переписать в виде [46]

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{v_{\parallel}}{B}\left(1 - \frac{mcv_{\parallel}}{eB^3}\mathbf{B}\mathrm{rot}\mathbf{B}\right)\left\{\mathbf{B} + \frac{mc}{e}\mathrm{rot}\frac{v_{\parallel}\mathbf{B}}{B}\right\}. \tag{16.32}$$

Уравнение (16.32) показывает, что, если отвлечься от временно́й зависимости, дрейфовое движение заряженных частиц происхо-

дит вдоль силовых линий эффективного магнитного поля

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{B} + \frac{mc}{e}\mathrm{rot}\left(\frac{v_\parallel \mathbf{B}}{B}\right) = \mathrm{rot}\mathbf{A}^*, \qquad (16.33)$$

где

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + \frac{mcv_\parallel}{eB}\mathbf{B}. \qquad (16.34)$$

Поскольку $\mathrm{div}\,\mathbf{B}^* = 0$, то к магнитным поверхностям эффективного поля $\mathbf{B}^*$, на которых лежат траектории ведущих центров заряженных частиц, как и при движении в вакууме, можно применять те же методы расчета, что и для обычного магнитного поля $\mathbf{B}$.

Б. Добавочное по сравнению с «вакуумным» [см. формулу (16.4)] эффективное магнитное поле

$$\mathbf{B}_1^* = \frac{c}{Bv_\parallel}[\mathbf{EB}] + \frac{mcv_\parallel}{eB^3}[[\mathbf{B}\mathrm{rot}\mathbf{B}]\mathbf{B}] \qquad (16.35)$$

вызывает дополнительное прокручивание $\iota_1^* = 2\pi\frac{d\chi_1^*}{d\varphi}$ пролетных частиц. Связанный с $\mathbf{B}_1^*$ поперечный поток $d\chi_1^*$ между двумя дрейфовыми поверхностями можно рассчитать путем непосредственного интегрирования по замкнутой перегородке, соединяющей эти две поверхности (рис. 48):

$$d\chi_1^* = \oint \mathbf{B}_1^* d\mathbf{S}_2 = \oint \mathbf{B}_1^*[d\mathbf{l}_3 d\mathbf{l}_1]. \qquad (16.36)$$

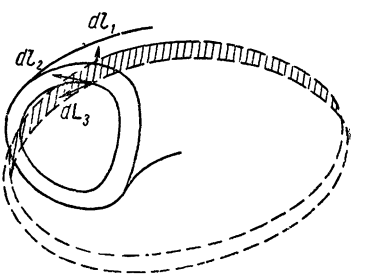


Рис. 48. К расчету дрейфового угла прокручивания.

Здесь $d\mathbf{l}_1$ — векторный элемент дуги в направлении нормали к поверхности, а $d\mathbf{l}_3$ — векторный элемент дуги замкнутой кривой l_3, проходящей вдоль тора по его поверхности. В случае изотропной функции распределения зарядов по скоростям $[[\mathbf{B}\mathrm{rot}\mathbf{B}]\mathbf{B}] = -\frac{4\pi}{c}[[\mathbf{j}\mathbf{B}]\mathbf{B}] = -4\pi[\nabla p\mathbf{B}]$, где p — давление плазмы. Таким образом, второе слагаемое в $\mathbf{B}_1^*$ имеет ту же структуру, что и первое, содержащее $\mathbf{E} = -\nabla\varphi_E$. Входящие в формулу (16.36) произведения векторных величин раскрываются по формуле

$$-[\nabla\varphi_E\mathbf{B}][d\mathbf{l}_3 d\mathbf{l}_1] = (\nabla\varphi_E d\mathbf{l}_1)(\mathbf{B}d\mathbf{l}_3) - (\nabla\varphi_E d\mathbf{l}_3)(\mathbf{B}d\mathbf{l}_1). \qquad (16.37)$$

Пренебрежем небольшим отличием дрейфовых поверхностей от магнитных, тогда и $\mathbf{B}d\mathbf{l}_1 = 0$. Скалярный потенциал φ_E в бесстолкновительной плазме, так же как и давление p, является поверхностной функцией и может считаться функцией продольного потока $\varphi_E = \varphi_E(\Phi)$, так что $\nabla\varphi_E d\mathbf{l}_1 = \frac{d\varphi_E}{d\Phi}d\Phi$. Следовательно, из

формулы (16.36) получаем

$$\iota_1^* = 2\pi \frac{d\chi_1^*}{d\Phi} = c \frac{d\varphi_E}{d\Phi} \oint \frac{\mathbf{B}d\mathbf{l}_3}{v_\parallel B} + \frac{4\pi mc}{e} \cdot \frac{dp}{d\Phi} \oint \frac{v_\parallel \mathbf{B}d\mathbf{l}_3}{B^3}. \quad (16.38)$$

При $\varphi_E \sim mv^2/e$ первое слагаемое по порядку величины равно $(r_B/\rho)\,(L/2\pi\rho)$ и может достигать значений порядка единицы, второе слагаемое $\sim\beta(r_B/\rho)\,(L/2\pi\rho)$ дает несущественный вклад, если $\beta \ll 1$.

В. При изотропном распределении зарядов по скоростям в плазме всегда имеются запертые частицы, отношение числа которых к общему числу частиц равно примерно пробочному отношению без единицы. Для тороидальных систем, согласно формуле (16.15), это отношение равно $\sqrt{2k\rho}$.

Характер движения запертых частиц в тороидальной конфигурации можно уяснить из рассмотрения осесимметричного случая, когда дрейфовые уравнения имеют интеграл движения (см. Приложение II)

$$\psi^* = 2\pi\left(rA_\varphi + \frac{mcv_\parallel}{eB} rB_\varphi\right) = \psi + \frac{2\pi mcv_\parallel}{eB} rB_\varphi. \quad (16.39)$$

Здесь r — расстояние от оси симметрии, равное

$$r = R(1 - k\rho\cos\omega); \quad (16.40)$$

A_φ — φ-компонента векторного потенциала; B_φ — продольное магнитное поле

$$B_\varphi = \frac{B_0}{1 - k\rho\cos\omega} \approx B_0(1 + k\rho\cos\omega). \quad (16.41)$$

Функция магнитных поверхностей ψ в рассматриваемом случае с точностью до константы совпадает с поперечным потоком χ, взятым с минусом, так что формулу (16.39) можно записать в более инвариантном виде:

$$\psi^* = -\int_0^\Phi \mu(\Phi)\,d\Phi + \frac{2\pi mcv_\parallel}{eB} RB_0. \quad (16.42)$$

Интеграл дрейфовых уравнений (16.42) применим как к пролетным, так и к запертым частицам, у которых продольная скорость $v_\parallel$ обращается в некоторых точках в нуль.

Рассмотрим отклонение дрейфовых поверхностей от магнитных поверхностей, имеющих в сечении форму круга радиусом $\rho = \rho_0$. В линейном по отклонению ξ приближении уравнение дрейфовой поверхности можно записать в виде

$$\rho = \rho_0 + \xi(\rho_0, \omega). \quad (16.43)$$

При этом, разлагая по ξ, получаем

$$\int_0 \mu(\Phi)\,d\Phi \approx \mu(\Phi)\,2\pi B_0\rho_0\xi, \quad (16.44)$$

так что уравнение (16.42) дает

$$(\rho_0,\ \omega) = \frac{mcR}{eB\mu\rho_0}\left[(1 - k\rho_0\cos\omega)\sqrt{v^2 - J_\perp B_0 - J_\perp B_0 k\rho_0\cos\omega} - C\right], \tag{16.45}$$

где C — константа, определяющая начальную точку траектории.

Исследуем порознь пролетные и запертые частицы. Для пролетных частиц, удовлетворяющих условию

$$\frac{J_\perp B_0 k\rho}{v^2 - J_\perp B_0} \ll 1, \tag{16.46}$$

производим разложение по $k\rho\cos\omega$ и получаем, выбирая константу из условия $\xi(\rho_0, \pi/2) = 0$:

$$\xi = -\frac{2v_\parallel^2 + v_\perp^2}{2v_\parallel\omega_B}\cdot\frac{1}{\mu}\cos\omega, \tag{16.47}$$

где $v_\parallel^2 = v^2 - J_\perp B_0$; $v_\perp^2 = J_\perp B_0$ в соответствии с оценкой выражения (16.13).

Для запертых частиц константу C естественно выбрать из условия $\xi = 0$ в точках отражения $\omega = \pm\omega_1$.

Положим

$$v^2 - J_\perp B_0 = J_\perp B_0 k\rho_0\cos\omega_1, \tag{16.48}$$

тогда

$$\xi = \frac{mcR}{eB\mu\rho}\sqrt{J_\perp B_0}\sqrt{k\rho_0(\cos\omega_1 - \cos\omega)}. \tag{16.49}$$

Поперечное сечение дрейфовых поверхностей $\xi = \xi(\omega)$ имеет вид серпа (рис. 49, *а*, *б*). Значения $\xi(\omega)$ для внешней и внутренней дуг этого серпа соответствуют различным знакам корня в выражении (16.49). Ширина серпа при $\omega = \pi$ оказывается равной

$$(\Delta\xi)_{\text{макс}} = \frac{2R}{\rho}\cdot\frac{\sqrt{J_\perp B_0}}{\omega_B\mu}\sqrt{k\rho(1 + \cos\omega_1)}. \tag{16.50}$$

Как видно, расстояние, на которое сдрейфовывают запертые частицы поперек магнитных поверхностей, в $1/\sqrt{k\rho}$ раз превышает величину смещения дрейфовых поверхностей пролетных частиц.

В качестве иллюстрации на рис. 49 приведены дрейфовые поверхности зарядов в конфигурации типа «Токамак». Магнитные поверхности определяются функцией $\psi = rA_\varphi$, взятой в виде [35]

$$\psi = \frac{1}{4q(1 + \alpha^2)}\, r^2(2 - r^2 - 4\alpha^2 z^2). \tag{16.51}$$

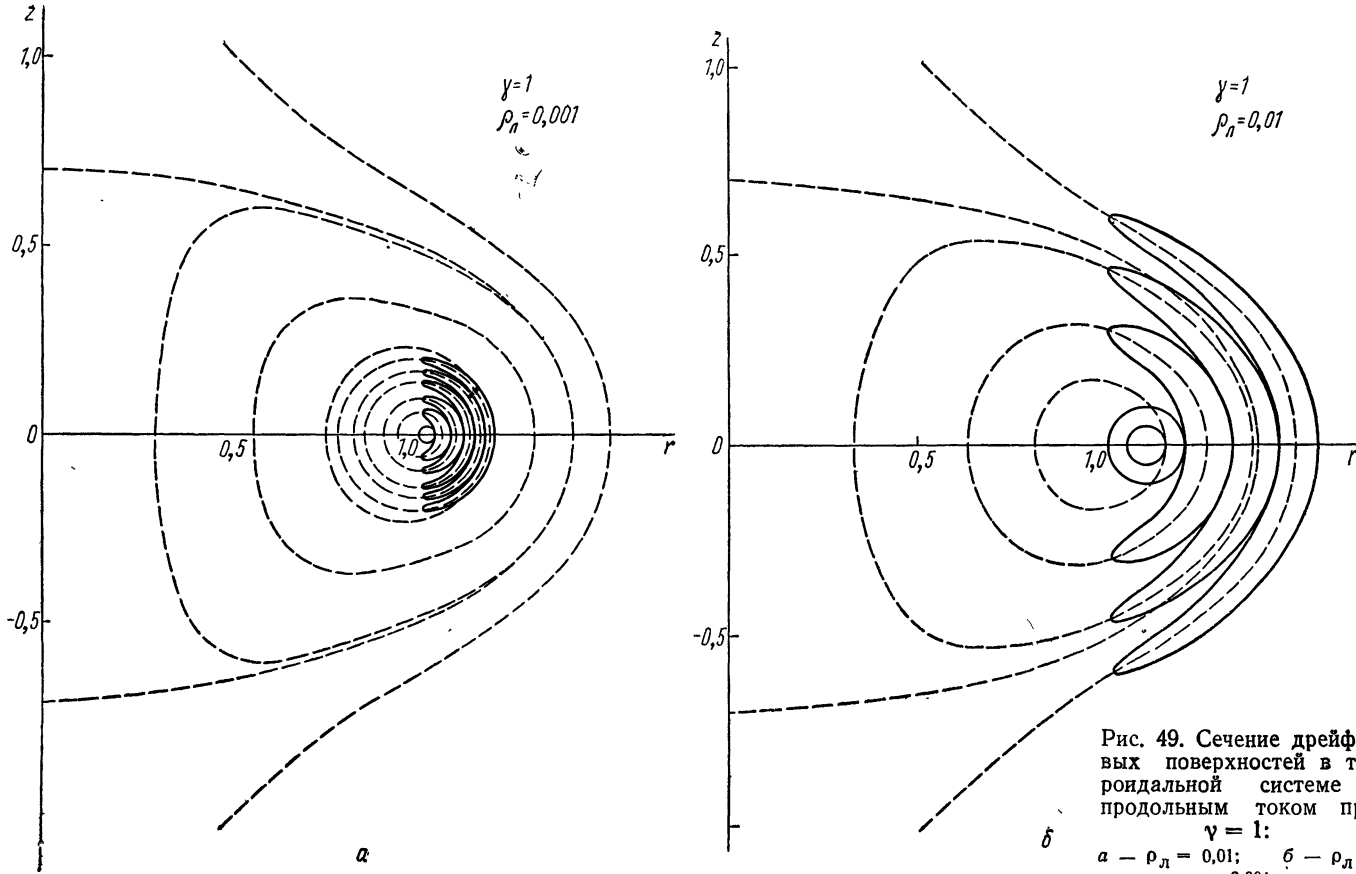


Рис. 49. Сечение дрейфовых поверхностей в тороидальной системе с продольным током при $\gamma = 1$:

а — $\rho_л = 0{,}01$; *б* — $\rho_л = 0{,}001$.

Компоненты магнитного поля выражаются при этом формулами

$$B_\varphi = \frac{1}{r}; \quad B_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad B_z = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}. \qquad (16.52)$$

Здесь радиус кривизны магнитной оси R и величина продольного поля B_0 на магнитной оси приняты за единицу. От параметра $\alpha = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}$, где ε — параметр эллиптичности, зависит форма поперечного сечения магнитных поверхностей. Величина q, по определению равная

$$q = \frac{cB_0}{2\pi j_\varphi^0 R} = \left(\frac{\rho B_0}{R B_\omega}\right)_{\rho=0} = \frac{1}{\mu}, \qquad (16.53)$$

представляет собой так называемый коэффициент запаса устойчивости.

Уравнение дрейфовых поверхностей, согласно формуле (16.39), можно записать в виде

$$\psi^* = \frac{1}{4q(1+\alpha^2)} r^2 (2 - r^2 - 4\alpha^2 z^2) + \frac{r_B}{B}\sqrt{1-\gamma B}, \qquad (16.54)$$

где $B = \sqrt{B_\varphi^2 + B_r^2 + B_z^2}$; r_B — отношение ларморовского радиуса заряда, рассчитанного по полной скорости v в поле B_0, к радиусу кривизны магнитной оси R:

$$r_B = \frac{mcv}{eB_0 R}. \qquad (16.55)$$

Параметр $\gamma = J_\perp B_0 / v^2$ характеризует отношение квадратов поперечной и полной скоростей заряда. Переход от пролетных частиц к запертым осуществляется в результате изменения γ.

Из приведенного рассмотрения следует, что движение заряженных частиц в дрейфовом приближении имеет много общего с поведением магнитных силовых линий. Новым здесь является наличие дополнительного угла прокручивания траекторий ведущего центра пролетных частиц и наличие запертых частиц. Аналогично силовым линиям магнитного поля дрейфовые траектории лежат на тороидальных поверхностях. Поэтому, например, дрейфовые поверхности, как и магнитные, критичны по отношению к резонансным возмущениям. Частица с заданными интегралами движения v_0, $J_\perp$ под влиянием резонансного возмущения магнитного поля (которое может не быть резонансным по отношению к магнитным поверхностям) может перейти с эллиптической поверхности на гиперболическую. Поскольку электроны и ионы из-за различия зарядов, масс и скоростей имеют различные дрейфовые траектории, то для решения вопроса об удержании плазмы важен учет самосогласованных полей. Для решения проблемы удержания заряженных частиц в замкнутых тороидальных конфигурациях требуется более детальное рассмотрение.

МАГНИТНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ВБЛИЗИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ МАГНИТНЫХ ОСЕЙ

В настоящем приложении рассматриваются некоторые вопросы теории магнитных поверхностей без ограничения случаем $\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = 0$. В разд. 1 вводится система координат, вращающаяся вокруг магнитной оси вместе с магнитными поверхностями квадратичного по ρ приближения. В разд. 2 выводится общее выражение для квадратичного периодического интеграла силовых линий магнитного поля. В разд. 3 дано представление магнитных поверхностей в виде ряда по степеням удаления ρ от магнитной оси до членов порядка ρ^4 включительно. В разд. 4 дано приближенное решение задачи о возмущении магнитной конфигурации поперечными полями.

Рассмотрим здесь магнитные поверхности поля $\mathbf{B}$, удовлетворяющего лишь условию $\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$. Коэффициенты разложения компонент магнитного поля по степеням ρ должны удовлетворять еще некоторым соотношениям, например $\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = 0$ или $\nabla p = \frac{1}{c}[\mathbf{jB}]$, которые здесь не конкретизируются.

При вычислении параметров магнитных поверхностей представляется удобным использовать систему координат, вращающуюся вместе с магнитными поверхностями.

1. Система координат

Если в окрестности заданной пространственной кривой, кривизна которой $k(s)$, а кручение $\varkappa(s)$, ввести систему координат x, y, s, направив ось x по нормали, а ось y по бинормали к этой кривой, то квадрат элемента длины будет равен [19]

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 - 2\varkappa ds\,(ydx - xdy) + [(1 - kx)^2 + \varkappa^2(x^2 + y^2)]\,ds^2. \qquad (I.1)$$

В полярных координатах ρ, θ, определяемых равенствами $x = \rho\cos\theta$ и $y = \rho\sin\theta$, выражение (I.1) перепишем в виде

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2(d\theta + \varkappa ds)^2 + (1 - k\rho\cos\theta)^2 ds^2. \qquad (I.2)$$

Отсюда видно, что координаты можно сделать ортогональными, если вместо θ ввести новую угловую координату (см. § 3)

$$\omega = \theta + \alpha(s),$$

где

$$\alpha(s) \equiv \int_0^s \varkappa ds. \qquad (I.3)$$

При этом квадратичная форма (I.2) приводится к сумме квадратов [2]

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 + h_s^2 ds^2,$$

где

$$h_s \equiv 1 - k\rho\cos\theta. \qquad (I.4)$$

Для общих исследований магнитных поверхностей удобно пользоваться ортогональной в плоскости $s = \mathrm{const}$ системой координат

$$x = \rho\cos u;\quad y = \rho\sin u,$$

где

$$u \equiv \theta + \delta(s) = \omega - \alpha(s) + \delta(s), \qquad (I.5)$$

которая при продвижении вдоль оси s вращается с угловой скоростью $\delta'(s)$. Если координатная ось s является замкнутой кривой, длина которой равна L,

то $\delta(s)$ должна быть периодической функцией s с периодом L Квадрат элемента длины во «вращающейся» системе координат $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = s$ определяется квадратичной формой

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + 2u'ds(ydx - xdy) + (h_s^2 + u'^2\rho^2)ds^2 \equiv g_{ik}dx^i dx^k, \qquad (I.6)$$

где $u' = -\varkappa + \delta'(s)$. Детерминант метрического тензора g_{ik} равен h_s^2, а тензор g^{ik} имеет компоненты:

$$g^{ik} = \frac{1}{h_s^2}\begin{pmatrix} h_s^2 + u'^2y^2 & -u'^2xy & -u'y \\ -u'^2xy & h_s^2 + u'^2x^2 & u'x \\ -u'y & u'x & 1 \end{pmatrix}; \quad g = h_s^2. \qquad (I.7)$$

2. Магнитные поверхности в окрестности замкнутой силовой линии

Уравнения магнитных силовых линий в произвольной криволинейной системе координат x^1, x^2, x^3 имеют вид

$$\frac{dx^1}{B^1} = \frac{dx^2}{B^2} = \frac{dx^3}{B^3}, \qquad (I.8)$$

где B^i — контравариантные компоненты магнитного поля $\mathbf{B}$. Примем рассматриваемую замкнутую силовую линию за ось s координатной системы x, y, s, тогда в линейном приближении по отклонениям от оси компоненты поля B^i представляются выражениями:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{g}B^1 &= a_1x + a_2y; \\ \sqrt{g}B^2 &= b_1x + b_2y; \\ \sqrt{g}B^3 &= B_0 + c_1x + c_2y. \end{aligned}\right\} \qquad (I.9)$$

Множитель $\sqrt{g}$ введен для удобства использования уравнения $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$, которое в криволинейных координатах x^1, x^2, x^3 запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{g}B^1) + \frac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt{g}B^2) + \frac{\partial}{\partial x^3}(\sqrt{g}B^3) = 0. \qquad (I.10)$$

Из уравнения (I.10) вытекает, что

$$a_1 + b_2 = -B_0'. \qquad (I.11)$$

Уравнения силовых линий в окрестности замкнутой силовой линии

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{1}{B_0}(a_1x + a_2y); \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{1}{B_0}(b_1x + b_2y) \end{aligned}\right\} \qquad (I.12)$$

представляют собой систему двух линейных уравнений с периодическими коэффициентами, период которых равен L. Обозначим $X_1(s)$, $X_2(s)$, $Y_1(s)$, $Y_2(s)$ решения, удовлетворяющие начальным условиям $X_1(0) = Y_2(0) = 1$, $Y_1(0) = X_2(0) = 0$, тогда решение системы (I.12) на $(n+1)$-м периоде

$$\left.\begin{aligned} x &= x_nX_1(s) + y_nX_2(s); \\ y &= x_nY_1(s) + y_nY_2(s). \end{aligned}\right\} \qquad (I.13)$$

В силу периодичности коэффициентов уравнений (I.12) функции X_1, X_2, Y_1, Y_2 достаточно определить на интервале $(0, L)$, поэтому из соотношений (I.13)

получаем систему линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами α_{ik}:

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= \alpha_{11}x_n + \alpha_{12}y_n; \\ y_{n+1} &= \alpha_{21}x_n + \alpha_{22}y_n; \end{aligned}\right\} \qquad \alpha_{ik} = \begin{pmatrix} X_1(L), & X_2(L) \\ Y_1(L), & Y_2(L) \end{pmatrix}. \tag{I.14}$$

Эти уравнения связывают координаты изображающих точек силовой линии в плоскости $s = 0$ на $(n+1)$-м обороте по тору. Дифференцируя детерминант

$$D(s) = \begin{vmatrix} X_1(s) & X_2(s) \\ Y_1(s) & Y_2(s) \end{vmatrix}$$

и учитывая при этом уравнения (I.12) и начальные значения решений X_1, X_2, Y_1, Y_2, нетрудно убедиться, что $D(s)B_0(s) = \text{const}$ и, следовательно, детерминант матрицы (α_{ik}) равен $D(L) = 1$.

Решение системы разностных уравнений (I.14) в рассматриваемом случае $\mathrm{Det}(\alpha_{ik}) = 1$ записывается в виде

$$\left.\begin{aligned} x_n &= x_0 \cos \mu n + \left(\frac{\alpha_{11} - \alpha_{22}}{2 \sin \mu} x_0 + \frac{\alpha_{12}}{\sin \mu} y_0 \right) \sin \mu n; \\ y_n &= y_0 \cos \mu n + \left(\frac{\alpha_{22} - \alpha_{11}}{2 \sin \mu} y_0 + \frac{\alpha_{21}}{\sin \mu} x_0 \right) \sin \mu n, \end{aligned}\right\} \tag{I.15}$$

где характеристический показатель μ определяется равенствами

$$\cos \mu = \frac{\alpha_{11} + \alpha_{22}}{2}; \quad \sin^2 \mu = -\alpha_{12}\alpha_{21} - \frac{(\alpha_{11} - \alpha_{22})^2}{4}. \tag{I.16}$$

В случае $|\cos \mu| < 1$ силовые линии остаются в окрестности оси s, а в случае $|\cos \mu| > 1$ они уходят от оси s.

Уравнение магнитных поверхностей $\psi(x, y, s) = \text{const}$ является, по определению, однозначным интегралом уравнений силовых линий. Подставляя решения (I.15) в соотношения (I.13) и исключая из полученных уравнений $\sin \mu n$ и $\cos \mu n$, получаем с учетом выражений (I.16) и равенства $D(s)B_0(s) = \text{const}$ поверхностную функцию ψ в виде

$$\psi = B_0(s) \left\{ [\alpha_{21}Y_2^2 - \alpha_{12}Y_1^2 + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) Y_1Y_2] x^2 + [\alpha_{21}X_2^2 - \alpha_{12}X_1^2 + \right.$$

$$\left. + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) X_1X_2] y^2 + 2 \left[\alpha_{12}X_1Y_1 - \alpha_{21}X_2Y_2 - \frac{\alpha_{11} - \alpha_{22}}{2} (X_1Y_2 + X_2Y_1) \right] xy \right\}. \tag{I.17}$$

Таким образом, магнитные поверхности $\psi = \text{const}$ в окрестности замкнутой силовой линии существуют и представляют собой в сечениях $s = \text{const}$ семейство эллипсов или гипербол. В частности, в сечении $s = 0$ уравнением поперечных сечений магнитных поверхностей будет

$$\alpha_{21}x^2 - \alpha_{12}y^2 - (\alpha_{11} - \alpha_{22}) xy = \text{const}. \tag{I.18}$$

Условие положительной определенности квадратичной формы (I.18) $-4\alpha_{12}\alpha_{21} > (\alpha_{11} - \alpha_{22})^2$ эквивалентно условию $|\cos \mu| < 1$. Следовательно, при $|\cos \mu| > 1$ точка O, в которой замкнутая силовая линия пересекает плоскость $s = \text{const}$, является особой точкой эллиптического типа, а при $|\cos \mu| > 1$ точка O становится гиперболической особой точкой. Мы называем рассматриваемую замкнутую силовую линию либо эллиптической магнитной осью, либо гиперболической магнитной осью в зависимости от формы магнитных поверхностей в ее окрестности.

Функции $X_i(s)$, $Y_i(s)$ и постоянные параметры α_{ik}, входящие в выражение (I.17), для ψ, определяются решением уравнений силовых линий (I.12)

на одном периоде L. Интеграл уравнений (I.12), записанный в явном виде в форме (I.17), слабо чувствителен к малым изменениям функций $X_i(s)$ и $Y_i(s)$ и поэтому позволяет исследовать поведение магнитных поверхностей как в нерезонансном, так и в резонансном случае, когда эллиптическая ось под воздействием малых возмущений поля превращается в гиперболическую. Условием резонанса является замкнутость силовых линий в окрестности магнитной оси, когда магнитные поверхности становятся произвольными. Если замыкание силовых линий происходит после N обходов по тору, то резонансное значение характеристического показателя $\mu = 2\pi M/N$, где M и N — целые числа. Более подробно резонансные явления в окрестности магнитной оси рассмотрены в § 10. При наличии перекрещенности силовых линий (*shear*) переход эллиптической оси в гиперболическую означает появление двухлепестковой розетки. Кроме того, в окрестности резонансного значения μ при малых возмущениях поля возможно конечное изменение скорости прокручивания магнитных поверхностей вокруг магнитной оси.

3. Представление магнитных поверхностей в виде рядов по степеням удаления от магнитной оси

Рассмотрим магнитные поверхности вблизи замкнутой силовой линии, принимая ее, как и ранее, за ось s координатной системы $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = s$. Контравариантные компоненты магнитного поля $\mathbf{B}$ представим в виде разложений по степеням поперечных координат x и y:

$$\sqrt{g}B^1 = a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5xy + a_6x^3 + a_7y^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + \cdots$$

$$\sqrt{g}B^2 = b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4y^2 + b_5xy + b_6x^3 + b_7y^3 + b_8x^2y + b_9xy^2 + \cdots; \quad \text{(I.19)}$$

$$\sqrt{g}B^3 = B_0 + c_1x + c_2y + c_3x^2 + c_4y^2 + c_5xy + \cdots$$

Коэффициенты этих разложений a_i, b_i, c_i и B_0 являются, очевидно, периодическими функциями s с периодом L, где L — длина рассматриваемой замкнутой силовой линии. Уравнение $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ приводит к следующим зависимостям между коэффициентами разложений (I.19):

$$\left.\begin{aligned} a_1 + b_2 &= -B_0'; \quad 3a_6 + b_8 = -c_3'; \\ 2a_3 + b_5 &= -c_1'; \quad 3b_7 + a_9 = -c_4'; \\ 2b_4 + a_5 &= -c_2'; \quad 2a_8 + 2b_9 = -c_5', \end{aligned}\right\} \quad \text{(I.20)}$$

где штрихи означают производные по s.

При нахождении поверхностной функции ψ в виде ряда по степеням x и y будем считать известными магнитные поверхности квадратичного приближения и выберем координатные оси x, y таким образом, чтобы они в каждом сечении $s = \text{const}$ совпадали с главными осями эллиптического либо гиперболического сечения магнитных поверхностей в окрестности магнитной оси. Такая система координат вращается с угловой скоростью $\delta'(s)$ вокруг оси s вместе с нормальными сечениями магнитных поверхностей и на периоде L делает целое число оборотов.

Поверхностную функцию квадратичного приближения запишем в виде

$$\psi = \alpha_0 B_0 (e^{\eta}x^2 \pm e^{-\eta}y^2). \quad \text{(I.21)}$$

Здесь и далее верхний знак соответствует случаю эллиптической магнитной оси, а нижний — случаю гиперболической магнитной оси. Функция $\eta(s)$ — периодическая функция с периодом L, а $\alpha_0 = \text{const}$.

Для нахождения магнитных поверхностей $\psi(x, y, s) = \text{const}$ используем уравнение $\mathbf{B}\nabla\psi = 0$, записанное в виде

$$\sqrt{g}B^1\frac{\partial\psi}{\partial x} + \sqrt{g}B^2\frac{\partial\psi}{\partial y} + \sqrt{g}B^3\frac{\partial\psi}{\partial s} = 0. \tag{I.22}$$

В квадратичном приближении уравнение (I.22) приводит к следующим соотношениям для коэффициентов линейных членов разложения поперечных полей:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{2}\left(B_0' + B_0\eta'\right); \\ b_2 &= -\frac{1}{2}\left(B_0' - B_0\eta'\right); \\ a_2 e^{\eta} &\pm b_1 e^{-\eta} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{I.23}$$

Уравнение непрерывности $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ удовлетворяется при этом автоматически, а третьему из соотношений (I.23) можно удовлетворить, введя новую функцию $v(s)$:

$$b_1 = B_0 v'(s)\, e^{\eta}; \qquad a_2 = \mp B_0 v'(s)\, e^{-\eta}, \qquad v(s) \equiv \int_0^s v'(s)\, ds. \tag{I.24}$$

Смысл введенной функции $v(s)$ определится, если рассмотреть уравнения силовых линий в линейном по x, y приближении

$$\left.\begin{aligned} x' &= -\frac{1}{2}\left(\frac{B_0'}{B_0} + \eta'\right)x \mp v' e^{-\eta} y; \\ y' &= v e^{\eta} x - \frac{1}{2}\left(\frac{B_0'}{B_0} - \eta'\right)y. \end{aligned}\right\} \tag{I.25}$$

Как видим, заменой переменных

$$x = B_0^{-1/2} e^{-\eta/2} x_1; \quad y = B_0^{-1/2} e^{\eta/2} y_1 \tag{I.26}$$

эти уравнения приводятся к системе

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \mp v' y_1; \\ y_1' &= v' x_1. \end{aligned}\right\} \tag{I.27}$$

В новых переменных x_1, y_1 магнитные поверхности в окрестности эллиптической магнитной оси становятся цилиндрическими поверхностями $\rho = \text{const}$, а магнитные силовые линии

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_{10}\cos v - y_{10}\sin v; \\ y_1 &= x_{10}\sin v + y_{10}\cos v \end{aligned}\right\} \tag{I.28}$$

вращаются вокруг оси s с угловой скоростью $v'(s)$. Следует заметить, что функция $v(s)$ в общем случае не является периодической, поскольку силовая линия не обязана замыкаться после обхода тора *. В окрестности гипербо-

* Угловая скорость вращения силовых линий v' связана с параметрами магнитных поверхностей u', ε и η вытекающим из уравнения $\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}j$ соотношением:
$v' = \left(u' + \frac{2\pi j_{30}}{cB_0}\right)\frac{1}{\operatorname{ch}\eta}$ для эллиптической оси; $v' = \left(u' + \frac{2\pi j_{30}}{cB_0}\right)\frac{1}{\operatorname{sh}\eta}$ для гиперболической оси.

лической магнитной оси силовые линии описываются уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_{10}\operatorname{ch} v + y_{10}\operatorname{sh} v;\\ y_1 &= x_{10}\operatorname{sh} v + y_{10}\operatorname{ch} v. \end{aligned}\right\} \qquad (I.29)$$

Нормальные сечения магнитных поверхностей в координатах x_1, y_1 представляют собой семейства прямоугольных гипербол.

Считая известными магнитные поверхности квадратичного приближения (I.21), которые характеризуются параметром $\eta(s)$ и угловой скоростью $\delta'(s)$ прокручивания координатных осей x и y вокруг магнитной оси s, ищем поверхностную функцию ψ в виде следующего разложения по степеням x, y:

$$\psi = \alpha_0 B_0 (e^{\eta}x^2 \pm e^{-\eta}y^2) + B_0^{3/2}(\alpha_1 e^{3\eta/2}x^3 + \alpha_2 e^{-3\eta/2}y^3 + \alpha_3 e^{\eta/2}x^2 y +$$

$$+ \alpha_4 e^{-\eta/2}xy^2) + B_0^2(\beta_1 e^{2\eta}x^4 + \beta_2 e^{-2\eta}y^4 + \beta_3 e^{\eta}x^3 y + \beta_4 x^2 y^2 + \beta_5 e^{-\eta}xy^3) + \cdots, \qquad (I.30)$$

где $\alpha_i(s)$ и $\beta_i(s)$ — неизвестные периодические функции, подлежащие определению. В «скругляющих» координатах (I.21) разложение (I.30) имеет вид

$$\psi = \alpha_0(x_1^2 \pm y_1^2) + \alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 y_1^3 + \alpha_3 x_1^2 y_1 + \alpha_4 x_1 y_1^2 + \beta_1 x_1^4 + \beta_2 y_1^4 +$$

$$+ \beta_3 x_1^3 y_1 + \beta_4 x_1^2 y_1^2 + \beta_5 x_1 y_1^3 + \cdots \qquad (I.31)$$

Для определения функций $\alpha_i(s)$ и $\beta_i(s)$ необходимо подставить разложения (I.19) и (I.30) в уравнение (I.22) и приравнять коэффициенты при одинаковых членах третьего и четвертого порядка по x и y.

а) Кубическое приближение

Приравнивание членов третьего порядка по x, y в уравнении (I.22) приводит к системе четырех уравнений для $\alpha_i(s)$:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1' + v'\alpha_3 &= -2\alpha_0 B_0^{-3/2} e^{-\eta/2}(a_3 - B_0^{-1}a_1 c_1) \equiv f_1;\\ \alpha_2' \mp v'\alpha_4 &= \mp 2\alpha_0 B_0^{-3/2} e^{\eta/2}(b_4 - B_0^{-1}b_2 c_2) \equiv f_2;\\ \alpha'^3 \mp 3v'\alpha_1 + 2v'\alpha_4 &= -2\alpha_0 B_0^{-3/2} e^{\eta/2}(a_3 \pm e^{-2\eta}b_3 - B_0^{-1}a_1 c_2) \equiv f_3;\\ \alpha_4' + 3v'\alpha_2 \mp 2v'\alpha_3 &= \mp 2\alpha_0 B_0^{-3/2} e^{-\eta/2}(b_5 \pm e^{2\eta}a_4 - B_0^{-1}b_2 c_1) \equiv f_4. \end{aligned}\right\} \qquad (I.32)$$

После замены переменных

$$3\alpha_1 \pm \alpha_4 = z_1; \quad \pm 3\alpha_2 + \alpha_3 = z_2; \quad \alpha_1 \mp \alpha_4 = z_3; \quad \alpha_3 \mp \alpha_2 = z_4 \qquad (I.33)$$

уравнения (I.32) разбиваются на две стандартные системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} z_1' + v'z_2 &= 3f_1 \pm f_4, \\ z_2' \mp v'z_1 &= \pm 3f_2 + f_3, \end{aligned}\right\} \quad ; \quad \left.\begin{aligned} z_3' + 3v'z_4 &= f_1 \mp f_4, \\ z_4' \mp 3v'z_3 &= f_3 \mp f_2, \end{aligned}\right\} \qquad (I.34)$$

для которых легко получить периодические решения (см. § 9). Искомые функции $\alpha_i(s)$ определяются через $z_i(s)$ соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{4}(z_1 + z_3), & \alpha_3 &= \frac{1}{4}(z_2 + 3z_4),\\ \alpha_2 &= \pm\frac{1}{4}(z_2 - z_4), & \alpha_4 &= \pm\frac{1}{4}(z_1 - 3z_3). \end{aligned}\right\} \qquad (I.35)$$

б) Четвертое приближение

В результате приравнивания членов четвертого порядка по x, y в уравнении (I.22) получим систему пяти уравнений для функций $\beta_i(s)$:

$$\left.\begin{aligned}
&\beta_1' + v'\beta_3 = f_5;\\
&\beta_2' \mp v'\beta_5 = f_6;\\
&\beta_3' \mp 4v'\beta_1 + 2v'\beta_4 = f_7;\\
&\beta_4' \mp 3v'\beta_3 + 3v'\beta_5 = f_8;\\
&\beta_5' \mp 2v'\beta_4 + 4v'\beta_2 = f_9,
\end{aligned}\right\} \qquad (I.36)$$

где правые части $f_i(s)$ определяются равенствами:

$$f_5 = -B_0^{-3/2}(3e^{-\eta/2}a_3\alpha_1 + e^{-3\eta/2}b_3\alpha_3) - 2B_0^{-2}e^{-\eta}a_6\alpha_0 -$$
$$- B_0^{-3}\,e^{-2\eta}\,[c_1(B_0^{3/2}\,e^{3\eta/2}\alpha_1)' + c_3(B_0e^{\eta})'\alpha_0];$$
$$f_6 = -B_0^{-1/2}(3e^{\eta/2}\,b_4\alpha_2 + e^{3\eta/2}a_4\alpha_4) \mp 2B_0^{-2}e^{\eta}b_7\alpha_0 -$$
$$- B_0^{-3}e^{2\eta}\,[c_2(B_0^{3/2}e^{-3\eta/2}\alpha_2)' \pm c_4(B_0e^{-\eta})'\alpha_0];$$
$$f_7 = -B_0^{-3/2}[3e^{\eta/2}a_5\alpha_1 + e^{-\eta/2}(2a_3 + b_5)\alpha_3 + 2e^{-3\eta/2}b_3\alpha_4] -$$
$$- 2B_0^{-2}(a_8 \pm e^{-2\eta}b_6)\alpha_0 - B_0^{-3}\,e^{-\eta}\,[c_1(B_0^{3/2}\,e^{\eta/2}\alpha_3)' +$$
$$+ c_2(B_0^{3/2}\,e^{3\eta/2}\alpha_1)' + c_5(B_0e^{\eta})'\alpha_0];$$
$$f_8 = -B_0^{-3/2}[3e^{3\eta/2}\,a_4\alpha_1 + 3e^{-3\eta/2}\,b_3\alpha_2 + e^{-\eta/2}(2a_5 + b_4)\alpha_3 +$$
$$+ e^{-\eta/2}(2b_5 + a_3)\alpha_4] - 2B_0^{-2}(e^{\eta}a_9 \pm e^{-\eta}b_8)\alpha_0 - B_0^{-3}\,[c_1(B_0^{3/2}e^{-\eta/2}\alpha_4)' -$$
$$+ c_2(B_0^{3/2}e^{\eta/2}\alpha_3)' \pm c_3(B_0e^{-\eta})'\,\alpha_0 + c_4(B_0e_{\eta})'\alpha_0], \qquad (I.37)$$
$$f_9 = -B_0^{-3/2}[3e^{-\eta/2}b_5\alpha_2 + 2e^{3\eta/2}\,a_4\alpha_3 + e^{\eta/2}(2b_4 + a_5)\alpha_4] -$$
$$- 2B_0^{-2}(e^{2\eta}\,a_7 + b_9)\alpha_0 - B_0^{-3}\,e^{\eta}\,[c_1(B_0^{3/2}\,e^{-3\eta/2}\alpha_2)' +$$
$$+ c_2(B_0^{3/2}\,e^{-\eta/2}\,\alpha_4)' \pm c_5(B_0\,e^{-\eta})'\alpha_0].$$

Для решения уравнений (I.36) произведем замену переменных:

$$\left.\begin{aligned}
&2\beta_1 - 2\beta_2 = z_5;\ \beta_3 \pm \beta_5 = z_6;\ \beta_1 + \beta_2 \mp \beta_4 = z_7;\\
&\beta_9 \mp \beta_5 = z_8;\ \beta_4 \pm 3\beta_1 \pm 3\beta_2 = z_9.
\end{aligned}\right\}. \qquad (I.38)$$

В результате уравнения (I.36) распадаются на три системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&z_5' + 2v'z_6 = 2f_5 - 2f_6,\\
&z_6' \mp 2v'z_5 = f_7 \pm f_9,
\end{aligned}\right\};\quad
\left.\begin{aligned}
&z_7' + 4v'z_8 = f_5 + f_6 \mp f_8,\\
&z_8' \mp 4v'z_7 = f_7 \mp f_9,
\end{aligned}\right\};\quad z_9' = f_8 \pm 3f_5 \pm 3f_6. \qquad (I.39)$$

Правая часть уравнения для z_9 при использовании соотношений (I.20) и (I.32) приводится к полной производной, в результате чего получаем интеграл

$$z_9 = \frac{3}{\alpha_0}(\pm\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \pm \frac{3}{4\alpha_0}(\alpha_1 \pm \alpha_4)^2 + \frac{3}{4\alpha_0}(\alpha_2 \pm \alpha_3)^2 + 2B_0^{-2}(\pm e^{-\eta}c_3 +$$
$$+ e^{\eta}c_4)\alpha_0 - B_0^{-3/2}[e^{-\eta/2}c_1(\pm 3\alpha_1 + \alpha_4) + e^{\eta/2}c_2(\pm 3\alpha_2 + \alpha_3)]. \qquad (I.40)$$

К функции z_9 может быть добавлена произвольная постоянная интегрирования, происхождение которой связано с тем, что вместо поверхностной функции ψ можно взять любую функцию от ψ. В частности, к ψ можно добавить величину $C\psi^2$, где C — произвольная постоянная. Действительно, запишем функцию ψ в «скругляющих» полярных координатах

$$x_1 = r\cos\vartheta, \quad y_1 = r\sin\vartheta. \tag{I.41}$$

При этом непосредственно получаем

$$\psi = \alpha_0(\cos^2\vartheta \pm \sin^2\vartheta)r^2 + [(3\alpha_1 + \alpha_4)\cos\vartheta + (3\alpha_2 + \alpha_3)\sin\vartheta +$$
$$+ (\alpha_1 - \alpha_4)\cos 3\vartheta + (\alpha_3 - \alpha_2)\sin 3\vartheta]\frac{r^3}{4} + [3\beta_1 + 3\beta_2 + \beta_4 + 4(\beta_1 - \beta_2)\cos 2\vartheta +$$
$$+ 2(\beta_3 + \beta_5)\sin 2\vartheta + (\beta_1 + \beta_2 - \beta_4)\cos 4\vartheta + (\beta_3 - \beta_5)\sin 4\vartheta]\frac{r^4}{8} + \cdots \tag{I.42}$$

Если выразить функции $\alpha_i(s)$ и $\beta_i(s)$ через независимые величины $z_i(s)$, то в случаях эллиптической и гиперболической магнитных осей получим для ψ соответственно выражения:

$$\left.\begin{aligned}
\psi_э &= \alpha_0 r^2 + [z_1\cos\vartheta + z_2\sin\vartheta + z_3\cos 3\vartheta + z_4\sin 3\vartheta]\frac{r^3}{4} + \\
&+ [2z_9 + 4z_5\cos 2\vartheta + 4z_6\sin 2\vartheta - z_7\cos 4\vartheta + 2z_8\sin 4\vartheta]\frac{r^4}{16} + \cdots; \\
\psi_г &= \alpha_0\cos 2\vartheta r^2 + [(z_1 + 3z_3)\cos\vartheta - (z_2 - 3z_4)\sin\vartheta + \\
&+ (z_1 - z_2)\cos 3\vartheta + (z_2 + z_4)\sin 3\vartheta]\frac{r^3}{8} + [z_7 + 4z_5\cos 2\vartheta + \\
&+ 4z_8\sin 2\vartheta + (2z_7 - z_9)(1 + 4\cos 4\vartheta) + 2z_6\sin 4\vartheta]\frac{r^4}{16} + \cdots
\end{aligned}\right\} \tag{I.43}$$

Отсюда видно, что в обоих случаях (как эллиптической, так и гиперболической магнитных осей) к величине z_9 можно добавить произвольную постоянную, что соответствует в рассматриваемом приближении добавлению к функции ψ этой постоянной, умноженной на ψ^2/α_0^2.

Для наилучшей сходимости ряда для функции ψ эту произвольную постоянную можно выбрать таким образом, чтобы величина z_9 не содержала постоянной слагающей, т. е. была бы периодической функцией s со средним значением, равным нулю: $z_9 \to z_9 - \overline{z_9}$.

Оставшиеся уравнения для определения параметров магнитных поверхностей $z_i(s)$ стандартной формы:

$$\left.\begin{aligned}
z_k' + mv' z_l &= F_k; \\
z_l' \mp mv' z_k &= F_l,
\end{aligned}\right\} \tag{I.44}$$

где $m = 1, 2, 3, \ldots$ В случае эллиптической оси складываем первое уравнение со вторым, умноженным на мнимую единицу i, а в случае гиперболической оси составляем сумму и разность этих уравнений. В результате соответственно получаем уравнения для

$$\sigma_m = z_k + iz_l; \quad \sigma_m^{\pm} = z_k \pm z_l, \tag{I.45}$$

которые имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\sigma_m}{ds} - imv'\sigma_m &= f_k + if_l \equiv F; \\
\frac{d\sigma_m^{\pm}}{ds} \pm mv'\sigma_m^{\pm} &= f_k \pm f_l \equiv F^{\pm}.
\end{aligned}\right\} \tag{I.46}$$

Решения этих уравнений легко найти методом вариации постоянных. Налагая требование периодичности функций $\sigma_m(s)$ и $\sigma_m^{\pm}(s)$, получаем (см. § 9)

$$\sigma_m = \frac{e^{imv(s)}}{e^{-imv(L)}-1}\int_s^{s+L} e^{-imv}\,Fds = \tag{I.47}$$

$$= e^{imv(s)}\left[\frac{1}{e^{-imv(L)}-1}\int_0^L e^{\pm imv}\,Fds + \int_0^s e^{-imv}F^{\pm}ds\right];$$

$$\sigma_m^{\pm} = \frac{e^{\mp mv(s)}}{e^{\pm mv(L)}-1}\int_s^{s+L} e^{\pm nv}F^{\pm}ds =$$

$$= e^{\mp mv(s)}\left[\frac{1}{e^{\pm mv(L)}-1}\int_0^L e^{\mp mv}\,F^{\pm}ds + \int_0^s e^{\pm mv}F^{\pm}ds\right].$$

Решения уравнений для параметров магнитных поверхностей в окрестности эллиптической магнитной оси содержат резонансные знаменатели $\sin[mv\,(L)/2]$, в то время как знаменатели решения в окрестности гиперболической оси, равные $\mathrm{sh}[mv(L)/2]$, малы только при $v(L) \to 0$. В первом случае резонансы соответствуют замыканию силовых линий в окрестности эллиптической оси после любого целого числа обходов по тору. Во втором случае резонанс имеет место тогда, когда силовые линии в окрестности гиперболической оси замыкаются после одного оборота по тору. Поскольку поверхностная функция ψ определена с точностью до произвольного постоянного множителя α_0, то появление малых знаменателей эквивалентно уменьшению амплитуды α_0 квадратичных членов в разложении ψ по степеням x, y. В результате в резонансных случаях в окрестности эллиптической оси возникают розетки с тремя и большим количеством лепестков. Кроме того, наличие в разложении ψ по x, y членов третьего, четвертого и т. д. порядков позволяет выявить появление новых эллиптических и гиперболических магнитных осей, местонахождение которых определяется уравнениями $\partial\psi/\partial x = 0$, $\partial\psi/\partial y = 0$. Такие новые магнитные оси возникают под действием возмущений в окрестности замкнутых силовых линий [19]. Следует заметить, что представляется целесообразным производить расчет магнитных поверхностей, принимая за ось координатной системы гиперболическую магнитную ось, обладающую отличным от нуля кручением $\varkappa \neq 0$, поскольку такая ось устойчива и при расчете магнитных поверхностей не возникает малых знаменателей.

4. Возмущение магнитной конфигурации поперечными полями

Если на заданную магнитную конфигурацию наложить поперечное магнитное поле, то это приведет к смещению магнитной оси и окружающих ее магнитных поверхностей. Рассмотрим смещение магнитных поверхностей в окрестности эллиптической и гиперболической магнитных осей в линейном приближении по возмущающим полям. Разложения контравариантных компонент магнитного поля в окрестности невозмущенной магнитной оси s представим в виде

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{g}B^1 &= a_0 + a_1x + a_2y;\\ \sqrt{g}B^2 &= b_0 + b_1x + b_2y;\\ \sqrt{g}B^3 &= B_0 + c_1x + c_2y.\end{aligned}\right\} \tag{I.48}$$

Будем, как и ранее, считать заданными магнитные поверхности квадратичного приближения в невозмущенной магнитной конфигурации (при $a_0 = b_0 = 0$). В этом случае коэффициенты a_1 и a_2, b_1 и b_2 связаны с параметрами невозмущенных магнитных поверхностей η и v' формулами (I.23) и (I.24). В линейном по a_0, b_0 приближении уравнения силовых линий запишем в виде

$$\left.\begin{aligned} x' + \frac{1}{2}\left(\frac{B_0'}{B_0} + \eta'\right) x \pm v' e^{-\eta} y = \frac{a_0}{B_0}\,; \\ y' + \frac{1}{2}\left(\frac{B_0'}{B_0} - \eta'\right) y - v' e^{\eta} x = \frac{b_0}{B_0}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (I.49)$$

Произведя замену переменных (I.26), получаем

$$\left.\begin{aligned} x_1' \pm v' y_1 = e^{\eta/2} B_0^{-1/2} a_0; \\ y_1' - v' x_1 = e^{-\eta/2} B_0^{-1/2} b_0. \end{aligned}\right\} \qquad (I.50)$$

Остановимся порознь на случаях эллиптической и гиперболической магнитных осей.

а) В случае эллиптической оси решение уравнений (I.50), полученное методом вариации постоянных, имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x_1 = (x_{10} + F_1)\cos v - (y_{10} - F_2)\sin v; \\ y_1 = (x_{10} + F_1)\sin v + (y_{10} - F_2)\cos v, \end{aligned}\right\} \qquad (I.51)$$

где $F_1(s)$ и $F_2(s)$ — следующие функции

$$\left.\begin{aligned} F_1 = \int_0^s B_0^{-1/2} (e^{\eta/2} a_0 \cos v + e^{-\eta/2} b_0 \sin v)\, ds; \\ F_2 = \int_0^s B_0^{-1/2} (e^{\eta/2} a_0 \sin v - e^{-\eta/2} b_0 \cos v)\, ds, \end{aligned}\right\} \qquad (I.52)$$

а x_{10} и y_{10} — координаты силовой линии в плоскости $s = 0$.

Положение новой магнитной оси определяется из требования замкнутости соответствующей силовой линии $x_1(L) = x_{10}$, $y_1(L) = y_{10}$. Согласно уравнениям (I.51), координаты смещенной магнитной оси в плоскости $s = 0$ оказываются равными

$$x_{10}^0 = \frac{1}{2}\left(-F_{1L} + F_{2L}\frac{\sin v_L}{1 - \cos v_L}\right); \quad y_{10}^0 = \frac{1}{2}\left(F_{2L} + F_{1L}\frac{\sin v_L}{1 - \cos v_L}\right). \qquad (I.53)$$

Индекс L означает, что соответствующая функция берется в точке $s = L$. Подставляя выражения (I.53) в уравнение (I.51), получаем координаты $x_1^0(s)$, $y_1^0(s)$ смещенной магнитной оси в произвольном сечении s:

$$\left.\begin{aligned} x_1^0(s) = (F_1 + x_{10}^0)\cos v + (F_2 - y_{10}^0)\sin v; \\ y_1^0(s) = (F_1 + x_{10}^0)\sin v - (F_2 - y_{10}^0)\cos v. \end{aligned}\right\} \qquad (I.54)$$

Уравнения магнитных поверхностей в координатах x_1, y_1, как нетрудно убедиться, исключая $\cos v$ и $\sin v$ из уравнений (I.54), имеют вид

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (y_1 - y_1^0)^2 = \text{const}. \qquad (I.55)$$

Возвращаясь к координатам x, y, получаем поверхностную функцию ψ для смещенных магнитных поверхностей

$$\psi = B_0 \left\{e^{\eta}\left(x - B_0^{-1/2} e^{-\eta/2} x_1^0\right)^2 + e^{-\eta}\left(y - B_0^{-1/2} e^{\eta/2} y_1^0\right)^2\right\}. \qquad (I.56)$$

Следовательно, в линейном приближении по возмущениям магнитные поверхности в произвольном сечении s, перпендикулярном старой эллиптической магнитной оси, представляются эллипсами с тем же эксцентриситетом, что и невозмущенные эллипсы. Смещение центров этих эллипсов в плоскостях $s = \text{const}$ определяется формулами (I.54).

б) В случае гиперболической магнитной оси решение уравнений силовых линий (I.51) записываются в виде

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (x_{10} + F_1)\operatorname{ch} v + (y_{10} + F_2)\operatorname{sh} v; \\ y_1 &= (x_{10} + F_1)\operatorname{sh} v + (y_{10} + F_2)\operatorname{ch} v, \end{aligned}\right\} \tag{I.57}$$

где функции $F_1(s)$ и $F_2(s)$ теперь равны:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \int_0^s B_0^{-1/2}\left(e^{\eta/2} a_0 \operatorname{ch} v - e^{-\eta/2} b_0 \operatorname{sh} v\right) ds; \\ F_2 &= \int_0^s B_0^{-1/2}\left(e^{-\eta/2} b_0 \operatorname{ch} v - e^{\eta/2} a_0 \operatorname{sh} v\right) ds. \end{aligned}\right\} \tag{I.58}$$

Аналогично предыдущему найдем, что координаты новой магнитной оси в плоскости $s = 0$ определяются формулами:

$$x_{10}^0 = \frac{1}{2}\left(-F_{1L} + F_{2L}\frac{\operatorname{sh} v_L}{1 - \operatorname{ch} v_L}\right); \quad y_{10}^0 = \frac{1}{2}\left(-F_{2L} + F_{1L}\frac{\operatorname{sh} v_L}{1 - \operatorname{ch} v_L}\right), \tag{I.59}$$

а в произвольном сечении s:

$$\left.\begin{aligned} x_1^0 &= \left(F_1 + x_{10}^0\right)\operatorname{ch} v + \left(F_2 + y_{10}^0\right)\operatorname{sh} v; \\ y_1^0 &= \left(F_1 + x_{10}^0\right)\operatorname{sh} v + \left(F_2 + y_{10}^0\right)\operatorname{ch} v. \end{aligned}\right\} \tag{I.60}$$

Отсюда следует, что уравнение магнитных поверхностей в координатах x_1, y_1 имеет вид

$$\left(x_1 - x_1^0\right)^2 - \left(y_1 - y_1^0\right)^2 = \text{const}, \tag{I.61}$$

а в координатах x, y описывается поверхностной функцией

$$\psi = B_0\left\{e^{\eta}\left(x - B_0^{-1/2} e^{-\eta/2} x_1^0\right)^2 - e^{-\eta}\left(y - B_0^{-1/2} e^{\eta/2} y_1^0\right)^2\right\}. \tag{I.62}$$

Аналогично эллипсам в плоскости $s = \text{const}$, перпендикулярной старой магнитной оси, гиперболы также смещаются без изменения своей формы.

Резонансное смещение эллиптической магнитной оси происходит при малом $\sin v_L/2$, когда v_L близко к $2\pi N$, $N = 0, 1, 2, \ldots$ При этом силовые линии невозмущенного магнитного поля замыкаются после одного или двух обходов по тору. Резонансное смещение гиперболической магнитной оси имеет место только в случае малого v_L, когда силовые линии почти не прокручиваются вокруг оси.

Рассмотрим далее конкретный пример смещения магнитных осей, полагая a_0, b_0, v', η и B_0 постоянными. В этом случае квазиоднородное возмущающее магнитное поле проворачивается вокруг исследуемой магнитной оси вместе с невозмущенными магнитными поверхностями. Вычисление соответствующих интегралов приводит к уравнению магнитных поверхностей

$$\psi = e^{\eta}(x - x^0)^2 \pm e^{-\eta}(y - y^0)^2 = \text{const}, \tag{I.63}$$

причем величины смещений магнитных осей оказываются равными

$$x^0 = -\frac{e^{-\eta} b_0}{B_0 v'} = -\frac{b_0}{b_1}; \quad y^0 = \pm\frac{e^{\eta} a_0}{B_0 v'} = -\frac{a_0}{a_2}. \tag{I.64}$$

Полученные выражения показывают, что магнитная ось смещается в направлении, перпендикулярном возмущающему полю, и величина смещения обратно пропорциональна амплитуде невозмущенного поля второй гармоники. Таким образом, слабо смещаются ребра сепаратрисы, расположенные вблизи проводников с током, где велико поперечное магнитное поле. Заметим, что в окрестности такой устойчивой гиперболической оси нормальные сечения магнитных поверхностей близки к прямоугольным гиперболам.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ФУНКЦИЙ ψ И ψ^* МЕТОДОМ УСРЕДНЕНИЯ

Если магнитное поле в произвольной тороидальной конфигурации имеет большую продольную компоненту и малые по сравнению с ней поперечные компоненты, то для интегрирования уравнений силовых линий такого поля удобно использовать метод усреднения [19]. Этот метод позволяет получить приближенный интеграл уравнений силовых линий $\psi(\mathbf{r}) = \text{const}$, в котором поверхностная функция $\psi(\mathbf{r})$ выражается непосредственно через компоненты магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. При малом угле прокручивания силовых линий магнитного поля выражение для функции ψ, получающееся в первом приближении по $B_\perp/B_\parallel$, имеет практически достаточную точность. Приведем здесь вывод интеграла $\psi(\mathbf{r}) = \text{const}$ силовых линий магнитного поля $\mathbf{B}$ и оценим с его помощью возмущения магнитных поверхностей при малом возмущении поля $\mathbf{B}$ [47]. Затем применим полученные результаты для получения приближенного интеграла $\psi^* = \text{const}$ дрейфовых траекторий заряженных частиц. В отличие от соответствующих выводов в работе [19] здесь не делается предположений о близости магнитной конфигурации к симметричной и полученные результаты применимы к произвольной тороидальной геометрии.

1. Приближенный интеграл уравнений магнитных силовых линий

Уравнения силовых линий магнитного поля $\mathbf{B}$ запишем в произвольной криволинейной системе координат x^1, x^2, x^3 с метрикой $dl^2 = g_{ik}dx^i dx^k$ в виде

$$\frac{dx^1}{dx^3} = \frac{\sqrt{g}B^1}{\sqrt{g}B^3}; \quad \frac{dx^2}{dx^3} = \frac{\sqrt{g}B^2}{\sqrt{g}B^3}. \tag{II.1}$$

Здесь B^i — контравариантные компоненты векторов $\mathbf{B}$, $g = \text{Det}\, g_{ik}$, а множители $\sqrt{g}$ введены для удобства использования уравнения $\text{div}\, \mathbf{B} = 0$. Предположим, что магнитное поле имеет большую продольную составляющую вдоль некоторого направления x^3, и будем искать приближенные (усредненные по x^3) магнитные поверхности такого поля, зависящие от x^1 и x^2.

Будем считать, что компоненты метрического тензора g_{ik} являются периодическими функциями координаты x^3, имеющими тот же период L, что и поле $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. Представим $\sqrt{g}B^3$ в виде суммы постоянной и переменной (по x^3) частей

$$\sqrt{g}B^3 = \overline{\sqrt{g}B^3} + \widetilde{\sqrt{g}B^3}. \tag{II.2}$$

Прямая черта сверху означает усреднение по периоду изменения x^3 при фиксированных x^1 и x^2, а волнистой чертой обозначается переменная часть, определяющаяся как разность между самой величиной и ее средним

значением. В предположении, что $\widetilde{\sqrt{g}}B^3 \ll \overline{\sqrt{g}\ B^3}$ уравнения (II.1) с точностью до квадратичных членов запишем в виде

$$\frac{dx^k}{dx^3} = \frac{\sqrt{\bar{g}}B^k}{\sqrt{\bar{g}}B^3}\left(1 - \frac{\widetilde{\sqrt{g}B^k}}{\sqrt{\bar{g}}B^3}\right) \equiv f^k(x^1, x^2, x^3). \tag{II.3}$$

Согласно сделанным предположениям, правые части f^k являются малыми периодическими по x^3 функциями. Приближенное решение этих уравнений, полученное методом усреднения, дается выражением [45]

$$x^k = \bar{x}^k + \widehat{f^k}(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) + \cdots, \tag{II.4}$$

где усредненные координаты $\bar{x}^k$ удовлетворяют усредненным уравнениям

$$\frac{d\bar{x}^k}{dx^3} = \bar{f}^k + \overline{\frac{\partial f^k}{\partial x^i}\,\widehat{f^i}}. \tag{II.5}$$

Операция $\widehat{f}$ означает переменную часть неопределенного интеграла по x^3 от переменной части f, а правые части уравнений (II.5) зависят только от переменных $\bar{x}^1$ и $\bar{x}^2$. Если в усредненные уравнения (II.5) подставить выражения для функций f^k из уравнений (II.3) и преобразовать полученные соотношения с учетом уравнения непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{\bar{g}}B^1) + \frac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt{\bar{g}}B^2) + \frac{\partial}{\partial x^3}(\sqrt{\bar{g}}B^3) = 0 \tag{II.6}$$

и уравнений

$$\overline{\sqrt{\bar{g}}B^1} = \frac{\partial \bar{A}_3}{\partial \bar{x}^2}; \qquad \overline{\sqrt{\bar{g}}B^2} = -\frac{\partial \bar{A}_3}{\partial \bar{x}^1}, \tag{II.7}$$

вытекающих из соотношения $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$, где A_3 — ковариантная компонента векторного потенциала $\mathbf{A}$, то уравнения усредненных силовых линий поля $\mathbf{B}$ можно представить в виде

$$\frac{d\bar{x}^1}{dx^3} = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}B^3}\cdot\frac{\partial\bar{\psi}}{d\bar{x}^2}; \qquad \frac{d\bar{x}^2}{dx^3} = -\frac{1}{\sqrt{\bar{g}}B^3}\cdot\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{x}^1}. \tag{II.8}$$

Функция $\bar{\psi}$ имеет следующее выражение:

$$\bar{\psi}(\bar{x}^1, \bar{x}^2) = \bar{A}_3 - \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}B^3}\,\overline{\widehat{\sqrt{\bar{g}}B^1}\sqrt{\bar{g}}B^2}. \tag{II.9}$$

Интеграл уравнений (II.8) $\bar{\psi}(\bar{x}^1, \bar{x}^2) = \text{const}$ и дает уравнения усредненных магнитных поверхностей. Истинные магнитные поверхности с точностью до членов первого порядка малости также определяются уравнением $\bar{\psi}(\bar{x}^1, \bar{x}^2) = \text{const}$, если вместо аргументов функции $\bar{\psi}$ подставить, согласно равенству (II.4), выражения:

$$\bar{x}^1 = x^1 - \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}B^3}\widehat{\sqrt{\bar{g}}B^1}; \quad \bar{x}^2 = x^2 - \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}B^3}\widehat{\sqrt{\bar{g}}B^2}. \tag{II.10}$$

Для того чтобы представить интеграл магнитных поверхностей $\bar{\psi} = \text{const}$ непосредственно через компоненты магнитного поля $\mathbf{B}$, необходимо разрешить

уравнения (II.7) относительно $\overline{A}_3$. Решение этих уравнений можно записать в виде

$$\overline{A}_s = -\int_{\bar{x}_0^1}^{\bar{x}^1} \overline{\sqrt{g}B^2(\bar{x}^1, \bar{x}^2)}\, d\bar{x}^1 + \int_{\bar{x}_0^2}^{\bar{x}^2} \overline{\sqrt{g}B^1(\bar{x}_0^1, \bar{x}_0^2)}\, d\bar{x}^2 \qquad \text{(II.11)}$$

или в эквивалентной форме, отличающейся от (II.11) заменами $x^1 \to x^2$, $x^2 \to x^1$, $B^1 \to B^2$, $B^2 \to B^1$. Интегрирование по одному из аргументов функций $\overline{\sqrt{g}B^1}$ и $\overline{\sqrt{g}B^2}$ в формуле (II.11) производится при фиксированном втором аргументе, а величины $\bar{x}_0^1$ и $\bar{x}_0^2$ — произвольные постоянные.

Если координата x^1 характеризует отклонение от магнитной оси конфигурации магнитных поверхностей, так что $B^1(0, x^2) = 0$, то, полагая $x_0^1 = 0$ и опуская далее черточки сверху у координат x^1 и x^2, получаем следующее выражение для поверхностной функции $\bar{\psi}(x^1, x^2)$:

$$\bar{\psi}(x^1, x^2) = -\int_0^{x_1} \overline{\sqrt{g}B^2}\, dx^1 - \frac{1}{\overline{\sqrt{g}B^3}}\, \overline{\langle\sqrt{g}B^1\rangle \langle\sqrt{g}B^2\rangle}. \qquad \text{(II.12)}$$

Точность, с которой уравнение $\bar{\psi}(x^1, x^2) = \text{const}$ описывает поведение магнитных поверхностей, существенно зависит от выбора переменных x^1, x^2, x^3. Например, в случае симметричного магнитного поля, если координаты x^i выбраны таким образом, что поле не зависит от координаты x^3, уравнение $\bar{\psi}(x^1, x^2) = \text{const}$ является точным уравнением магнитных поверхностей.

Действительно, если $\dfrac{\partial}{\partial x^3} = 0$, то, положив $\overline{\sqrt{g}B^1} = 0$, получим, согласно выражению (II.9),

$$\psi = A_3. \qquad \text{(II.13)}$$

С другой стороны, в рассматриваемом случае уравнения (II.1), записанные в виде

$$\frac{dx^1}{dx^3} = \frac{1}{\overline{\sqrt{g}B^3}} \cdot \frac{\partial A_3}{\partial x^2}; \quad \frac{dx^2}{dx^3} = -\frac{1}{\overline{\sqrt{g}B^3}} \frac{\partial A_3}{\partial x^1}, \qquad \text{(II.14)}$$

имеют очевидный интеграл $A_3 = \text{const}$.

При решении различных задач методом усреднения переменные x^1, x^2, x^3 следует по возможности выбирать таким образом, чтобы «не усреднялись» нужные эффекты.

2. Устойчивость магнитных поверхностей

Наличие общего выражения для поверхностной функции (II.12) позволяет, в частности, исследовать устойчивость магнитных поверхностей. Конфигурация магнитных поверхностей считается устойчивой, если любые малые возмущения магнитного поля не уводят силовую линию далеко от ее первоначальной магнитной поверхности. Пусть невозмущенное поле $\mathbf{B}$ получает малое приращение $\mathbf{b}$, тогда в линейном по $\mathbf{b}$ приближении

$$\bar{\psi}(x^1, x^2) = -\int_0^{x_1} \overline{\sqrt{g}B^2} dx^1 - \frac{1}{\overline{\sqrt{g}B^3}}\, \overline{\langle\sqrt{g}B^1\rangle \langle\sqrt{g}B^2\rangle} -$$

$$-\int_0^{x^1} \overline{\sqrt{g}b^2} dx^1 - \frac{1}{\overline{\sqrt{g}B^3}} \left(\overline{\langle\sqrt{g}B^1\rangle \langle\sqrt{g}b^2\rangle} - \overline{\langle\sqrt{g}B^2\rangle \langle\sqrt{g}b^1\rangle} \right). \qquad \text{(II.15)}$$

Если слагаемые $\bar{\psi}(x^1, x^2)$, которые не содержат возмущений, тождественно равны нулю, то магнитные поверхности являются неустойчивыми, поскольку в этом случае всегда можно выбрать такие возмущения, которые приведут к существенной перестройке магнитных поверхностей. Если же невозмущенная часть $\bar{\psi}(x^1, x^2)$ обращается в нуль только в отдельных точках (x^1, x^2) или линиях $x^1 = x^1(x^2)$, то наличие возмущения приводит лишь к малым деформациям магнитных поверхностей: к их смещению, образованию розеток и волокон и т. д. При этом следует иметь в виду, что вид функции $\bar{\psi}(x^1, x^2)$ зависит от выбора переменных x^i, т. е. от выбора линий $x^1 = \text{const}$ и $x^2 = \text{const}$, вдоль которых производится усреднение в формуле (II.12). Поскольку наиболее опасными являются возмущения, постоянные вдоль замкнутых силовых линий, то для выявления расщепления магнитных поверхностей следует производить усреднение вдоль линий, близких к замкнутым силовым линиям.

Для получения оценок возмущений магнитных поверхностей удобно связать криволинейные координаты x^i с тороидальными магнитными поверхностями невозмущенного поля **B**. Примем, так же как в § 2, за «радиальную» координату продольный магнитный поток Φ. При этом, из равенства $B^i = \mathbf{B}\nabla x^i$, следует $B^1 = 0$, и уравнение силовых линий (II.1) имеет первый интеграл $\Phi = \text{const}$. Вторым интегралом, определяющим поведение силовых линий на магнитной поверхности $\Phi = \text{const}$ невозмущенного поля, является

$$\vartheta = x^2 - \mu(\Phi)\, x^3 = \text{const}, \tag{II.16}$$

где линия x^2 замыкается после полного обхода тора $\Phi = \text{const}$, а период изменения x^2 и x^3 принят равным 2π. Невозмущенное магнитное поле в такой системе координат имеет компоненты

$$2\pi\sqrt{g}B^i = \{0, \mu, 1\}, \tag{II.17}$$

а силовые линии **B** прокручиваются при полном обходе тора на каждой данной магнитной поверхности на одинаковый угол $2\pi\mu$. При этом, поскольку $B^1 = 0$, уравнение возмущенных магнитных поверхностей принимает вид

$$\bar{\psi}(x^1, x^2) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\Phi}\mu(\Phi)\,d\Phi - \int_0^{\Phi}\overline{\sqrt{g}b^2}\,d\Phi. \tag{II.18}$$

Отсюда следует, что устойчивость относительно возмущений, имеющих постоянную составляющую вдоль «азимутальной» линии x^2, определяется отличием от нуля величины μ.

Если на некоторой магнитной поверхности $\Phi = \Phi_1$ средний угол прокручивания $2\pi\mu = 2\pi\dfrac{m}{n}$, где m и n — простые целые числа, то все силовые линии невозмущенного поля **B** на поверхности $\Phi = \Phi_1$ замыкаются после n обходов тора. Перейдем к новой системе координат, отличающейся от прежней заменой $x^2 \to x^2 + \mu(\Phi_1)x^3$, в которой силовые линии на поверхности $\Phi = \Phi_1$ не вращаются. В новой координатной системе координатные линии замыкаются после n обходов тора и, следовательно, компоненты $\sqrt{g}\,B^i$ являются периодическими функциями x^3 с периодом $2\pi n$. Уравнение усредненных магнитных поверхностей запишем теперь в виде

$$\bar{\psi}(x^1, x^2) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\Phi}[\mu(\Phi) - \mu(\Phi_1)]\,d\Phi - \int_0^{\Phi}\overline{\sqrt{g}b^2}\,d\Phi = \text{const}. \tag{II.19}$$

Согласно выражению (II.19), устойчивость магнитных поверхностей относительно возмущений поля, имеющих постоянную составляющую вдоль замкнутой силовой линии, определяется отличием от нуля приращения $\mu(\Phi) - \mu(\Phi_1)$.

Для оценки компоненты возмущающего поля $\sqrt{g}\,b^2$ используем выражение для азимутального потока поля $\mathbf{b}$:

$$d\chi_b = \frac{1}{2\pi}\int \mathbf{b}\nabla x^2 d\tau = \frac{1}{2\pi}\int b^2\sqrt{g}dx^1dx^2dx^3 = \frac{d\Phi}{2\pi}\int \sqrt{g}b^2dx^2dx^3. \quad (II.20)$$

Отсюда следует, что среднее по «азимуту» x^2 значение $\overline{\sqrt{g}b^2}$ равно $d\chi_b/2\pi d\Phi$, и для оценок можно полагать $2\pi\overline{\sqrt{g}\,b^2} \sim d\chi_b/d\Phi$. Полагая, кроме того, $\Phi \sim B_\parallel \pi\rho^2$, $\chi_b \sim Lb_\perp\rho$, где ρ — средний радиус магнитной поверхности, получаем следующие оценки для величин деформаций магнитных поверхностей для случаев, когда отличны от нуля величины μ и $\mu'(\rho)$ соответственно:

$$\delta\rho \sim Lb_\perp/2\pi\mu B_\parallel; \quad (II.21)$$

$$\delta\rho \sim L(Lb_\perp/2\pi\mu' B_\parallel)^{1/2}. \quad (II.22)$$

Аналогичные оценки можно получить и для случая, когда $\mu'(\Phi_1) = 0$, но $\mu^{(k)}(\Phi_1) \neq 0$. Полученные оценки характеризуют порядок смещения или расщепления магнитных поверхностей.

Поскольку магнитная ось также является замкнутой силовой линией, то под влиянием возмущений поля в ее окрестности может появиться розетка. Для получения оценки амплитуды ее лепестков примем

$$\mu \sim \mu^{(n)}\rho^n/n!; \quad b_\perp \sim b_\perp^{(m)}\rho^m/m! \quad (II.23)$$

При этом, если $n + 1 > m$, то в окрестности оси возникает розетка, размеры лепестков которой, согласно выражению (II.18), имеют порядок

$$\rho_\wedge \sim \left[\frac{Ln!\,(n+2)\,b_\perp^{(m)}}{2\pi B_\parallel \mu^{(n)} m!}\right]^{\frac{1}{n-m+1}}. \quad (II.24)$$

3. Приближенные интегралы дрейфовых уравнений

Как показано в § 16, уравнения дрейфового движения заряженной частицы в постоянных во времени полях $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ можно представить в виде уравнений силовых линий эффективного магнитного поля

$$\mathbf{B}_* = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}^*,$$

где

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + \frac{mcv_\parallel}{eB}\mathbf{B}. \quad (II.25)$$

В произвольных криволинейных координатах x^1, x^2, x^3 эти уравнения записываются аналогично уравнениям (II.1) как

$$\frac{dx^1}{dx^3} = \frac{\sqrt{g}B_*^1}{\sqrt{g}B_*^3} = \frac{1}{\sqrt{g}B_*^3}\left(\frac{\partial A_3^*}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2^*}{\partial x^3}\right);$$

$$\frac{dx^2}{dx^3} = \frac{\sqrt{g}B_*^2}{\sqrt{g}B_*^3} = \frac{1}{\sqrt{g}B_*^3}\left(\frac{\partial A_1^*}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3^*}{\partial x^1}\right). \quad (II.26)$$

В случае симметричного поля, если выбрать координаты x^i так, чтобы $\partial/\partial x^3 = 0$, уравнения (II.26) имеют интеграл

$$\psi^* = A_3^* = A_3 - \frac{mcv_\parallel}{eB} B_3. \qquad \text{(II.27)}$$

Приведем для справок выражения для поверхностной функции дрейфовых траекторий в случаях трансляционной $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*(r, \varphi)$, аксиальной $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*(r, z)$ и винтовой $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*(r, \varphi - hz)$ симметрий в цилиндрической системе координат r, φ, z соответственно:

$$\psi^* = A_z^* = -\int_0^r B_\varphi dr + \frac{mcv_\parallel}{eB} B_z;$$

$$\psi^* = rA_\varphi^* = \int_0^r rB_z dr + \frac{mcv_\parallel}{eB} rB_\varphi; \qquad \text{(II.28)}$$

$$\psi^* = A_z^* + hrA_\varphi^* = \int_0^r (hrB_z - B_\varphi)\, dr + \frac{mcv_\parallel}{eB} (B_z + hrB_\varphi).$$

Интеграл (II.27) справедлив как для пролетных, так и для запертых частиц.

Для получения приближенных интегралов уравнений (II.26) в случае несимметричных полей будем считать члены, пропорциональные ларморовскому радиусу частицы, возмущениями и рассмотрим порознь запертые и пролетные частицы.

Если в невозмущенном состоянии (в пренебрежении дрейфом) частица движется по силовой линии магнитного поля между двумя точками отражения или по замкнутой силовой линии, то, выбирая координатные линии x^3 совпадающими с силовыми линиями магнитного поля $\mathbf{B}$, получаем $B^1 = B^2 = 0$, $B^3 \approx B^3$. Приращения поперечных координат x^1, x^2 на периоде невозмущенного движения определяются выражениями [48]:

$$\Delta x^1 = \frac{mc}{\sqrt{g} eB^3} \frac{\partial}{\partial x^2} \oint v_\parallel dl; \quad \Delta x^2 = -\frac{mc}{\sqrt{g} eB^3} \frac{\partial}{\partial x^1} \oint v_\parallel dl, \qquad \text{(II.29)}$$

где интегрирование производится по силовой линии магнитного поля между двумя точками отражения туда и обратно, либо по замкнутой силовой линии. Если заменить приращения Δx^1 и Δx^2 на дифференциалы, то получим приближенный интеграл дрейфовых поверхностей

$$\bar{\psi}^* = J_\parallel = \oint v_\parallel dl = \text{const}. \qquad \text{(II.30)}$$

В том случае, когда частица является пролетной и силовые линии прокручиваются ($\mu \neq 0$), выражение для приближенного интеграла $\psi^* = \text{const}$ имеет другой вид. Действительно, если частица движется в замкнутой тороидальной системе, то, выбирая координаты x^1, x^2, x^3 таким образом, чтобы правые части уравнений (II.26) были малыми периодическими функциями продольной координаты x^3, можно написать усредненные уравнения силовых линий эффективного поля $\mathbf{B}_*$, согласно формулам (II.8), в виде

$$\frac{d\bar{x}^1}{dx^3} = \frac{1}{\sqrt{g} B_*^3} \frac{\partial \bar{\psi}^*}{\partial \bar{x}^2}; \quad \frac{d\bar{x}^2}{dx^3} = -\frac{1}{\sqrt{g} B_*^3} \frac{\partial \bar{\psi}^*}{\partial \bar{x}^1}. \qquad \text{(II.31)}$$

Поверхностная функция $\bar{\psi}^*$ определяется выражением (II.9), где вместо поля $\mathbf{B}$ следует подставить поле $\mathbf{B}_*$. В пренебрежении членами порядка $(r_B/L)^2$ и

$r_B B_\perp / L B_\parallel$ приближенный интеграл уравнений силовых линий эффективного поля $\mathbf{B}_*$ примет вид

$$\bar{\psi}^* = \bar{A}_3 + \frac{\overline{mcv_\parallel B_3}}{eB} - \frac{\overline{\sqrt{g}B^1 \sqrt{g}B^2}}{\sqrt{q}B^3} = \text{const}. \qquad \text{(II.32)}$$

В системе координат, связанной с магнитными поверхностями поля $\mathbf{B}$, в которой в качестве координаты x^1 выбран продольный поток Φ и, следовательно, $B^1 = 0$, поверхностная функция $\bar{\psi}^*$ записывается через средний угол прокручивания силовых линий магнитного поля $\iota(\Phi) = 2\pi\mu(\Phi)$ [см. вывод формулы (II.18)]:

$$\bar{\psi}^* = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\Phi \mu(\Phi)\, d\Phi + \frac{mc}{2\pi e}\oint \frac{v_\parallel}{B} B_3 dx^3. \qquad \text{(II.33)}$$

Здесь x^3 — продольная координата, изменяющаяся в пределах от нуля до 2π. С точностью до членов $(r_B/L)(B_\perp/B_\parallel)^2$ полученный интеграл дрейфовых поверхностей можно записать как

$$2\pi\bar{\psi}^* = -\int_0^\Phi \mu(\Phi)\, d\Phi + \frac{mc}{eL}\oint v_\parallel dl, \qquad \text{(II.34)}$$

где L — длина магнитной оси тороидальной магнитной конфигурации, а $\oint v_\parallel\, dl$ берется по периоду изменения продольной координаты x^3. В случае симметричной конфигурации $\partial/\partial x^3 = 0$ интеграл (II.32) совпадает с точным интегралом (II.27).

ПРИЛОЖЕНИЕ III

ЧИСЛО ЗАЦЕПЛЕНИЙ ДВУХ ЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ

Число оборотов (или зацеплений) N одной замкнутой кривой вокруг другой замкнутой кривой инвариантно относительно произвольных деформаций обеих кривых. Для непересекающихся кривых, заданных уравнениями $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2$, число зацеплений определяется формулой Гаусса

$$N = \frac{1}{4\pi}\oint\oint \frac{\mathbf{R}}{R^3}[d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2],$$

где

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \qquad \text{(III.1)}$$

а интегрирование производится по контурам кривых $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$.

Если считать, что $\mathbf{r}_1(s)$ — радиус-вектор магнитной оси, а $\mathbf{r}_2(s') = \mathbf{r}_1(s') + \nu(s')$ — радиус-вектор кривой, описываемой концом нормали к магнитной оси, то число N оборотов нормали определится выражением (III. 1).

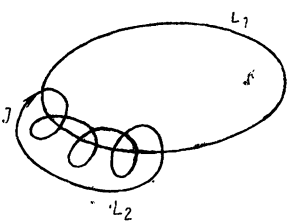


Рис. 50. К расчету числа зацеплений двух контуров.

Как показал В. С. Кудрявцев, формулу (III.1) можно вывести из простого электродинамического рассмотрения. Если представить себе контур L_2 с током J, обвивающим N раз контур L_1 (рис. 50), то получаем

$$\frac{4\pi}{c} NJ = \oint \mathbf{B} d\mathbf{r}_1; \qquad \text{(III.2)}$$

$$\mathbf{B} = \frac{J}{c}\oint \frac{[d\mathbf{r}_2 \mathbf{R}]}{R^3}, \qquad \text{(III.3)}$$

откуда и вытекает формула (III.1) для N.

НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ВСТРЕЧАЮЩИЕСЯ ПРИ РАСЧЕТЕ УДЕЛЬНОГО ОБЪЕМА $V'(\Phi)$ И УГЛА ПРОКРУЧИВАНИЯ $\iota = 2\pi\mu(\Phi)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{du}{1+\varepsilon\cos 2u} = \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}};$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2u\,du}{1+\varepsilon\cos 2u} = \frac{1}{\varepsilon}\left[1-\frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}}\right];$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2u\,du}{(1+\varepsilon\cos 2u)^2} = -\frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}};$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{du}{(1+\varepsilon\cos 2u)^2} = \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}};$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{du}{(1+\varepsilon\cos 2u)^3} = \frac{1+\varepsilon^2/2}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}};$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2u\,du}{(1+\varepsilon\cos 2u)^3} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}};$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 2u\,du}{(1+\varepsilon\cos 2u)^3} = \frac{\varepsilon^2+1/2}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}};$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos 4u\,du}{(1+\varepsilon\cos 2u)^3} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}};$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos 6u\,du}{(1+\varepsilon\cos 2u)^3} = \frac{(1-\varepsilon^2)^{5/2}-1+5\varepsilon^2/2-3\varepsilon^2}{\varepsilon^3(1-\varepsilon^2)^{5/2}}.$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{du}{(1+\varepsilon\cos 2u)^{n+1}} = \frac{1}{2^n(1+\varepsilon)^n\sqrt{1-\varepsilon^2}}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n-2k-1)!!\,(2k-1)!!}{(n-k)!k!}\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^k;$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos^n 2u\,du}{(1+\varepsilon\cos 2u)^{n+1}} = \frac{1}{2^n(1+\varepsilon)^n\sqrt{1-\varepsilon^2}}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(2n-2k-1)!!\,(2k-1)!!}{(n-k)!k!}\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^k.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Арцимович Л. А. Управляемые термоядерные реакции. М., Изд-во АН СССР, 1961.
2. Spitzer L. Phys. Fluids, **1**, 253 (1958).
3. Kruskal M. D., Kulsrud R. M. Phys. Fluids, **1**, 265 (1958).
4. Арнольд В. И. «Успехи матем. наук», **28**, вып. 6, 91 (1963).
5. Hamada S. Nucl. Fusion, **1—2**, 23 (1962).
6. Mercier C. Nucl. Fusion, **3**, 89 (1963); **4**, 213 (1964).
7. Green J. M., Johnson J. L. Phys. Fluids, **5**, 510 (1962).
8. Newcomb W. Phys. Fluids, **2**, 362 (1959).
9. Furth H. P., Rosenbluth M. N. Bull. Amer. Phys. Soc., **10**, 198 (1965).
10. Taylor J. B. Phys. Fluids, **8**, 1203 (1965).
11. Зуева Н. М., Соловьев Л. С. «Атомная энергия», **20**, 396 (1966).
12. McNamara B., Whiteman K. J., Taylor J. B. Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. Culham U. K. (1965). IAEA, Vienna, **1**, 145 (1966).
13. Whiteman K. J. McNamara B., Taylor J. B. Phys. Fluids, **8**, 2293 (1965).
14. Соловьев Л. С., Шафранов В. Д. Конференция по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу. Калэм, Соединенное Королевство (1965). IAEA, Vienna, **1**, 169 (1966).
15. Furth H. P., Rosenbluth M. N., Coppi B. Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. Culham U. K. (1965). IAEA, Vienna, **1**, 103 (1966).
16. Морозов А. И., Соловьев Л. С. «Атомная энергия», **19**, вып. 5 (1965).
17. Бляшке В. Дифференциальная геометрия. М., ОНТИ — КНТЛ (1935).
18. Шафранов В. Д. «Ядерный синтез», **4**, 232 (1964).
19. Морозов А. И., Соловьев Л. С. В сб. «Вопросы теории плазмы». Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 2. М., Госатомиздат, 1963, стр. 92—130.
20. Taylor J. B., Roberts K. V. Phys. Rev. Lett., **8**, 52 (1962).
21. Синельников К. Д., Руткевич Б. И. Лекции по физике плазмы. Изд. Харьков. ун-та, 1964, стр. 172.
22. Попов С. Н., Попрядухин А. П. «Ж. техн. физ.», **36**, 390 (1966).
23. Соловьев Л. С., Шафранов В. Д. «Докл. АН СССР», **170**, № 1, 75 (1966).
24. Мельников В. К. «Докл. АН СССР», **148**, 1257 (1963).
25. Скорняков Г. В. «Ж. техн. физ.», **32**, 261 (1962); **33**, 777 (1962).
26. Rosenbluth M. N. et. al. On the destruction of magnetic surfaces due to the irregularities of magnetic field. IAEA, Trieste, 1966.
27. Чириков Б. В. «Докл. АН СССР», 173, 73 (1967).
28. Мельников В. К. «Докл. АН СССР», **144**, 747 (1962).
29. Шафранов В. Д. «Атомная энергия», **13**, 521 (1962); «Ядерный синтез», **3**, 82 (1962).
30. Шафранов В. Д. «Атомная энергия», **21**, 47 (1966).
31. Eckhar D., von Gierke G., Grieger G. Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. Culham U. K. (1965), IAEA, Vienna, **1**, 103 (1966).
32. Шафранов В. Д. «Атомная энергия», **19**, 120 (1965).
33. Knorr G. Phys. Fluids, **8**, 1334 (1965).
34. Кадомцев Б. Б., Шафранов В. Д. «Докл. АН СССР», **167**, 65 (1966).
35. Шафранов В. Д. В сб. «Вопросы теории плазмы». Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 2. М., Госатомиздат, 1963, стр. 92—130.
36. Брагинский С. И. В сб. «Вопросы теории плазмы». Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 1. М., Госатомиздат, 1962, стр. 183.
37. Rosenbluth M. N. and Longmire C. L. Ann. Phys. N. Y., **1**, 120 (1957).
38 Кадомцев Б. Б. В сб. «Вопросы теории плазмы». Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 2. М., Госатомиздат, 1963, стр. 132—175.

39. Kulsrud R. M. Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. Culham U. K. (1965). IAEA, Vienna, **1**, 127 (1966).
40. Furth H. P. Rosenbluth M. N. Phys. Fluids, **7**, 764 (1964).
41. Lenard A. Phys. Fluids, **7**, 1875 (1964).
42. Johnson J. L. Phys. Fluids, **7**, 2015 (1964).
43. Воронов Г. С., Попрядухин А. П. «Ж. техн. физ.», **34**, 1780 (1964).
44. Бажанова А. Е., Глаголев В. М., Шафранов В. Д. «Ж. техн. физ.», **36**, 1575 (1966).
45. Морозов А. И., Соловьев Л. С. В сб. «Вопросы теории плазмы». Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 2. М., Госатомиздат, 1963, стр. 177—261.
46. Попрядухин А. П. «Атомная энергия», **18**, 96 (1965).
47. Соловьев Л. С. «Докл. АН СССР», **168**, № 1 (1966).
48. Кадомцев Б. Б. В сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Т. III. М., Изд-во АН СССР, 1958.

ТУРБУЛЕНТНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ТОРОИДАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Б. Б. Кадомцев, О. П. Погуце

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, тороидальные системы составляют одно из традиционных направлений, по которому проводятся исследования с целью получения управляемых термоядерных реакций. Сюда относятся как тороидальные разряды («Зета», «Токамак» и др.), в которых плазма удерживается в конечном счете магнитным полем продольного тока, так и системы «Стелларатор», где удержание имеет место и в отсутствие тока.

К сожалению, экспериментальные исследования показали, что удержание плазмы в тороидальных системах значительно хуже, чем это следует из классических представлений. Из экспериментов, проведенных к настоящему времени на многих установках в широком диапазоне изменения параметров плазмы, следует, что даже в отсутствие макроскопических неустойчивостей в плазме имеет место «аномальная диффузия», приводящая к сравнительно быстрой потере частиц и энергии. Этот факт послужил стимулом для интенсивных теоретических исследований, которые показали, что не учитывавшиеся ранее эффекты столкновений и конечного ларморовского радиуса частиц приводят к широкому классу диссипативных и дрейфовых неустойчивостей. К настоящему времени развита достаточно полная линейная теория неустойчивостей неоднородной плазмы, и вполне естественно поставить вопрос о том, какую же угрозу для удержания плазмы в тороидальных системах представляют неустойчивости. Исследование устойчивости плазмы в линейном приближении могло бы дать ответ на этот вопрос, и притом ответ наиболее удовлетворительный, если бы была показана возможность создания тороидальной системы, свободной от всех неустойчивостей. К сожалению, надежды на существование такой системы почти не осталось. Однако инкремент нарастания многих неустойчивостей весьма мал, и поэтому можно ожидать, что усредненные макроскопические эффекты типа усиленных диффузии и теплопроводности от таких неустойчи-

востей будут сравнительно невелики. Другими словами, отказываясь от возможности достижения абсолютной устойчивости, можно поставить своей целью отыскать такие условия, при которых неустойчивости существовали, но эффект от них был бы не слишком велик. Для этого прежде всего необходимо найти величину усредненных макроскопических потоков тепла и частиц, создаваемых развившейся неустойчивостью, другими словами, необходимо исследовать макроскопические эффекты, к которым приводит турбулентность плазмы. Именно этому исследованию и посвящена настоящая работа.

Хотя большинство из полученных результатов имеет более широкий круг применимости, многие конкретные исследования проводятся на примере круглого тора осевой симметрии с продольным током, т. е. для системы типа «Токамак». Это связано не только с большей простотой такой системы, но и с тем, что она обладает некоторыми преимуществами по сравнению с более сложными конфигурациями. Главное ее преимущество — возможность достижения значительного *шира* за счет большой крутизны, т. е. достаточно большого отношения малого радиуса тора a к большому R_0. Другое преимущество состоит в том, что в системах такого рода сам собой образуется минимум среднего магнитного поля на магнитной оси.

В § 1 кратко рассмотрен вопрос о равновесии плазмы в торе и введены удобные для последующего исследования координаты, переходящие в цилиндрические при «выпрямлении» тора, т. е. при $R_0 \to \infty$. Следующие четыре параграфа посвящены исследованию различных неустойчивостей, которым подвержена плазма в тороидальных системах. Излагаемый в этих параграфах материал содержит некоторые новые результаты, например неустойчивость на запертых частицах и неустойчивость из-за конечных орбит, но в значительной мере он носит обзорный характер в том смысле, что многие из разобранных в ней неустойчивостей исследовались ранее. Однако подход к рассмотрению неустойчивостей несколько отличается от общепринятого, поскольку он тесно связан с последующим рассмотрением нелинейных колебаний плазмы, вызванных неустойчивостью.

Нелинейные процессы в плазме тороидальных разрядов исследуются в § 6—10. В § 7 изучается конвекция плазмы, развивающаяся за счет токово-конвективной неустойчивости. Хотя соответствующая аномальная теплопроводность несущественна при высоких температурах (выше 50 *эв*), мы подробно исследуем нелинейную конвекцию, поскольку на данном конкретном примере легко выясняется общий характер нелинейных процессов в тороидальных системах. А именно, как показано в § 7, развивающаяся в тороидальной плазме конвекция обладает тем своеобразием, что наряду с хаотичностью, присущей такой конвекции как турбулентному процессу, в ней присутствуют и играют заметную роль элементы порядка. Порядок вносится магнитным полем: в торо-

идальной системе с широм диссипативные неустойчивости развиваются лишь на возмущениях, сильно втянутых вдоль магнитного поля, так что при наличии перекрещенности силовых линий возмущения локализуются в радиальном направлении таким образом, чтобы шаг возмущения по возможности был ближе к шагу силовых линий. Локализация возмущений приводит к тому, что в первую очередь начинают взаимодействовать возмущения с общей точкой локализации (точкой, где шаг возмущения совпадает с шагом силовых линий), и в плазме развиваются нелинейные конвекционные ячейки. Взаимодействие между различными ячейками имеет следующий характер: для каждой данной ячейки все ячейки более крупного масштаба проявляются в виде некоторого сложного макроскопического течения, которое не очень сильно влияет на картину течения внутри ячейки, а все ячейки меньших масштабов приводят к эффекту типа усиленной теплопроводности, который можно учесть введением эффективного коэффициента теплопроводности. Этот коэффициент различен для ячеек разного масштаба, так как вклад в теплопроводность дают лишь ячейки меньше рассматриваемой. Наибольшей величины эффективный коэффициент теплопроводности достигает в ячейках максимально возможного масштаба, и при этом он, очевидно, близок к макроскопическому коэффициенту теплопроводности, относящемуся ко всей плазме в целом.

Аналогичная картина имеет место при развитии других видов неустойчивости, и она подсказывает следующий метод нахождения эффективных коэффициентов теплопроводности χ и диффузии D. Допустим, что мы с самого начала учтем в уравнениях движения соответствующие эффекты и затем подберем χ или D так, чтобы возмущения с минимальной локализацией были на границе неустойчивости, а все более локализованные решения затухали. Тем самым в крупномасштабных возмущениях учитывается эффект от всех возмущений меньшего масштаба. В результате, найденные эффективные коэффициенты D и χ будут отличаться от истинных только на величину вклада, даваемого самими крупномасштабными возмущениями. А так как D и χ найдены в предположении, что инкремент таких возмущений близок к нулю, то и соответствующий вклад от крупномасштабных возмущений невелик. Другими словами, найденные значения эффективных коэффициентов должны быть близки к истинным, определяемым всеми возмущениями. Именно этот метод и положен в основу нелинейного рассмотрения, которое, таким образом, сводится к линейному с заранее включенными эффективными коэффициентами.

Ввиду этого изменяется и подход к исследованию неустойчивости в линейном приближении. В самом деле, если плазма неустойчива, то нет смысла искать асимптотические решения линеаризованных уравнений при $t \to \infty$, так как колебания очень быстро становятся нелинейными. Поэтому при наличии неустойчивости линейные решения следует рассматривать не как самоцель, а как

полуфабрикат для нелинейного исследования. В качестве такого полуфабриката часто оказывается удобным вместо локализованных решений иметь более грубые решения в квазиклассическом приближении, в котором частота колебаний зависит от r, и, следовательно, соответствующие решения не являются собственными функциями линейных уравнений. Во всяком случае, при анализе неустойчивости в линейном приближении следует учитывать возможность включения эффективных процессов переноса, связанных с колебаниями меньшего масштаба.

Параграфы 2—5 содержат результаты линейной теории устойчивости. В § 2 приведены условия стабилизации плазмы относительно гидромагнитных неустойчивостей в тороидальных системах. В разд. 1 § 2 получен критерий устойчивости плазмы относительно мелкомасштабных возмущений ($m \gg 1$), обобщающий известный критерий Сайдема на случай тороидальной геометрии. В разд. 2 обсуждается вопрос об устойчивости плазмы относительно первых мод (винтовая неустойчивость).

В первых разделах § 3 выводятся уравнения, описывающие диссипативные неустойчивости высокотемпературной плазмы. Рассматриваются токово-конвективная, дрейфово-диссипативная и гравитационная неустойчивости. Последняя не может существовать в системах с минимумом H (таких, как «Токамак»), однако для полноты приводятся основные результаты, относящиеся к этой неустойчивости. Главное внимание уделено получению инкрементов и областей локализации — основных величин, необходимых для последующей нелинейной теории. Отличительной особенностью диссипативных неустойчивостей является сильная их зависимость от шира θ. Небольшое уменьшение шира приводит к резкому увеличению следующих из них коэффициентов переноса.

В § 3 разд. 6 и последующие разделы посвящены бесстолкновительным дрейфовым неустойчивостям. На них особенно наглядно проявляется преимущество введения большого шира. В частности, из результатов этих разделов следует, что в плазме с $\theta \gg (m_e/m_i)^{1/2}$ могут развиваться только две неустойчивости: температурная дрейфовая и во многом с ней сходная электронная температурная, причем последняя приводит к гораздо меньшим макроскопическим коэффициентам. Там же показано, что при равновесии, когда давление плазмы мало, фактически могут развиваться только потенциальные дрейфовые неустойчивости.

В § 4 рассматриваются неустойчивости на запертых частицах. В разд. 1 и 2 этого параграфа рассматриваются бесстолкновительная и столкновительная неустойчивости, возникающие из-за наличия в тороидальных системах локальных ловушек для частиц, приводящих к их разделению на пролетные и захваченные. По-видимому, эта неустойчивость является наиболее опасной в тороидальных системах с разреженной плазмой. В разд. 3 показано, что дрейф частиц в гофрированном магнитном поле приводит

к эффектам, эквивалентным поперечной инерции ионов, т. е. может определять пространственную структуру возмущений. Этот эффект особенно важен в системах с малым широм (типа «Стелларатор»).

Наконец, в § 5 приведены основные результаты относительно высокочастотных дрейфово-циклотронных и ионно-звуковых неустойчивостей. Кроме того, в плазме может развиваться дрейфово-циклотронная неустойчивость, но она сравнительно легко стабилизируется столкновениями. Ионно-звуковая неустойчивость с $kd_e \sim 1$ (d_e — дебаевский радиус) может развиваться только в неизотермической плазме с $T_i \ll T_e$ при наличии продольного тока.

Результаты нелинейной теории суммированы в § 11, где приведены уравнения, описывающие поведение плазмы с учетом турбулентных эффектов типа аномальной диффузии и теплопроводности. В заключении обсуждается вопрос о возможности осуществления управляемых термоядерных реакций при наличии турбулентной утечки плазмы.

§ 1. РАВНОВЕСИЕ

1. Равновесие идеальной плазмы. Система координат

Исследованию равновесного состояния плазмы в тороидальных системах посвящено немало оригинальных статей и обзоров. Здесь мы рассмотрим равновесие лишь в той мере, в какой это необходимо для последующего исследования неустойчивости.

Для простоты рассмотрим систему типа «Токамак», т. е. круглый тор с осевой симметрией с сильным продольным магнитным полем H_ζ. Магнитное поле продольного тока обозначим H_ϑ^0 и будем считать, что $H_\vartheta^0 \ll H_\zeta$. В приближении идеальной магнитной гидродинамики для равновесия достаточно лишь, чтобы градиент давления плазмы был уравновешен силой, оказываемой магнитным полем:

$$\nabla p = \frac{1}{c}[\mathbf{jH}] = \frac{1}{4\pi}[\mathrm{rot}\mathbf{H}, \mathbf{H}], \qquad (1.1)$$

где p — давление плазмы; $\mathbf{j}$ — плотность тока.

Чтобы не усложнять рассмотрение, предположим, что «тороидальность» мала, т. е. малый радиус a тороидального плазменного шнура значительно меньше большого радиуса R_0. Следуя В. Д. Шафранову [1], введем специальные криволинейные координаты, переходящие в обычные цилиндрические координаты при $R_0 \to \infty$. Обозначим новые координаты r, ϑ, ζ, вводя временно для обычных цилиндрических координат обозначения r', ϑ', z'. Предположим, что тороидальный шнур получается путем искривления цилиндрического шнура круглого сечения. Тогда приближенно

можно считать, что магнитные поверхности в сечении $\vartheta' = \text{const}$ представляют собой вложенные одна в другую окружности. Радиус этих окружностей r естественно принять за одну из криволинейных координат, так чтобы уравнение $r = \text{const}$ определяло магнитные поверхности. В качестве второй координаты выберем величину ϑ, связанную с азимутальным углом α малой окружности (рис. 1) соотношением $\vartheta = \alpha - \delta(\alpha)$; малая добавка $\delta(\alpha)$ будет определена ниже. Пусть центр окружности $r = \text{const}$, представляющий собой сечение данной магнитной поверхности, находится на расстоянии $R = R_0 + \Delta(r)$ от оси симметрии (где $R_0 = \text{const}$, а малая величина Δ учитывает смещение магнитных поверхностей за счет искривления). Тогда, выбирая в качестве третьей координаты азимутальный угол ϑ', установим следующую связь между цилиндрическими координатами r', ϑ', z' и введенными нами координатами r, ϑ, ζ:

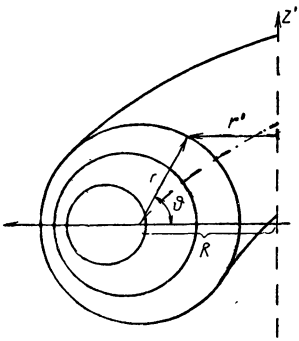


Рис. 1. Система координат.

$$\left.\begin{aligned} r' = R_0 + \Delta(r) - r\cos\alpha = R_0 + \Delta(r) - r\cos(\vartheta + \delta); \\ \vartheta = \zeta;\ z' = r\sin\alpha = r\sin(\vartheta + \delta). \end{aligned}\right\} \quad (1.2)$$

При малой тороидальности, т. е. для $\varepsilon = a/R_0 \ll 1$, величины δ и Δ/a являются малыми, порядка ε. Величина смещения $\Delta(r)$ определяется, как увидим ниже, из условия равновесия, а произвольную величину δ можно подобрать таким образом, чтобы в координатах ϑ, ζ силовые линии невозмущенного магнитного поля были прямыми. Ниже мы будем учитывать лишь малые первого порядка по ε. При малом ε продольное (в смысле соответствия с прямым шнуром) магнитное поле с точностью до малых порядка ε равно

$$H_\zeta = H_0\left(1 + \frac{r}{R}\cos\alpha\right) \approx H_0\left(1 + \frac{r}{R_0}\cos\vartheta\right), \quad (1.3)$$

где H_0 — значение поля на магнитной оси.

Азимутальное магнитное поле в том же приближении может быть представлено в виде

$$H_\vartheta = H_\vartheta^0(1 + \Lambda(r)\cos\vartheta), \quad (1.4)$$

где Λ — некоторый параметр асимметрии, зависящий от распределения давления плазмы и плотности тока.

Учитывая, что δ в соотношениях (1.2) является функцией r, ϑ, запишем выражение для квадрата элемента длины dl^2:

$$dl^2 = dr'^2 + r'^2 d\vartheta'^2 + dz'^2 = \sum g_{ik} dx^i dx^k, \quad (1.5)$$

где $dx^i = \{dr, d\vartheta, d\zeta\}$, а g_{ik} — метрический тензор, отличные от нуля компоненты которого с точностью до малых порядка ε равны:

$$\left.\begin{aligned} g_{11} &= 1 - 2\Delta' \cos\vartheta;\ g_{12} = r\left(\Delta' \sin\vartheta + r\frac{\partial\delta}{\partial r}\right); \\ g_{22} &= r^2\left(1 + 2\frac{\partial\delta}{\partial\vartheta}\right);\ g_{33} = R_0^2\left(1 - \frac{2r}{R_0}\cos\vartheta\right), \end{aligned}\right\} \quad (1.6)$$

где $\Delta' = d\Delta/dr$.

Уравнение силовой линии дается соотношением

$$\frac{d\vartheta}{d\zeta} = \frac{H^2}{H^3},$$

где H^2 и H^3 — вторая и третья контравариантные компоненты вектора магнитного поля, равные соответственно

$$H^2 = H_\vartheta/\sqrt{g_{22}} = \frac{1}{r}H_\vartheta^0\left(1 + \Lambda\cos\vartheta - \frac{\partial\delta}{\partial\vartheta}\right); \quad (1.7)$$

$$H^3 = H_\zeta/\sqrt{g_{33}} = \frac{1}{R_0}H_0\left(1 + \frac{2r}{R_0}\cos\vartheta\right). \quad (1.8)$$

Для исследования устойчивости удобно выбрать δ таким образом, чтобы силовая линия в координатах ϑ, ζ была прямой, т. е. чтобы отношение H^2/H^3 не зависело от ϑ, ζ. Из выражений (1.7) и (1.8) следует, что для этого необходимо выбрать

$$\delta = (\Lambda - 2r/R_0)\sin\vartheta. \quad (1.9)$$

Далее, из уравнения

$$\mathrm{div}\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{g}}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sqrt{g}H^2 = 0 \quad (1.10)$$

с учетом соотношений (1.6) и (1.7) находим

$$\Lambda = \frac{d\Delta}{dr} + \frac{r}{R_0}; \quad (1.11)$$

$$\sqrt{g} = R_0 r\left(1 - 2\frac{r}{R_0}\cos\vartheta\right), \quad (1.12)$$

где $g = \mathrm{Det}\, g_{ik}$. Учитывая соотношения (1.9) и (1.11), находим окончательно выражения для компонент метрического тензора:

$$g_{11} = 1 - 2\Delta'\cos\vartheta; \quad (1.13)$$

$$g_{12} = \left(\Delta'' r^2 + \Delta' r - \frac{r^2}{R_0}\right)\sin\vartheta; \quad (1.14)$$

$$g_{22} = r^2\left[1 + 2\left(\Delta' - \frac{r}{R_0}\right)\cos\vartheta\right]; \quad (1.15)$$

$$g_{33} = R_0^2\left(1 - 2\frac{r}{R_0}\cos\vartheta\right). \quad (1.16)$$

В установленной координатной системе силовые линии являются прямыми:

$$\vartheta = \frac{H_\vartheta^0 R_0}{rH_0}\zeta + \text{const} = \frac{\zeta}{q(r)} + \text{const}, \qquad (1.17)$$

а магнитное поле имеет следующие контравариантные H^i и ковариантные $H_i = \Sigma g_{ik}H^k$ компоненты:

$$H^i = \left\{0;\ \frac{H_\vartheta^0}{r}\left(1 + 2\frac{r}{R_0}\cos\vartheta\right);\ \frac{H_0}{R_0}\left(1 + 2\frac{r}{R_0}\cos\vartheta\right)\right\}; \qquad (1.18)$$

$$H_i = \left\{H_\vartheta^0\left(\Delta''r + \Delta' - \frac{r}{R_0}\right)\sin\vartheta;\ rH_\vartheta^0(1 + 2\Delta'\cos\vartheta);\ R_0H_0\right\}. \qquad (1.19)$$

Учитывая, что третья компонента H_3 наряду с внешним магнитным полем содержит малую добавку δH_3, возникающую из-за азимутального тока, электрический ток можно записать в виде

$$j^i = \frac{c}{4\pi}(\text{rot}\mathbf{H})^i = \left\{0;\ j^2;\ \frac{c}{4\pi\sqrt{g}}\left(\frac{\partial H_2}{\partial r} - \frac{\partial H_1}{\partial\vartheta}\right)\right\}. \qquad (1.20)$$

Из условия $\text{div}\,\mathbf{j} = 0$ следует, что $j^2 = I(r)/\sqrt{g}$, где I зависит только от магнитной поверхности.

Подставляя выражение для $\mathbf{j}$ в уравнение равновесия

$$\nabla p = \frac{1}{c}[\mathbf{jH}] \qquad (1.21)$$

и производя разложение по малому параметру a/R_0, получаем в нулевом приближении уравнение, совпадающее с уравнением равновесия в прямом цилиндре:

$$\frac{IH_0}{cR_0} = 4\pi\frac{dp^0}{dr} + \frac{H_\vartheta^0}{r}\cdot\frac{d}{dr}(rH_\vartheta^0), \qquad (1.22)$$

а в следующем приближении получаем уравнение для величины $\Lambda = \Delta' + r/R_0$:

$$\frac{d}{dr}\left(rH_\vartheta^2\Lambda - \frac{r^2}{R_0}H_\vartheta^2\right) = 8\pi\frac{r^2}{R_0}\cdot\frac{dp}{dr} - \frac{r}{R_0}H_\vartheta^2. \qquad (1.23)$$

Здесь для простоты опущен индекс нуль у H и p. Отсюда находим выражение для Λ [1, 2]:

$$\Lambda = \frac{r}{R_0}\left\{1 + \frac{8\pi p}{H_\vartheta^2} - \frac{1}{r^2H_\vartheta^2}\int_0^r (16\pi p + H_\vartheta^2)\,rdr\right\}. \qquad (1.24)$$

По известной величине Λ нетрудно определить смещение Δ. Если считать, что Δ обращается в нуль при $r = b$, где b — радиус кожуха, то

$$\Delta = -\int_r^b\left(\Lambda - \frac{r}{R_0}\right)dr.$$

Таким образом, полученные выше соотношения однозначно определяют геометрию шнура и соответствующую систему координат для любого распределения p и H_θ по радиусу r.

2. Дрейфовые потоки в равновесной плазме

Выше мы рассмотрели только, так сказать, «силовую часть» равновесия, т. е. определили условия, при которых градиент давления плазмы уравновешен магнитным полем. Чтобы получить более полное представление о равновесном состоянии плазмы, желательно также найти величину тепловых потоков и скорость течения плазмы (включая диффузию). Для этой цели в случае плотной плазмы, когда длина среднего свободного пробега λ не превышает длины $\pi q R_0$, на которой заметно изменяются параметры плазмы вдоль силовых линий магнитного поля, можно воспользоваться уравнениями двухжидкостной гидродинамики [3]:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\operatorname{div} n\mathbf{V}_i = -\operatorname{div} n\mathbf{V}_e; \tag{1.25}$$

$$m_i n \frac{d_i \mathbf{V}_i}{dt} = -\nabla p_i + en\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{V}_i\mathbf{H}]\right) - en\frac{1}{\sigma}\mathbf{j} - \operatorname{Div}\pi_i - \mathbf{R}_T; \tag{1.26}$$

$$m_e n \frac{d_e \mathbf{V}_e}{dt} = -\nabla p_e - en\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{V}_e\mathbf{H}]\right) + en\frac{1}{\sigma}\mathbf{j} - \operatorname{Div}\pi_e + \mathbf{R}_T; \tag{1.27}$$

$$\frac{3}{2} n \frac{d_i T_i}{dt} + p_i \operatorname{div}\mathbf{V}_i = -\operatorname{div}\mathbf{q}^i + Q_\Delta; \tag{1.28}$$

$$\frac{3}{2} n \frac{d_e T_e}{dt} + p_e \operatorname{div}\mathbf{V}_e = -\operatorname{div}\mathbf{q}^e - Q_\Delta + \frac{j^2}{\sigma} + \frac{1}{en}\mathbf{j}\mathbf{R}_T. \tag{1.29}$$

В уравнениях непрерывности (1.25) плотности ионов и электронов считаются совпадающими и равными (квазинейтральность); (1.26) и (1.27) — представляют собой уравнения движения; (1.28) и (1.29) — уравнения теплового баланса; $\mathbf{V}_j$ — средняя скорость частиц сорта j; m_i — масса иона; m_e — масса электрона; $\frac{d_j}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_j\nabla$; $\sigma = \frac{e^2 n \tau_e}{m_e}$ — проводимость плазмы; π_j — тензор вязких напряжений; $\mathbf{R}_T$ — термосила; $\mathbf{q}^j$ — тепловой поток; Q_Δ — теплообмен между электронами и ионами.

Рассмотрим сначала уравнения теплового баланса (1.28) и (1.29). Как известно, поток тепла, переносимый заряженными частицами плазмы в сильном магнитном поле, складывается из поперечного замагниченного $\mathbf{q}_\perp = -\varkappa_\perp \nabla_\perp T$, дрейфового $\mathbf{q}_d = \frac{5}{2}\frac{cnT}{eH^2}[\mathbf{H}\nabla T]$ и продольного $\mathbf{q}_\parallel = -\varkappa_\parallel \nabla_\parallel T$.

Для интересующей нас плазмы с $Z = 1$ (Z — атомный номер) $\varkappa_{\perp i} = 9\dfrac{nTi}{m_i\Omega_i^2\tau_i}$, $\varkappa_{\parallel i} = 3{,}9\dfrac{nT_i\tau_i}{m_i}$, $\Omega_i = \dfrac{eH}{m_ic}$, τ_i — среднее время ион-ионных столкновений. Так как продольная теплопроводность электронов $\varkappa_\parallel \sim n\lambda_e v_e$ исключительно велика, то температуру электронов можно считать постоянной вдоль силовых линий, а следовательно, и на магнитных поверхностях. Температура ионов тоже в первом приближении постоянна на магнитных поверхностях, однако за счет дрейфового потока тепла $\mathbf{q}_d$ поверхности $T = \text{const}$ несколько отклоняются от магнитных поверхностей, так что в первом приближении $T_i = T_0(r) + T'(r)\sin\vartheta$, где $T' \ll T_0$. Величину T' можно найти из условия $\operatorname{div}(\mathbf{q}_d + \mathbf{q}_\parallel) = 0$, показывающего, что продольная теплопроводность стремится устранить отклонение T от магнитной поверхности, вызванное дрейфом. Пренебрегая в уравнении для $\mathbf{q}_d$ малой величиной T' и учитывая, что nT_0 является функцией только r, записываем это условие в виде

$$5\frac{cnT_0}{eH^3}[\mathbf{H}\nabla H]\nabla T_0 + \frac{H_\vartheta^{02}}{r^2H_0^2}\sin\vartheta\cdot\varkappa_\parallel T' = 0. \qquad (1.30)$$

Здесь использованы соотношения $\nabla T_0 \operatorname{rot}\mathbf{H} = 0$ и $\nabla_\parallel = \dfrac{H_\vartheta^0}{H_0 r}\times$ $\times\dfrac{\partial}{\partial\vartheta}$. В градиенте ∇H достаточно учесть лишь неоднородность продольного поля, связанную с тороидальностью, так что в координатах r, ϑ, ζ градиент $\nabla H \approx \{\cos\vartheta, -\sin\vartheta, 0\}\dfrac{H_0}{R_0}$. Следовательно, при $H_\vartheta^0 \ll H_z \approx H_0$

$$T' = -\frac{5cnT_0H_0r^2}{eH_\vartheta^{02}\varkappa_\parallel R_0}\cdot\frac{dT_0}{dr}. \qquad (1.31)$$

По порядку величины $T' \sim T_0/\Omega_i\tau_i \ll T_0$. А для электронной температуры T_e мы получили бы, очевидно, выражение $T_e' \sim T_0/\Omega_e\tau_e \sim$ $\sim\left(\dfrac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}T_i' \ll T_i'$.

Наличие T' приводит к появлению радиальной компоненты q_{dr} у дрейфового потока $\mathbf{q}_d$:

$$q_{dr} = -\frac{5}{2}\cdot\frac{cnT_0}{eHr}T'\cos\vartheta. \qquad (1.32)$$

Если усреднить выражение (1.32) по ϑ с весом $\left(1 - \dfrac{r}{R_0}\cos\vartheta\right)$, чтобы учесть тороидальность, и помня, что $H \approx H_0\times$

$\times\left(1+\frac{r}{R_0}\cos\vartheta\right)$, а затем подставить вместо T' выражение (1.31), то, суммируя полученный результат с $q_{\perp r}$, получаем следующее выражение для радиального потока тепла [4]:

$$q_r = -\frac{2nT_i}{m_i\Omega_i^2\tau_i}(1+1{,}6q^2)\frac{dT_i}{dr}, \qquad (1.33)$$

где $q=\frac{rH_0}{R_0H_\vartheta^0}$ — «коэффициент запаса» по винтовой неустойчивости. Второе слагаемое в круглых скобках выражения (1.33) учитывает дополнительный поток, вызванный тороидальным дрейфом частиц [5].

Рассмотрим теперь уравнение движения электронов (1.27), в котором пренебрежем инерцией, вязкостью и продольной термосилой $\mathbf{R}_{T\parallel}$

$$\nabla p_e = -en\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{V}_e\mathbf{H}]\right)+\frac{en}{\sigma_\parallel}\mathbf{j}_\parallel+\frac{en}{\sigma_\perp}\mathbf{j}_\perp - \\ -\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{\Omega_e\tau_e}[\mathbf{h}\nabla T_e], \qquad (1.34)$$

где $\mathbf{h}=\frac{[\mathbf{H}}{H}$, а в силе трения было учтено различие между продольной и поперечной проводимостями: $\mathbf{j}_\parallel=\mathbf{h}(\mathbf{hj})$, $\mathbf{j}_\perp=\mathbf{j}-\mathbf{j}_\parallel$. Из соотношения (1.34) с учетом уравнения равновесия (1.1) находим

$$\mathbf{v}_e=\frac{c}{H^2}\left[\mathbf{E}+\frac{\nabla p_e}{en},\ \mathbf{H}\right]-\frac{c^2}{\sigma_\perp}\cdot\frac{\nabla p}{H^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{c^2n}{\sigma_\perp H^2}\nabla_\perp T_e+\gamma_e\mathbf{H}, \qquad (1.35)$$

где второе слагаемое описывает диффузию, а третье — термодиффузию плазмы. Слагаемое $\gamma_e\mathbf{H}$ учитывает возможность перетекания электронов вдоль силовых линий. Умножая уравнение (1.34) на $\mathbf{H}$ в предположении, что $\mathbf{H}\nabla p_e=0$, получаем

$$\mathbf{jH}=\sigma_\parallel\mathbf{EH}. \qquad (1.36)$$

Так как $T_e=T_e(r)$, то $\sigma_\parallel$ и $\sigma_\perp$ являются функциями только r. Полагая $\mathbf{j}_\parallel=\alpha\mathbf{H}$ и учитывая, что в стационарных условиях $E_z\approx E_0\left(1+\frac{r}{R_0}\cos\vartheta\right)$, получаем из соотношения (1.36)

$$\alpha=\frac{\sigma_\parallel}{H}\left\{E_0\left(1+\frac{r}{R_0}\cos\vartheta\right)+\frac{H_\vartheta}{H_0}E_\vartheta\right\}. \qquad (1.37)$$

Но из уравнения $\operatorname{div}\mathbf{j}=0$ с учетом уравнения равновесия (1.1) и $\operatorname{div}\mathbf{H}=0$ получаем

$$\mathbf{H}\nabla\alpha\approx H_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial\alpha}{\partial\vartheta}=-\operatorname{div}\mathbf{j}_\perp=\frac{2c[\mathbf{H}\nabla p]\nabla H}{H^3}, \qquad (1.38)$$

откуда находим $\alpha = \alpha_0 + \frac{2cr}{H_0 H_\vartheta^0 R_0} \cdot \frac{dp}{dr} \cos\vartheta$. Подставляя это выражение в (1.37), находим

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_\parallel E_0}{H_0}; \quad E_\vartheta = \frac{2crH_0}{\sigma_\parallel H_\vartheta^{02} R_0} \cdot \frac{dp}{dr} \cos\vartheta. \qquad (1.39)$$

Зная E_ϑ, можно определить радиальную компоненту электрического дрейфа в выражении (1.35), усредняя которую по ϑ с весом $\left(1 - \frac{r}{R_0}\cos\vartheta\right)$ (чтобы учесть увеличение поверхности на внешнем обводе тора), получаем диффузионную скорость [6]

$$v_r^e = -\frac{c^2}{H^2}\left(\frac{1}{\sigma_\perp} + \frac{2q^2}{\sigma_\parallel}\right)\frac{dp}{dr} + \frac{3}{2} \cdot \frac{c^2 n}{\sigma_\perp H^2} \cdot \frac{dT}{dr}. \qquad (1.40)$$

Здесь второе слагаемое в круглых скобках учитывает влияние тороидального дрейфа на диффузию. Из соотношения (1.35) и $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ нетрудно найти компоненты электронной скорости v_ϑ^e и v_ζ^e.

Что касается ионной скорости $\mathbf{v}_i$, то она отличается от $\mathbf{v}_e$ на известную величину $\mathbf{j}/en_0$. При достаточно большой величине $\mathbf{v}_i$ в уравнении равновесия (1.1) следует учитывать инерцию ионов, что приводит к некоторому смещению поверхностей $p = \text{const}$ относительно магнитных поверхностей [7].

Заметим еще, что при наличии градиента температуры в плазме появляется азимутальное электрическое поле, значительно превосходящее величину (1.39). В самом деле, с учетом возмущения температуры (1.31) из условия равновесия $\mathbf{H}\nabla p = 0$ находим

$$2n'T_0 + T'n_0 \sin\vartheta = 0,$$

где n' — возмущение плотности. Так как в первом приближении электроны распределены по Больцману, то принимая во внимание соотношение (1.31), находим

$$E_\vartheta = -\frac{T_0}{en_0 r} \cdot \frac{\partial n'}{\partial \vartheta} = \frac{5cT_0 H_0 r}{2e^2 H_\vartheta^{02} \varkappa_\parallel R_0} \cdot \frac{dT_0}{dr} \cos\vartheta. \qquad (1.39a)$$

Эта величина в $(m_i/m_e)^{1/2}$ раз больше, чем азимутальное поле (1.39).

3. Дрейфовые траектории частиц

Рассмотрим теперь движение отдельных частиц в торе. Как известно, движение ведущего центра заряженной частицы описывается уравнением

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{h}v_\parallel + \frac{c[\mathbf{h}\nabla\varphi_0]}{H} + \frac{mc}{2eH^2}(v_\perp^2 + 2v_\parallel^2)[\mathbf{h}\nabla H]. \qquad (1.41)$$

Совместно с законами сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + e\varphi_0 = \text{const} \tag{1.42}$$

и поперечного магнитного момента

$$\mu = \frac{v_\perp^2}{H} = \text{const} \tag{1.43}$$

оно полностью определяет движение.

Ограничимся здесь более простым случаем $\varphi_0 = 0$. Кроме того, в предположении $\varepsilon = r/R_0 \ll q^2$ под ∇H можно подразумевать градиент лишь продольного поля $H_\zeta = H_0\left(1 + \frac{r}{R_0}\cos\vartheta\right)$. В этом приближении вектор ∇H в ковариантных компонентах равен

$$(\nabla H)_i \approx \left\{\frac{H_0}{R_0}\cos\vartheta;\ -\frac{rH_0}{R_0}\sin\vartheta;\ 0\right\}\left(1 + \frac{2r}{R_0}\cos\vartheta\right). \tag{1.44}$$

Вводя отклонение ξ от силовой линии на магнитной поверхности, согласно соотношению $\xi = \zeta - q\vartheta$, и учитывая приближение (1.44), получаем из соотношения (1.41) с точностью до малых первого порядка по r/R_0

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{R_0 q}\left(1 + \frac{r}{R_0}\cos\vartheta\right)v_\parallel =$$

$$= \pm\frac{v}{R_0 q}\left(1 + \frac{r}{R_0}\cos\vartheta\right)\sqrt{1 - \frac{\mu H_0}{v^2}\left(1 + \frac{r}{R_0}\cos\vartheta\right)}; \tag{1.45}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{mc}{2eH_0R_0}(v^2 + v_\parallel^2)\sin\vartheta\left(1 + \frac{r}{R_0}\cos\vartheta\right); \tag{1.46}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{mc}{2eH_0R_0r}(v^2 + v_\parallel^2)(q\cos\vartheta + q'r\vartheta\sin\vartheta)\left(1 + \frac{r}{R_0}\cos\vartheta\right), \tag{1.47}$$

где $q' = dq/dr$.

Отклонение от силовой линии мало, и поэтому величину r в уравнении (1.45) можно считать постоянной. Таким образом, уравнение для продольного движения (1.45) можно решать независимо от уравнений для отклонения от силовой линии.

Из уравнения для продольного движения (1.45) видно, что наиболее существенным эффектом, возникающим при переходе к тороидальной геометрии, является наличие запертых частиц, совершающих колебания между магнитными пробками. Эти частицы имеют малую продольную скорость $v_\parallel = \sqrt{\varepsilon}v$, т. е. для них $\mu H_0/v^2$ близко к единице, и поэтому в уравнении (1.45) весьма существенной становится зависимость подкоренного выражения от ϑ. Что касается слабой зависимости от ϑ множителя $(1 + \varepsilon\cos\vartheta)$, то ею можно пренебречь. Введем сферическую си-

стему координат v, ψ_π, α в пространстве скоростей в точке $\vartheta = \pi$. Тогда $v_\perp^2/v^2 = \mu H_0(1-\varepsilon)/v^2 = \sin^2\psi_\pi$, и уравнение (1.45) примет вид

$$\frac{d\vartheta}{dt} \approx \pm \frac{v}{R_0 q} \sqrt{\cos^2\psi_\pi - \varepsilon \sin^2\psi_\pi (1+\cos\vartheta)}, \qquad (1.48)$$

где $\varepsilon = r/R_0$.

Отсюда видно, что для малых $\cos^2\psi_\pi$ подкоренное выражение может обращаться в нуль при некоторых значениях ϑ, т. е. происходит отражение частицы от магнитной пробки (магнитного зеркала). Введем дополнительный угол $\gamma_\pi = \frac{\pi}{2} - \psi$. Так как для запертых частиц угол γ мал, то для них можно приближенно положить $\cos^2\psi_\pi \approx \gamma_\pi^2$, $\sin^2\psi_\pi \approx 1$. Вводя, кроме того, новую переменную $\varkappa^2 = \gamma_\pi^2/2\varepsilon$, запишем уравнение (1.48) для частиц с малой продольной скоростью в виде

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \pm \frac{v\sqrt{\varepsilon}}{R_0 q} \sqrt{2\varkappa^2 - 1 - \cos\vartheta}. \qquad (1.49)$$

Точка поворота $\vartheta = \vartheta_0(\varkappa)$, как мы видим, находится при $1 + \cos\vartheta_0 = 2\varkappa^2$. Она существует при $\varkappa < 1$. Таким образом, значение $\varkappa = 1$ отделяет пролетные частицы от запертых. С помощью уравнения (1.49) находим период колебаний τ запертых частиц:

$$\tau = 4\frac{R_0 q}{v\sqrt{\varepsilon}} \int_{\vartheta_0}^{\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2\varkappa^2 - 1 - \cos\vartheta}} = \frac{4R_0 q}{v\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{2}\mathrm{K}(\varkappa), \qquad (1.50)$$

где K — полный эллиптический интеграл первого рода.

Для пролетных частиц ($\varkappa > 1$)

$$\tau = 4\frac{R_0 q}{v\sqrt{\varepsilon}} \int_{0}^{\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2\varkappa^2 - 1 - \cos\vartheta}} = \frac{4\sqrt{2}R_0 q}{v\sqrt{\varepsilon}\,\varkappa} \mathrm{K}\left(\frac{1}{\varkappa}\right). \qquad (1.51)$$

На рис. 2 представлена зависимость величины $\omega_0 = 2\pi/\tau$ от $\varkappa$. При больших $\varkappa$ частицы движутся вдоль магнитного поля практически свободно и $\omega_0 \approx \varkappa \frac{v\sqrt{2\varepsilon}}{2R_0 q}$. При $\varkappa \to 1$ частота обращения частиц по ϑ замедляется до нуля, а затем частицы запираются и ω_0 приобретает смысл угловой частоты колебаний между пробками.

Как видим, при наличии неоднородности вдоль магнитного поля характер движения частиц существенно меняется. А именно если в случае однородного магнитного поля имелись сколь угодно медленно движущиеся частицы, которые могли резонансно взаимодействовать с медленными волнами и приводить

к затуханию волн при $\frac{\omega}{k_\parallel v_i} \to 0$, то теперь (см. рис. 2) медленно движущиеся в среднем частицы практически отсутствуют, так как ω_0 стремится к нулю при $\varkappa \to 1$ всего лишь логарифмически (другими словами, число медленных частиц экспоненциально мало). Таким образом, нет оснований надеяться, что при $\frac{\omega}{k_\parallel v_i} \to 0$ колебания должны быть затухающими. И действительно, как увидим ниже, в тороидальной геометрии может развиваться неустойчивость на запертых частицах. Для исследования этой неустойчивости нам кроме продольного необходимо рассмотреть поперечное движение. При этом в основном нас будут интересовать запертые частицы.

Для частиц с малыми $v_\parallel$ в уравнениях (1.46) и (1.47) можно пренебречь $v_\parallel^2$ по сравнению с v^2, и из уравнения (1.45) получаем

$$\Delta r = \pm \int \frac{mcvq}{2eH_0\sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{\sin\vartheta d\vartheta}{\sqrt{2\varkappa^2 - 1 - \cos\vartheta}} =$$

$$= \pm \frac{mcvq}{eH_0\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{2\varkappa^2 - 1 - \cos\vartheta}. \qquad (1.52)$$

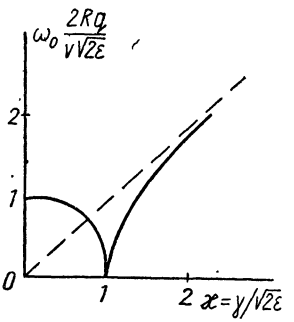


Рис. 2. Средняя угловая скорость движения частиц по азимуту.

Траектории частиц в плоскости r, ϑ изображены на рис. 3. При движении вдоль магнитного поля ($v > 0$) ион сдрейфовывает наружу от магнитной поверхности, а при обратном движении он отклоняется внутрь. Для электронов Δr имеет противоположный знак.

Как видно из выражения (1.52), отклонение ионов по радиусу имеет порядок величины $\Delta r \sim \rho_i q/\sqrt{\varepsilon}$. Будем считать, что эта величина меньше a, так как в противном случае заметная доля ионов могла бы уходить на стенки даже в отсутствие столкновений или неустойчивости.

Для пролетных частиц с $\varkappa \gg 1$ можно считать $v_\parallel = \text{const}$, и тогда из уравнений (1.45) и (1.46) получаем

$$\Delta r = -\frac{q}{2\Omega v_\parallel}(v^2 + v_\parallel^2)\cos\vartheta, \qquad (1.53)$$

откуда видно, что смещение по r пролетных частиц меньше, чем смещение запертых, приблизительно в $\sqrt{R_0/r}$ раз. [Формула (1.53) справедлива, разумеется, только при $v_\parallel \gg v\sqrt{r/R_0}$].

В дальнейшем нам понадобится смещение $\Delta\xi$ запертых частиц вдоль шнура (т. е. вдоль ζ) за период колебаний. Нетрудно видеть, что согласно уравнениям (1.45) и (1.46) это смещение

можно представить в виде

$$\Delta\xi \approx -2\frac{q}{m\Omega r}\frac{d}{dr}J_{\parallel}. \qquad (1.54)$$

Здесь

$$J_{\parallel} = \oint mv_{\parallel}dl = 4\int_0^{\vartheta_0} mv_{\parallel}qR_0(1-\varepsilon\cos\vartheta)\,d\vartheta \approx$$

$$\approx 8\sqrt{2\varepsilon}qR_0v\{E(\varkappa)-(1-\varkappa^2)K(\varkappa)\}, \qquad (1.55)$$

где $E(\varkappa)$ —полный эллиптический интеграл второго рода. Величина $J_{\parallel}$ представляет собой продольный инвариант, равный удвоенному интегралу вдоль силовой линии между точками поворота от продольного импульса $mv_{\parallel}$. Заметим, что соотношение типа (1.54) может быть получено в общем виде для любого квазипериодического движения [8], и, следовательно, оно применимо и к более сложным магнитным конфигурациям.

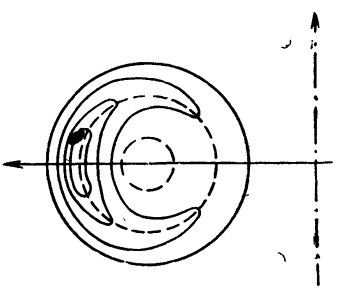


Рис. 3. Траектории частиц в плоскости r, ϑ

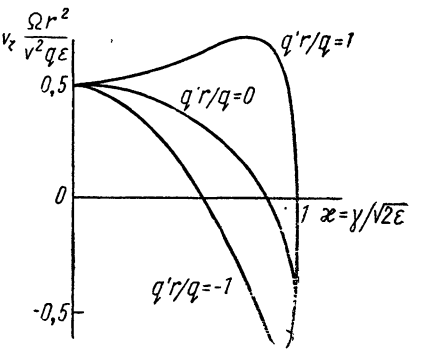


Рис. 4. Зависимость средней скорости магнитного дрейфа от положения точки поворота ϑ_0.

Выполняя дифференцирование в выражении (1.54) и учитывая соотношение (1.51), находим среднюю скорость дрейфа v запертых частиц вдоль ζ:

$$v_\zeta = \frac{\Delta\xi}{\tau} = \frac{v^2q\varepsilon}{\Omega r^2}G(\varkappa), \qquad (1.56)$$

где

$$G(\varkappa) = G_1(\varkappa) + \frac{2q'r}{q}G_2(\varkappa) = \left(\frac{E}{K}-\frac{1}{2}\right) +$$

$$+\frac{2q'r}{q}\left(\frac{E}{K}-1+\varkappa^2\right). \qquad (1.57)$$

Зависимость v_ζ от угла поворота ϑ_0 при разных q' представлена графически на рис. 4. При ϑ_0, близком к π, заряженная частица находится вблизи наружного обвода тороидальной по-

верхности $r = \text{const}$, т. е. в области, где магнитное поле убывает наружу. В этой области при $q' = 0$ частица совершает неблагоприятный с точки зрения устойчивости дрейф ($v_\zeta > 0$). По мере уменьшения ϑ_0 скорость v_ζ уменьшается, и при $\vartheta_0 \approx 0{,}85$ она меняет знак: соответствующие частицы большую часть времени проводят в области $\vartheta < \frac{\pi}{2}$, где магнитное поле возрастает наружу от магнитной поверхности. При $\vartheta_0 \to 0$ скорость v_ζ стремится к некоторой конечной величине, соответствующей скорости дрейфа при $\vartheta_0 = 0$, где частицы проводят основную часть времени.

Если $q' \neq 0$ в выражении для v_ζ появляется дополнительное слагаемое, связанное с тем, что при $v_\parallel > 0$ частица находится в области $\Delta r > 0$, где шаг силовой линии при $q' > 0$ больше шага в точке r, а при $v_\parallel < 0$ частица движется в области с меньшим шагом. В результате при $q' > 0$ вклад в дрейф, связанный с этим эффектом, неблагоприятный, а при $q' < 0$ благоприятный.

При $q' \to -\infty$ доля частиц, совершающих неблагоприятный дрейф, стремится к нулю.

4. Равновесие разреженной плазмы

Если длина пробега становится больше $2\pi Rq$, то заряженная частица при своем движении по силовой линии не успевает столкнуться на одном обороте по малому азимуту, и задача о равновесии становится существенно негидродинамической. В этом случае равновесное состояние определяется кинетическими уравнениями для электронов и ионов

$$\mathbf{v}\nabla f_{0j} + \frac{e_j}{m_j}\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vH}]\right\}\frac{\partial f_{0j}}{\partial \mathbf{v}} = st_j, \qquad (1.58)$$

где st — член столкновений.

В случае редких столкновений уравнение (1.58) можно решать разложением по st, пренебрегая им в нулевом приближении. При этом уравнение (1.58) может быть записано в виде $\frac{df_{0j}}{dt} = 0$, где d/dt представляет собой полную производную вдоль траектории. Общее решение этого уравнения имеет вид произвольной функции от интегралов движения. Другими словами, f_{0j} является постоянной на траекториях частиц. Траекторию отдельной частицы можно записать в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{[\mathbf{hv}]}{\Omega_j}, \qquad (1.59)$$

где $\Omega_j = \frac{e_j H}{m_j c}$; $\mathbf{r}_0$ — координата центра ларморовского кружка; $\mathbf{v}$ — скорость частицы. Как показано в предыдущем пункте, ларморовский центр лишь незначительно отклоняется от магнитной

поверхности на величину Δr, определяемую выражением (1.53). Таким образом, координата $r = r_{00} + \Delta r + \frac{[\mathbf{hv}]_r}{\Omega_j}$, где $r_{00} =$ $= \text{const}$ — магнитная поверхность, вблизи которой движется данная частица. Учитывая соотношения (1.41) и (1.42), находим

$$f\left(\mu H_0, v^2 + \frac{2e_j}{m_j}\varphi_0, r\right) = A = \text{const}, \qquad (1.60)$$

где μ, φ_0, r берутся на заданной траектории.

В нулевом приближении $r = r_{00}$, $\mu H_0 = v_\perp^2$, и, полагая без ограничения общности $\varphi_0(r_{00}) = 0$, получаем в соотношении (1.60) $A = f_0(v_\perp^2, v^2, r_{00})$ (мы считаем, что равновесное состояние симметрично по ϑ). В следующем приближении в соотношение (1.60) нужно подставить

$$r = r_{00} + \Delta r + \frac{[\mathbf{hv}]_r}{\Omega_j};\ \mu H_0 = v_\perp^2\left(1 - \frac{r}{R_0}\cos\vartheta\right);\ \varphi_0 = \frac{\partial\varphi_0}{\partial r}\Delta r + \varphi',$$

где φ' учитывает возможность появления азимутального поля. Разлагая затем полученное выражение в ряд и ограничиваясь первым членом разложения, находим

$$f = f_0(v_\perp^2, v^2, r) - \frac{[\mathbf{hv}]_r}{\Omega_j}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial r} - \Delta r\frac{\partial f_0}{\partial r} + v_\perp^2\frac{r}{R_0}\cos\vartheta\frac{\partial f_0}{\partial v_\perp^2} -$$

$$- \frac{2e_j}{m_j}\cdot\frac{\partial\varphi_0}{\partial r}\Delta r\frac{\partial f_0}{\partial v^2} - \frac{2e_j}{m_j}\varphi'\frac{\partial f_0}{\partial v^2}, \qquad (1.61)$$

где для простоты опущены индексы у r_{00} — координаты, соответствующей рассматриваемой магнитной поверхности.

Так как нас интересуют лишь такие системы, в которых плазма удерживается на протяжении многих столкновений, то функцию f_0 можно считать максвелловской, т. е. $f_0 = F(r)\exp(-m_j v^2/2T_j)$. В соответствии с этим выражение (1.61) принимает более простой вид

$$f = f_0(v^2, r) - \frac{[\mathbf{hv}]_r}{\Omega_j}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial r} - \Delta r\frac{\partial f_0}{\partial r} + \frac{e_j}{T_j}\frac{d\varphi_0}{dr}\Delta r f_0 + \frac{e_j}{T_j}\varphi' f_0. \qquad (1.62)$$

Здесь последнее слагаемое соответствует просто распределению Больцмана по углу ϑ, а второе слагаемое описывает так называемый ларморовский ток. Больший интерес представляют третье и четвертое слагаемые, связанные с движением ларморовских кружков по дрейфовым траекториям. Для электронов смещение Δr весьма мало, и поэтому их можно считать движущимися по магнитным поверхностям, т. е. положить $\Delta r_e = 0$. Что же касается ионов, то их смещение $\Delta r \sim q\rho_i$ может приводить к заметному искажению максвелловской функции (особенно в области запертых частиц, где $\Delta r \sim q\sqrt{R/r}$). При достаточно большом ларморовском радиусе ρ_i часть ионов может непосредственно выходить из объема на стенки камеры. В этом случае шнур

должен заряжаться отрицательно, и равновесие восстанавливается за счет удержания ионов на дрейфовой траектории электрическим полем [в выражении (1.62) этот эффект описывается четвертым членом]. При этом плазма как бы держится на электронах, и поэтому весьма существенно, чтобы в системе имелись магнитные поверхности. В общем случае тороидального равновесия (не осесимметричного) не исключена возможность небольшого разрушения магнитных поверхностей, при котором ионы не чувствуют малых флуктуаций магнитного поля, а электроны (в отсутствие столкновений) могут свободно перетекать на стенки по случайно блуждающим силовым линиям. При этом плазма не может заряжаться отрицательно, и время удержания должно определяться дрейфом ионов. При наличии столкновений этот эффект играет роль только при достаточно сильном разрушении магнитных поверхностей.

В следующем приближении по st можно учесть столкновительные эффекты переноса. По порядку величины они совпадают с найденными в п. 2 [4, 5].

§ 2. ГИДРОМАГНИТНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

1. Желобковая неустойчивость

Как известно, при быстрых перемещениях плотной плазмы магнитное поле можно считать вмороженным в вещество, и поэтому крупномасштабные не слишком медленные неустойчивости достаточно исследовать в приближении идеальной магнитной гидродинамики. Плазма тороидального разряда в этом приближении подвержена двум видам неустойчивости — желобковой и винтовой (см., например, обзор [9]). Обычно в качестве критерия устойчивости плазмы с током по отношению к локальным возмущениям желобкового типа принимают условие Сайдема [10] для прямого шнура:

$$-8\pi p' < \frac{rH_z^2}{4}\left(\frac{q'}{q}\right)^2, \qquad (2.1)$$

где $q = rH_z/R_0H_\vartheta$ — так называемый «коэффициент запаса» по отношению к винтовой неустойчивости, а штрих означает дифференцирование по r.

Однако для тороидальных систем типа «Токамак» с сильным продольным магнитным полем, т. е. при $H_z \gg H_\vartheta$, условие (2.1), вообще говоря, не применимо. В самом деле, желобковая неустойчивость в конечном счете развивается из-за кривизны силовых линий. В прямом разряде радиус кривизны $R_s = rH_z^2/H_\vartheta^2$, и при $H_z \gg H_\vartheta$ он значительно больше r. Ясно, что при $R_s > R_0$ начинает играть роль кривизна силовых линий, связанная с тороидальностью. Эта кривизна меняет знак при изме-

нении малого азимута ϑ: на внешнем обводе силовые линии выпуклы, а на внутреннем вогнуты по отношению к плазме. Поэтому при малых $\beta = 8\pi p/H^2$ проявляется лишь усредненный по азимуту ϑ эффект кривизны, а при увеличении β происходит переход к так называемой «баллонной моде» [11, 12], когда возмущение на внешнем обводе больше, чем на внутреннем.

В рамках идеальной магнитной гидродинамики неустойчивость наступает, когда наряду с исходным осесимметричным равновесным состоянием появляется возможность образования равновесной конфигурации с возмущенным магнитным полем. Поэтому для нахождения критерия устойчивости достаточно исследовать решение уравнения равновесия

$$\nabla p = \frac{1}{c}[\mathbf{jH}] = \frac{1}{4\pi}[\operatorname{rot}\mathbf{H}, \mathbf{H}] \tag{2.2}$$

и определить, при каких условиях существует равновесие, близкое к осесимметричному.

В рассматриваемом нами случае $H_z \gg H_\vartheta$ вместо уравнения (2.2) удобнее использовать вытекающие из него соотношения

$$\mathbf{H}\nabla p = 0;\ \mathbf{j}_\perp = \frac{c[\mathbf{H}\nabla p]}{H^2}, \tag{2.3}$$

где $\mathbf{j}_\perp$ — поперечная по отношению к направлению $\mathbf{H}$ компонента плотности тока, так что полный вектор $\mathbf{j}$ может быть представлен в виде

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_\perp + \alpha\mathbf{H},\ \alpha = \frac{c}{4\pi H^2}\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{H}. \tag{2.4}$$

Из условия $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$ с учетом $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$ и соотношений (2.2)—(2.4) получаем

$$\mathbf{H}\nabla\alpha + \operatorname{div}\mathbf{j}_\perp = \mathbf{H}\nabla\alpha + 2c\frac{[\mathbf{H}\nabla H]}{H^3}\nabla p = 0. \tag{2.5}$$

Рассмотрим теперь исходное равновесное состояние p^0, H_z^0, H_ϑ^0 и линеаризуем уравнения (2.3)—(2.5), предполагая, что возмущение p', H_z', H_ϑ' мало. При этом учтем:

$$H_\vartheta^0 \ll H_z^0,\ p_0 \leqslant H_\vartheta^{02}/8\pi.$$

Так как H_z^0 велико, то возмущением H_z' можно пренебречь (в противном случае возникало бы очень большое возмущение давления магнитного поля $H_z'H_z^0/4\pi$). По той же причине можно пренебречь возмущением H и подразумевать под ним H_z^0.

При малой тороидальности продольное магнитное поле, убывающее как $1/R$ при удалении от оси симметрии тора, с точностью до малых первого порядка по r/R_0, согласно (1.3), равно

$$H_z^0 \approx H_0\left(1 + \frac{r}{R_0}\cos\vartheta\right),$$

где H_0 — продольное магнитное поле на магнитной оси. Таким образом, в первом приближении по тороидальности в уравнении (2.5) можно под ∇H понимать $H_0 \nabla \frac{r}{R_0} \cos\vartheta$, а H^3 заменить на H_0^3. Именно второе слагаемое в уравнении (2.5) и учитывает эффект кривизны силовых линий в тороидальной геометрии. Что же касается выражения (2.4) для α, то в нем можно пренебречь тороидальностью и приближенно считать, что r, ϑ, ζ совпадают с цилиндрическими координатами для прямого шнура.

С учетом сделанных замечаний линеаризованное уравнение (2.5) можно записать в виде

$$\mathbf{H}^0\nabla\alpha' + H_r' \frac{d\alpha_0}{dr} + \frac{2[\mathbf{H}_0\mathbf{e}_x]}{H_0^2 R_0} \nabla p' + \frac{2[\mathbf{H}'\mathbf{e}_x]}{H_0^2 R_0} \nabla p_0 + b = 0, \qquad (2.6)$$

где $\mathbf{e}_x = \nabla r \cos\vartheta$ — единичный вектор, направленный вдоль оси x, а последнее слагаемое b учитывает члены второго порядка малости по r/R_0.

Так как ∇p_0 направлен по радиусу r, то предпоследнее слагаемое в (2.6) пропорционально H_z' и поэтому пренебрежимо мало.

В силу $H_z^0 \gg H_\vartheta^0$ величина

$$\alpha_0 \approx \frac{1}{H_0} j_0 = \frac{c}{4\pi H_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} r H_\vartheta^0, \qquad (2.7)$$

а возмущение α'

$$\alpha' \approx \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{\mathbf{H}_0}{H_0^2} \mathrm{rot}\, \mathbf{H}' = \frac{c}{4\pi H_0} \left\{ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r \mathbf{H}_\vartheta' - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} H_r' \right\}. \qquad (2.8)$$

Так как H_z' мало, то уравнение непрерывности $\mathrm{div}\, \mathbf{H}' = 0$ принимает вид

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r H_r' + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} H_\vartheta' = 0. \qquad (2.9)$$

Отсюда видно, что возмущение магнитного поля можно выразить через функцию тока ψ:

$$r H_r' = \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}; \quad H_\vartheta' = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \qquad (2.10)$$

Подставляя эти выражения в равенство (2.8), а затем α' в уравнение (2.6), получаем

$$\mathbf{H}^0\nabla\Delta_\perp\psi + \frac{4\pi}{cr} \cdot \frac{dj_0}{dr} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} + \frac{8\pi}{cR_0} \left\{ \sin\vartheta \frac{\partial p'}{\partial r} + \right.$$
$$\left. + \cos\vartheta \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p'}{\partial \vartheta} \right\} + \frac{4\pi b}{c} = 0, \qquad (2.11)$$

где

$$\Delta_\perp \psi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2}.$$

Чтобы найти величину b, учтем, что желобковая неустойчивость развивается на возмущениях, сильно вытянутых вдоль магнитного поля, когда $\mathbf{H}^0\nabla\alpha' \to 0$, $\mathbf{H}^0\nabla\ p' \to 0$, т. е. α' и p' — представляют собой медленно меняющиеся функции вдоль силовой линии. Но $\mathbf{H}^0\nabla = H_0\frac{\partial}{\partial l}$, где $\frac{\partial}{\partial l}$ — производная вдоль силовой линии, и, следовательно, в пренебрежении $\nabla\alpha_0$ имеем из уравнения (2.5)

$$\alpha' = -\int \frac{\operatorname{div} \mathbf{j}_\perp}{H}\, dl, \tag{2.12}$$

где H — невозмущенное магнитное поле. Так как p' — медленно меняющаяся функция l, то в (2.12) можно произвести интегрирование по ограниченному участку l, считая p' постоянным. Если этот участок соответствует одному или нескольким оборотам по ϑ, то тем самым производится усреднение по l и выделяются необходимые члены второго порядка малости по r/R_0. Для вычисления интеграла в выражении (2.12) воспользуемся введенной в § 2 криволинейной системой координат, в которой магнитные поверхности совпадают с координатными поверхностями $r = \text{const}$, а отношение $H^3/H^2 = q(r)$ не зависит от ϑ. В этой системе координат соотношение (2.12) запишем в виде

$$\alpha' = -\int \frac{c\,dl}{H\sqrt{g}}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{1}{H^2}\left(H_2\frac{\partial p'}{\partial\zeta} - H_3\frac{\partial p'}{\partial\vartheta}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial\vartheta}\cdot\frac{1}{H^2}\left(H_3\frac{\partial p'}{\partial r} - H_1\frac{\partial p'}{\partial\zeta}\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\cdot\frac{1}{H^2}\left(H_1\frac{\partial p'}{\partial\vartheta} - H_2\frac{\partial p'}{\partial r}\right)\right\}, \tag{2.13}$$

где H_i — ковариантные компоненты невозмущенного магнитного поля. Так как p' почти постоянно вдоль силовых линий, то приближенно $\frac{\partial p'}{\partial\vartheta} \approx -q\frac{\partial p'}{\partial\zeta}$. Учтем далее, что вдоль силовой линии $\frac{dl}{H} = \frac{d\vartheta}{H^2} = \frac{d\zeta}{H^3}$, где H^i — контравариантные компоненты $\mathbf{H}^0$, и что, согласно уравнению (1.10), величина $\sqrt{g}H^2$ не зависит от ϑ. Тогда соотношение (2.13) можно записать в виде

$$\alpha' = -\frac{c}{\sqrt{g}H^2}\int\left\{\frac{\partial p'}{\partial\vartheta}\cdot\left(\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial r}\frac{H_2}{H^2} + \frac{\partial}{\partial r}\frac{H_3}{H^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial p'}{\partial r}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}\cdot\frac{H_3}{H^2} - \frac{\partial p'}{\partial\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}\cdot\frac{H_1}{H^2}\right\}d\vartheta. \tag{2.14}$$

Поскольку p' медленно меняется вдоль силовой линии, производные от p' в подынтегральном выражении можно считать постоянными и произвести усреднение по ϑ. При этом второе и третье

слагаемые выпадают, а первое приводит к выражению

$$\alpha' = -\frac{c}{\sqrt{g}H^2 2\pi}\int \frac{\partial p'}{\partial \zeta}\cdot\left(\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{2\pi r^2}{R_0 q^3}\frac{dq}{dr}\right)d\vartheta, \qquad (2.15)$$

где

$$U = \lim_{\Theta\to\infty}\frac{2\pi}{\Theta q}\int_0^{\Theta}\frac{H_2+qH_3}{H^2}d\vartheta = \int\frac{dl}{H}. \qquad (2.16)$$

Мы учли здесь, что $H_2 d\vartheta + qH_3 d\vartheta = H_2 d\vartheta + H_3 d\zeta = \mathbf{H}d\mathbf{l}$, $H_2 \cong rH_\vartheta^0$. Так как при $H_\vartheta^0 \ll H_z^0$ приближенно $U \approx 2\pi R_0/H_0$, $\sqrt{g} = rR_0$, $d\vartheta/H^2 = dl/H_0$, то соотношение (2.15) может быть записано в виде

$$\alpha' = -\int \frac{c[\mathbf{H}^0\nabla p']}{H_0^3}\left(\frac{\nabla U}{U}+\frac{r^2}{R_0^2}\frac{\nabla q}{q^3}\right)dl, \qquad (2.17)$$

где H_0 можно считать постоянным и равным значению поля на магнитной оси, поскольку ∇U является величиной второго порядка малости по r/R_0. Считая $q^2 \gg 1$ пренебрежем вторым слагаемым в круглых скобках подынтегрального выражения в формуле (2.17). Дифференцируя соотношение (2.17) вдоль силовой линии, получаем $\mathbf{H}^0\nabla\alpha' + b = 0$;
где

$$b = \frac{cH^0[\nabla p'\nabla U]}{H_0^2 U}. \qquad (2.18)$$

Это и есть искомое нами значение усредненных по углу ϑ членов второго порядка малости по r/R_0 в соотношении (2.6). Вычисление этой величины с помощью прямого разложения по r/R_0 потребовало бы более громоздких выкладок.

Добавляя к уравнению (2.11) линеаризованное первое уравнение (2.3), т. е.

$$\mathbf{H}^0\nabla p' + \frac{1}{r}\cdot\frac{dp_0}{dr}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} = 0, \qquad (2.19)$$

находим систему двух уравнений для p' и ψ.

Заметим, что в случае прямого шнура ($R_0 \to \infty$) при $H_\vartheta^0 \ll H_z^0$, учитывая малые величины порядка H_ϑ^2/H_z^2, мы получили бы уравнение вида (2.11), в котором вместо последних двух слагаемых стояло бы выражение $\frac{4\pi}{cR_s}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial p'}{\partial\vartheta} \equiv \frac{4\pi H_\vartheta^{02}}{cH_z^{02}}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial p'}{\partial\vartheta}$. Отсюда видно, что тороидальность начинает играть роль при $R_0 < R_s$. В силу периодичности по ϑ и z произвольное решение системы уравнений (2.11) и (2.19) можно представить в виде $\psi = \psi_{mn}(\vartheta, r)\exp(im\vartheta - in\zeta)$ и аналогично для p', где функции $\psi_{mn}(\vartheta, r)$, $p_{mn}(\vartheta, r)$ можно считать имеющими минимальное чис-

ло узлов по ϑ. Другими словами, если ψ_{mn} и p_{mn} разложить в ряд Фурье по ϑ, т. е. $\psi_{mn} = \sum_l \psi_l \exp(il\vartheta)$, то ψ_l должны убывать с номером l.

Подставляя это разложение в уравнения (2.11) и (2.19) и переходя от функции тока ψ к величине $\xi_l = \psi_l/k_l$, где $k_l = \frac{m+l}{r} \cdot \frac{H_\vartheta^0}{H_z^0} - \frac{n}{R_0}$, после исключения p' получаем систему уравнений для гармоник ξ_l:

$$k_l \Delta_\perp k_l \xi_l + \frac{4\pi(m+l)}{crH_0} \cdot \frac{dj_0}{dr} k_l \xi_l - A\left\{-\frac{2R_0}{R_s}(m+l)^2 \xi_l + \right.$$

$$+ (m+l-1)^2 \xi_{l-1} + (m+l+1)^2 \xi_{l+1} + r\frac{\partial}{\partial r}[(m+l-1)\xi_{l-1} -$$

$$\left. - (m+l+1)\xi_{l+1}] - \frac{4U'R_0}{U}(m+l)^2 \xi_l\right\} = 0. \qquad (2.20)$$

Здесь введено обозначение $A = -\frac{4\pi}{R_0 r^2 H^2} \cdot \frac{dp^0}{dr}$ и для полноты включен малый член $\sim \frac{1}{R_s}$. Нас интересуют локальные возмущения желобкового типа, развивающиеся вблизи особой точки $r = r_0$, где продольное волновое число $k_0 = \frac{m}{r} \cdot \frac{H_\vartheta^0}{H_z^0} - \frac{n}{R_0}$ обращается в нуль. В окрестности этой точки k_0 можно разложить по $x = r - r_0$: $k_0 = \frac{m}{r^2}\theta x$, где $\theta = r^2 q'/R_0 q^2$, $q' = dq/dr$. Кроме того, в (2.20) можно пренебречь вторым слагаемым по сравнению с последующими.

Ширина локализации коротковолновых возмущений $\Delta x \sim r/m$. Как увидим ниже, достаточно рассмотреть случай $rq'/q \ll 1$. При этом особая точка для возмущений $l = 1$, определяемая соотношением $k_1 = \frac{m+1}{r} \cdot \frac{H_\vartheta^0}{H_z^0} - \frac{n}{R_0} \approx \left(\frac{mq'}{q}x + 1\right)\frac{1}{r} \times$ $\times \frac{H_\vartheta^0}{H_z^0} = 0$, лежит далеко за пределами локализации возмущения и, следовательно, k_1 можно считать постоянным и равным $H_\vartheta^0/H_z^0 r$. При $\beta_\vartheta \equiv \frac{8\pi p}{H_\vartheta^2} \ll \frac{R_0}{r}$, что практически всегда выполнено, гармоники ξ_l быстро убывают с номером l. Поэтому в системе уравнений (2.20) достаточно ограничиться только двумя гармониками. Действуя оператором $\Delta_\perp$ на уравнение (2.11) для нулевой гармоники и исключая затем ψ_1, ψ_{-1} с помощью уравне-

ний (2.11) для первых гармоник, получаем следующее уравнение для ψ_0:

$$\Delta_\perp x \Delta_\perp x \psi_0 - (\gamma+\delta)\Delta_\perp \psi_0 = 0, \qquad (2.21)$$

где

$$\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R_0}\cdot\frac{8\pi p'}{H_\vartheta^{02}}\right)^2\left(\frac{q}{q'}\right)^2; \quad \gamma = -\frac{8\pi p'}{rH_z^{02}}\left(\frac{q}{q'}\right)^2 - \frac{4\pi p'}{H_\vartheta^{02}}\cdot\frac{U'}{U}\left(\frac{q}{q'}\right)^2,$$

а штрих означает дифференцирование по r. Для решения этого уравнения удобно перейти к фурье-преобразованию по x: $\psi_0(x) = \int \psi_0(k)\exp(ikx)\,dk$. В фурье-представлении уравнение (2.21) приводится к виду

$$\frac{d^2U}{d\varkappa^2} - \frac{1-(\gamma+\delta)(1+\varkappa^2)}{(1+\varkappa^2)^2}U = 0, \qquad (2.22)$$

где $\varkappa = \frac{rk}{m}$. Это уравнение практически совпадает с уравнением Сайдема [9], отличаясь от него лишь тем, что γ заменяется на $\gamma+\delta$. Оно имеет собственные решения только при $\gamma+\delta > \frac{1}{4}$. Таким образом, условие устойчивости по отношению к желобковым возмущениям имеет вид $\gamma+\delta < \frac{1}{4}$ или в развернутой форме

$$-\frac{8\pi p'}{rH_z^{02}} - \frac{4\pi p'U'}{H_\vartheta^{02}U} + \frac{1}{2}\left(\frac{8\pi p'}{H_\vartheta^{02}}\right)^2\frac{r^2}{R_0^2} < \frac{1}{4}\left(\frac{q'}{q}\right)^2. \qquad (2.23)$$

Как указывалось в работах [13, 14], тороидальные системы с сильным продольным магнитным полем обладают минимумом U в смысле возрастания U к периферии плазменного шнура. Величина U'/U вычислена в работе [14] и равна

$$-\frac{U'}{U} = \frac{4r}{R_0^2}\left(\Lambda + \frac{5}{4}\right) + \frac{r^2}{R_0^2}\Lambda', \qquad (2.24)$$

где Λ — коэффициент асимметрии азимутального магнитного поля [см. выражение (1.4)]. Величина U', вообще говоря, отрицательна.

Из соотношений (2.23) и (2.24) следует, что при $\beta_\vartheta = \frac{8\pi p}{H_\vartheta^{02}} < 1$ и не слишком крутом изменении p с r желобковая неустойчивость в системах типа «Токамак» стабилизирована.

2. Винтовая неустойчивость

Для возмущений с небольшими азимутальными числами m в уравнении (2.11) следует учесть второе слагаемое, которое соответствует винтовой неустойчивости. Предполагая, что

$\beta_\vartheta = \frac{8\pi p}{H_\vartheta^2} \ll 1$, и пренебрегая ввиду этого третьим слагаемым в уравнении (2.11), запишем его с учетом соотношений (2.18) и (2.19) в виде

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} r \frac{d\psi}{dr} - \frac{m^2}{r^2}\psi = V\psi, \qquad (2.25)$$

где

$$V = \frac{4\pi}{c}\frac{dj_0}{dr} \cdot \frac{1}{H_\vartheta^0\left(1 - \frac{n}{m}q\right)} + \frac{4\pi U' p'}{H_\vartheta^{02} U\left(1 - \frac{n}{m}q\right)^2}. \qquad (2.26)$$

Уравнение (2.25) аналогично уравнению Шредингера с потенциалом V.

При $p' = \frac{dp}{dr} < 0$ и $U' < 0$, что соответствует минимуму H, второе слагаемое в выражении (2.26) положительно и стремится к бесконечности как $(r - r_0)^{-2}$ при приближении r к особой точке r_0, где $1 - \frac{n}{m}q(r_0) = 0$. Такая сильная особенность полностью разделяет две области: $r - r_0 > 0$ и $r - r_0 < 0$ (см., например, обзор [9]).

Таким образом, решение, удовлетворяющее граничным условиям $\psi(r = 0) < \infty$, $\psi(r = b) = 0$ (где b — радиус кожуха), может появляться лишь за счет первого слагаемого в выражении (2.26), если оно будет отрицательно. Так как $\frac{4\pi}{c} j_0 = \frac{1}{r} \times \frac{\partial}{\partial r} r H_\vartheta^0$, то первое слагаемое порядка $1/r^2$ и при небольших m (скажем, $m = 1, 2$) неустойчивость определяется всей областью r. Однако если коэффициент запаса q значительно превышает единицу, то при $n/m \sim 1$ потенциал $V \sim 1/r^2 q^2$ мал и неустойчивость при малых m должна отсутствовать. В этом случае неустойчивость может развиваться при быстром изменении плотности тока j_0 с радиусом r, т. е. когда $\frac{dj_0}{dr}$ в некоторой области достаточно велико. При этом для неустойчивости предпочтительны такие значения m и n, при которых $1 - \frac{n}{m}q$ мало в области крутого изменения j_0, т. е. когда в эту область попадает особая точка $r = r_0$, соответствующая обращению $1 - \frac{n}{m}q$ в нуль. Вблизи особой точки можно положить $1 - \frac{n}{m}q = -\frac{q'}{q}x$, $x = r - r_0$, т. е.

$$V = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2},$$

где

$$A = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{dj_0}{dr} \cdot \frac{q}{q'} \cdot \frac{1}{H_\vartheta^0}; \quad B = \frac{4\pi U' p' q^2}{H_\vartheta^{02} U q'^2}. \tag{2.27}$$

Если $\beta_\vartheta \ll 1$, то B мало и второе слагаемое в V лишь приводит к обращению в нуль ψ при $x = 0$, но не влияет на величину потенциала в основной области. При большом m, соответствующем обращению в нуль разности $1 - \frac{n}{m} q$, неустойчивость локальна. При этом r можно заменить на r_0 и уравнение (2.25) принимает вид уравнения Шредингера с кулоновским потенциалом

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \left(\frac{m^2}{r_0^2} + \frac{A}{x}\right)\psi. \tag{2.28}$$

Из условия исчезновения первого уровня, соответствующего при $A < 0$ решению $\psi = x \exp\left(-\frac{m}{r_0} x\right)$, находим условие устойчивости

$$\frac{4\pi r_0}{cH_\vartheta^0} \left|\frac{dj_0}{dr}\right| < 2 \left|\frac{q'}{q}\right| m. \tag{2.29}$$

При больших m это условие легко может быть выполнено, если плотность тока меняется достаточно плавно.

Таким образом, при достаточно плавном профиле плотности тока $j_0(r)$ и достаточно большом коэффициенте запаса q винтовая неустойчивость также стабилизируется. Следовательно, гидромагнитные неустойчивости можно считать неопасными.

§ 3. ДРЕЙФОВЫЕ И ДИССИПАТИВНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

1. Выбор параметров, ширина локализации возмущений

Анализируемые ниже неустойчивости соответствуют сильно вытянутым вдоль силовых линий возмущениям и обладают областью локализации, гораздо меньшей радиуса плазменного шнура. Поэтому можно произвести упрощение, рассматривая вместо тороидального прямой шнур длиной $L = 2\pi R$ и радиуса a, окруженный идеально проводящим кожухом радиуса b. Тороидальность будем имитировать сшивкой на торцах. Введем цилиндрическую систему координат r, ϑ, z с осью z вдоль оси цилиндра. Предположим, что продольное магнитное поле H_z достаточно сильное и величина $q = rH_z/RH_\vartheta$, значение которой на краю разряда иногда называют коэффициентом запаса по отношению к винтовой неустойчивости, порядка нескольких единиц. А так как отношение a/R из геометрических и конструктивных соображений не превышает $^1/_2 - ^1/_3$, то отношение $H_\vartheta/H_z \sim$ $\sim 10^{-1} \ll 1$. Величина $\iota = \frac{2\pi}{q} = \frac{LH_\vartheta}{rH_z}$ представляет собой угол

вращательного преобразования, т. е. угол, на который поворачивается силовая линия по азимуту на длине L. Скорость изменения угла ι по радиусу характеризует собой перекрещенность силовых линий (*shear*). Нам удобнее пользоваться величиной $\theta = \frac{r^2}{R} \cdot \frac{d\iota}{dr}$, которую назовем просто шир, и с самого начала предположим, что

$$\theta > \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}. \tag{3.1}$$

Это условие, как будет показано дальше, сразу освобождает нас от необходимости учитывать бесстолкновительные дрейфовые неустойчивости с $k\rho_i \gtrsim 1$, где k — волновое число, $\rho_i = \sqrt{\frac{T}{m_i \Omega_i^2}}$, $\Omega_i = \frac{eH}{m_i c}$ (согласно оценкам [15], эти неустойчивости должны приводить к диффузии с коэффициентом $D \sim \sqrt{\frac{m_e}{m_i \beta}}\, \rho_i v_i$ при $\beta = \frac{8\pi p}{H^2} > \frac{m_e}{m_i}$, где $v_i = \sqrt{\frac{2T}{m_i}}$). В дальнейшем при оценках мы часто будем принимать $\theta \sim 10^{-1}$.

Из условия равновесия по большому радиусу в тороидальной установке следует, что $\frac{a}{R}\beta < \frac{H_\vartheta^2}{H^2} < \theta^2 \ll 1$, поэтому мы будем в дальнейшем считать

$$\beta < \theta^2 \frac{R}{a}. \tag{3.2}$$

Это условие позволяет пренебречь непотенциальностью в дрейфовых колебаниях.

Далее ограничимся случаем достаточно сильного магнитного поля, так что

$$\frac{\rho_i}{a} < \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}. \tag{3.3}$$

При изучении неустойчивостей плазмы естественно ориентироваться на те условия, которые имеют место либо в существующих тороидальных установках, либо в термоядерных установках будущего. В первом случае имеем: $T \sim 10 \div 100$ *эв*, $n \sim 10^{13}$ *см*$^{-3}$, $a \sim 10$ *см*, $H \sim 10^4$ *э*; во втором $T \sim 10$ *кэв*, $n \sim 10^{15}$ *см*$^{-3}$, $a \sim 10^2$ *см*, $H \sim 10^5$ *э*. И в том и другом случае длина пробега $\lambda_e \approx 3 \cdot 10^{-12} \frac{T^2}{n}$ по отношению к кулоновским столкновениям достаточно велика, поэтому ограничимся областью

$$\frac{\lambda_e}{a} > 1.$$

В дальнейшем будет удобно пользоваться еще одним безразмерным параметром столкновительности $S = \frac{\lambda_e \rho_i}{a^2}$. Этот пара-

метр показывает, во сколько раз частота дрейфового вращения ионов $v_i\rho_i/a^2$ больше частоты столкновений $\nu_i = v_i/\lambda_i \approx v_i/\lambda_e$. Предположим, что

$$S = \frac{\lambda_e \rho_i}{a^2} > \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}. \tag{3.4}$$

С другой стороны, примем

$$S < \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}, \tag{3.4а}$$

так как в противном случае в плазме развивается неустойчивость на запертых частицах (см. § 4).

Для современных значений параметров $S \sim 10^{-1} \div 10$; для термоядерных значений $S \sim 1$.

Введем в рассмотрение токовую скорость $u = j/en$. Чтобы в плазме не возбуждались пучковые неустойчивости, величина u должна быть меньше v_e:

$$\frac{u}{v_e} < 1. \tag{3.5}$$

Кроме того, для отсутствия возбуждения циклотронных колебаний необходимо условие $u < \frac{v_e}{3}\left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{3/2}$. Далее, чтобы не возбуждались альфвеновские волны [16], желательно иметь $u < c_A$, где $c_A = \frac{H}{\sqrt{4\pi n m_i}}$ — альфвеновская скорость. Условие $u < c_A$ можно приближенно записать в виде

$$\Pi_p \equiv \pi a^2 n \frac{e^2}{m_i c^2} > \frac{H_\vartheta^2}{H_z^2}. \tag{3.6}$$

Всюду ниже будем предполагать, что неравенства (3.1) — (3.6) выполнены. Отдельные случаи их нарушения обсудим только качественно.

Неустойчивости дрейфового типа развиваются на возмущениях, сильно вытянутых вдоль магнитного поля. Для цилиндрического столба плазмы выберем возмущения в виде $\exp\left(-i\omega t + \right.$ $\left. + im\vartheta - i\frac{2\pi n}{L}z\right)$. Производная вдоль силовых линий для таких возмущений равна $\mathbf{h}\nabla = \frac{H_\vartheta}{rH}(m - nq)$. В тех точках $r = r_0$, где $q(r_0) = m/n$, эта производная обращается в нуль, т. е. возмущение оказывается постоянным вдоль силовой линии. Именно около таких точек и развиваются возмущения с данными m, n. Полагая $\mathbf{H}\nabla = iHk_\parallel$, получаем для проекции волнового числа на магнитное поле $k_\parallel$ вблизи точки $r = r_0$: $k_\parallel = k_y \theta x/r$, где $k_y = m/r_0$, $x = r - r_0$. Если θ не очень мало, что мы предположим в дальнейшем, то достаточно ограничиться случаем малых x.

Наибольшую опасность представляют потенциальные колебания $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, при которых силовые линии магнитного поля остаются неподвижными. Если продольная фазовая скорость волн $\omega/k_\parallel$ значительно меньше тепловой скорости электронов $v_e = \sqrt{\frac{2T}{m_e}}$, то у электронов успевает установиться распределение Больцмана вдоль силовых линий, т. е. возмущение их плотности n_e' равно

$$n_e' = \frac{ne\varphi}{T_e}.$$

С другой стороны, если $\omega/k_\parallel \gg v_i = \sqrt{\frac{2T}{m_i}}$, то можно пренебречь продольным движением ионов, а их поперечная скорость при $\omega \ll \Omega_i = \frac{eH}{m_i c}$ равна дрейфовой $v_\perp = c[\mathbf{h}\nabla\varphi]/H$, где $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$. Если считать приближенно $H \approx \text{const}$, то из уравнения непрерывности для ионов получим

$$n_i' = -\frac{k_y c}{\omega H n} \cdot \frac{dn}{dr}\varphi.$$

Используя условие квазинейтральности $n_i' = n_e'$, находим из предыдущих соотношений

$$\omega = \omega^* = -\frac{k_y c T}{eHn} \cdot \frac{dn}{dr}.$$

Таким образом, в этом приближении возмущение плотности распространяется в азимутальном направлении в виде волны с частотой ω^*. По порядку величины $\omega^* \sim \frac{m}{a^2}\rho_i v_i$, где $\rho_i = v_i/\Omega_i$ — средний ларморовский радиус ионов. Такие волны называются дрейфовыми [17]. Продольная фазовая скорость дрейфовых волн $\omega/k_\parallel \sim v_i\rho_i/\theta x$; следовательно, $\omega/k_\parallel > v_i$ при

$$x < \frac{\rho_i}{\theta}. \qquad (3.7)$$

При $x > \rho_i/\theta$ ионы также успевают прийти в равновесие вдоль силовых линий, и возмущение плазмы возникает только при наличии искривления силовых линий. В этом случае неустойчивость, если она имеет место, является магнитогидродинамической непотенциальной, т. е. она сводится либо к винтовой, либо к желобковой или представляет собой их комбинацию (с учетом конечной проводимости). Таким образом, условие (3.7) ограничивает область собственно дрейфовых волн.

При учете отброшенных выше диссипативных эффектов дрейфовые волны нарастают во времени. В зависимости от того, какой именно диссипативный эффект играет основную

роль, можно говорить о том или ином виде дрейфовой неустойчивости.

Рассмотрим теперь, какова область локализации той или иной неустойчивости. На рис. 5 по оси абсцисс отложена величина $x\theta/\rho_i$, где x — ширина области локализации, а по оси ординат — обратное азимутальное число $m^{-1} = r/k_y$ соответствующего возмущения. Все дрейфовые неустойчивости лежат в области $x\theta/\rho_i < 1$ независимо от числа m; однако в случае бесстолкновительных неустойчивостей основной вклад в процессы переноса вносят возмущения с $k_y x \sim 1$, так что существенные

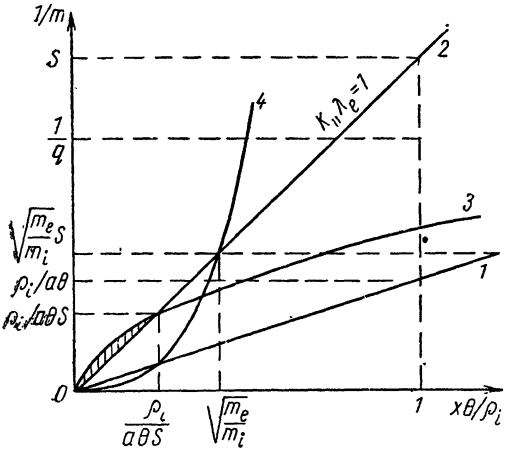


Рис. 5. Области локализации неустойчивостей.

бесстолкновительные возмущения группируются около прямой $1/m = a/x$ (см. рис. 5, кривая *1*). Если возможна локализация $x\theta/\rho_i \sim 1$, то соответствующее $\frac{1}{m} = \frac{\rho_i}{a\theta}$. Эту величину будем считать меньшей, чем максимально допустимое значение величины $1/m$ для локализованных решений, равное $1/q$. На оси ординат (см. рис. 5) отложено, кроме того, значение $\frac{1}{m} = S \times \times \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} = \frac{\lambda_e \rho_i}{a^2} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$. Начиная с этого m и выше, как будет показано в § 4, начинает развиваться бесстолкновительная неустойчивость на запертых частицах. Чтобы эта неустойчивость не приводила к утечке, значительно превышающей утечку за счет дрейфовых неустойчивостей, величина $\sqrt{\frac{m_e}{m_i}}\, S$ не должна превышать $\rho_i/a\theta$, т. е. $\lambda_e/a \lesssim \frac{1}{\theta} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}$, что накладывает ограничение на плотность плазмы снизу (при заданной температуре).

С другой стороны, при уменьшении λ_e в игру вступают столкновительные диссипативные неустойчивости. Эти неустойчивости характеризуются условием $k_\parallel \lambda_e < 1$, т. е. они лежат в области, выше кривой *2* (см. рис. 5), соответствующей $k_\parallel \lambda_e = 1$. Как увидим в § 7, ячейки столкновительных неустойчивостей могут перекрыть весь шнур и привести к макроскопическому эффекту типа диффузии или теплопроводности только при условии $xm^2 \sim a$, т. е. когда число ячеек $\sim m^2$, умноженное на их среднюю ширину x, сравнивается с a. Другими словами, вклад в перенос дают лишь возмущения с $\frac{1}{m} < \sqrt{\frac{a}{x}}$, т. е. ниже кривой *3* (см. рис. 5). Таким образом, существенные диссипативные неустойчивости имеют локализацию не больше $x \sim \rho_i^2 / a\theta^2 S$, что соответствует заштрихованной на рис. 5 области. В действительности локализация диссипативной неустойчивости может быть даже меньше, так что при $S \sim 1$ диссипативные неустойчивости в системах с не очень малым широм ($\theta \sim 10^{-1}$) оказываются несущественными. При $S \gtrsim \frac{1}{\theta}\sqrt{\frac{\rho_i}{a}}$ они заведомо попадают в область локализации $x \lesssim \rho_i$.

Кривая *4* (см. рис. 5) представляет собой зависимость $\frac{1}{m} = S\sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \cdot \frac{x^2\theta^2}{\rho_i^2}$, соответствующую равенству $\chi_\parallel k_\parallel^2 = \omega^*$, где $\chi_\parallel = \lambda_e v_e$ — продольная температуропроводность электронов. Ниже этой кривой температуру электронов можно считать постоянной вдоль силовых линий.

2. Уравнения, описывающие диссипативные гидромагнитные неустойчивости

Условия устойчивости идеальной плазмы являются необходимыми, но отнюдь не достаточными для устойчивости реальной плазмы. Если они выполнены, то в плазме не могут развиваться быстрые гидромагнитные колебания, однако при учете отброшенных ранее диссипативных членов (трения, вязкости) в плазме возможны гораздо более медленные диссипативные неустойчивости. Для их описания удобно использовать уравнения двухжидкостной гидродинамики (1.25) — (1.29) [18].

Совместно с уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j};\ \operatorname{div}\mathbf{H} = 0;\ \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A};\ \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (3.8)$$

эти уравнения образуют полную систему. Чтобы не усложнять чрезмерно последующие выкладки, вместо уравнений (1.25) — (1.29) используем несколько более простые уравнения, а затем укажем, при каких условиях эти упрощенные уравнения справедливы и к каким изменениям приводят отброшенные члены.

Сложим уравнения движения (1.26) и (1.27) и пренебрежем инерцией электронов по сравнению с инерцией ионов, а также тензором вязкости π. Тогда получим уравнение движения для плазмы как целого

$$m_i n \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c}[\mathbf{jH}]. \tag{3.9}$$

В уравнении для электронов (1.27) опустим инерцию и выразим $\mathbf{v}_e$ через $\mathbf{v} = \mathbf{v}_i$ и $\mathbf{j}$, тогда полученное уравнение будет представлять собой закон Ома для плазмы:

$$\frac{1}{\sigma}\mathbf{j} = \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vH}] - \frac{1}{enc}[\mathbf{jH}] + \frac{\nabla p_e}{en}. \tag{3.10}$$

Если пренебречь здесь холловским током $\frac{\sigma}{ecn}[\mathbf{jH}]$ и градиентом электронного давления, то соотношение (3.10) превратится в обычный закон Ома для проводящей жидкости:

$$\frac{\mathbf{j}}{\sigma} = \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vH}]. \tag{3.11}$$

Вместо двух уравнений непрерывности для ионов и электронов воспользуемся уравнением непрерывности для ионов

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n\mathbf{v} = 0 \tag{3.12}$$

и их разностью, что при учете квазинейтральности $n_i = n_e = n$ дает

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \tag{3.13}$$

В качестве уравнений энергии используем следующие уравнения:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} + \frac{c}{H^2}[\mathbf{H}\nabla\varphi]\nabla T_i = 0;$$

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} + \frac{c}{H^2}[\mathbf{H}\nabla\varphi]\nabla T_e = \chi_{\parallel}^e \Delta_{\parallel} T_e + \chi_{\perp}^e \Delta_{\perp} T_e. \tag{3.14}$$

Система уравнений (3.9), (3.11) — (3.14) эквивалентна системе, рассматриваемой в работе [19].

Как и в § 2, представим полный ток $\mathbf{j}$ в виде

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\perp} + \alpha\mathbf{H},$$

где

$$\alpha = \mathbf{jH}/H^2. \tag{3.15}$$

Из уравнения (3.9) находим

$$\mathbf{j}_{\perp} = \frac{c}{H^2}\left[\mathbf{H}, \nabla p + m_i n \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right]. \tag{3.16}$$

Выражение для α получаем, используя продольную компоненту закона Ома (3.11):

$$\alpha = \sigma(\mathbf{HE})/H^2. \tag{3.16а}$$

В поперечных компонентах [см. формулу (3.11)] трением можно пренебречь, в результате получим выражение для $\mathbf{v}_\perp$

$$\mathbf{v}_\perp = -\frac{c}{H^2}[\mathbf{HE}]. \tag{3.17}$$

Подставляя это выражение в (3.16) и вычисляя $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$ с использованием связи (3.15), получаем соотношение

$$\mathbf{H}\nabla\alpha + 2\frac{[\mathbf{H}\nabla H]}{H^3}\nabla p + m_i\frac{c^2}{H^2}\operatorname{div} n\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \tag{3.18}$$

которое отличается от уравнения (2.5) учетом инерции ионов [последний член в уравнении (3.18)].

Проектируя на $\mathbf{H}$ первое уравнение (3.8), получаем

$$\alpha = \frac{c}{4\pi}\frac{\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{H}}{H^2}. \tag{3.19}$$

Система уравнений (3.18), (3.19) совместно с (3.12), (3.13) и $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$ более удобна для дальнейших выкладок, чем исходные уравнения (3.7), (3.9) — (3.13).

Рассмотрим устойчивость разреженной плазмы, ($\beta \ll 1$), образующей шнур длиной L, который находится в винтовом магнитном поле $\mathbf{H}_0 = \{0, H_\vartheta^0, H_z^0\}$. Возмущение выбираем в виде $\exp\left\{-i\omega t + im\vartheta - 2\pi\frac{inz}{L}\right\}$. В дальнейшем используем более удобные величины $k_\parallel = \left(\frac{m}{r}H_\vartheta^0 - \frac{n}{L}H_z^0\right)H_0^{-1}$ и $k_y = \frac{H_\vartheta^0}{H_0}\frac{n}{L} + \frac{H_z^0}{H_0}\frac{m}{r} \approx \frac{m}{r}$. При этом возмущением продольной компоненты магнитного поля $H'_\parallel$ можно пренебречь (она порядка β по сравнению с другими компонентами), считая, что магнитные силовые линии только искривляются, не сгущаясь и не разрежаясь. Это искривление можно описать одной компонентой векторного потенциала $A_\parallel$. Действительно, пренебрегая $k_\parallel H$, из

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$$

получаем

$$\mathbf{H}' = -\frac{[\mathbf{H}_0\nabla A'_\parallel]}{H_0}; \quad \mathbf{E}' = -\nabla\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial A'_\parallel}{\partial t}\mathbf{h}_0. \tag{3.20}$$

Таким образом, как это следует из (3.20), поперечные компоненты вектора электрического поля $\mathbf{E}'$ потенциальны. Это и позволило записать уравнения энергии в виде (3.4) и (3.5).

Линеаризуем уравнения (3.18) и воспользуемся соотношениями (3.20), тогда

$$\mathbf{H}_0\nabla\alpha' + ik_y A'_\parallel\frac{d\alpha_0}{dr} - 2ik_y p'\frac{1}{H_0 R} + i\omega\frac{m_i c^2}{H_0^2}\operatorname{div} n\nabla\varphi = 0. \tag{3.21}$$

Возмущенное давление p' можно найти из уравнений для температур и уравнения непрерывности. В выражении для p' можно пренебречь продольной электронной теплопроводностью и приближенно написать

$$p' = \frac{\omega^*_{pi}}{\omega} en_0\varphi, \tag{3.22}$$

где

$$\omega^*_{pi} = \frac{c}{H_0} \cdot \frac{k_y}{en_0} \cdot \frac{dp_0}{dr}.$$

Перейдем теперь к уравнению (3.19). Так как

$$(\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H})' \approx H_z^0\,\mathrm{rot}_z\,\mathbf{H}' = -H_z^0 \Delta A'_\parallel,$$

то уравнение (3.19) может быть записано в виде

$$-\Delta A'_\parallel = \frac{4\pi H_0}{c}\alpha'. \tag{3.23}$$

И наконец, линеаризуем выражение для продольного тока (3.16)

$$\alpha' = \frac{\sigma'}{\sigma_0} \cdot \frac{(\mathbf{H}_0\mathbf{j}_0)}{H_0^2} + \sigma_0\left(-\mathbf{H}_0\nabla\varphi + \frac{i\omega}{c} A'_\parallel H_0\right)\frac{1}{H_0^2}.$$

Проводимость зависит в основном от температуры электронов, поэтому

$$\sigma' = \frac{d\sigma_0}{dT_0} T'_e = \frac{3}{2}\sigma_0 \frac{T'_e}{T_e}; \tag{3.24}$$

с другой стороны, из уравнения (3.14) для возмущения температуры электронов T'_e находим

$$\frac{T'_e}{T_0} = \frac{\omega^*_{Te}}{\omega + i\chi_\parallel k_\parallel^2 + i\chi_\perp k_\perp^2} \frac{e\varphi}{T_{0e}}, \tag{3.25}$$

где $\omega^*_{Te} = -\frac{ck_y}{eH}\frac{dT_{0e}}{dr}$. Таким образом, если теплопроводностью электронов можно пренебречь $(\omega \gg \chi^e_\parallel k^2_\parallel,\ \chi^e_\perp k^2_\perp)$, то

$$\alpha' = \frac{3}{2} \cdot \frac{\omega^*_{Te}}{\omega} \cdot \frac{\mathbf{H}_0\mathbf{j}_0}{H_0^2} \cdot \frac{e\varphi}{T_{0e}} + \frac{\sigma_0}{H_0}\left(-ik_\parallel\varphi + \frac{i\omega}{c}A'_\parallel\right). \tag{3.26}$$

Выражая $\mathbf{j}_0$ через направленную скорость электронов $u = -\mathbf{j}_0/en$, запишем α' в виде

$$\alpha' = -i\frac{e^2 n_0 k_\parallel}{m_e \nu_e H_0}\left[\left(1 - i\frac{3}{2} \cdot \frac{\omega^*_{Te}}{\omega} \cdot \frac{u}{v_e} \cdot \frac{\nu_e}{k_\parallel v_e}\right)\varphi - \frac{\omega}{k_\parallel c} A'_\parallel\right]. \tag{3.27}$$

Уравнения (3.21), (3.23) и (3.27) совместно с (3.22) представляют собой искомую систему уравнений, описывающих мед-

ленные гидромагнитные диссипативные неустойчивости. Подставляя выражение (3.27) для α' в соотношения (3.21), (3.23), получаем следующие два связанных между собой уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&\rho^2 \operatorname{div}(n_0\nabla\varphi) - 2\frac{a_p n_0}{R}\left(\frac{\omega_p^*}{\omega}\right)^2\varphi + \frac{k_y T_0}{\omega e^2 H_0}\cdot\frac{dj_\parallel}{dr}A_\parallel' + \\
&+\frac{n_0 k_\parallel^2 v_e^2}{i\nu_e\omega}\left\{\left(1 - i\frac{3}{2}\frac{\omega_{Te}^*}{\omega}\cdot\frac{u}{v_e}\cdot\frac{\nu_e}{k_\parallel v_e}\right)\varphi - \frac{\omega}{k_\parallel c}A_\parallel'\right\} = 0; \\
&\Delta_\perp A_\parallel' = -\frac{4\pi e^2 n_0}{m_e}\cdot\frac{k_\parallel}{i\nu_e c}\left[\left(1 - i\frac{3}{2}\cdot\frac{\omega_{Te}^*}{\omega}\cdot\frac{u}{v_e}\times\right.\right. \\
&\left.\left.\times\frac{\nu_e}{k_\parallel v_e}\right)\varphi - \frac{\omega}{k_\parallel c}A_\parallel'\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (3.28)$$

Здесь ρ — средний ларморовский радиус: $\rho^2 = T_e/m_i\Omega_i^2$; $\Omega_i = eH/m_i c$; $a_p^{-1} = -\frac{1}{p_0}\cdot\frac{dp_0}{dr}\cdot\frac{T_i + T_e}{T_e}$.

Как нетрудно убедиться, эти уравнения в случае плоского слоя плазмы полностью эквивалентны уравнениям работы [19]. Действительно, для сильного продольного поля $H_z^0 \gg H_\vartheta^0$ величина $F' = \frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{k_y H_y^0 + k_z H_z^0}{kH_0}\right)$ из работы [19] может быть записана как $F' \approx \frac{k_y}{kH_0}\cdot\frac{dH_y}{dx}$. Учитывая это обстоятельство, а также то, что переход к плоской геометрии производится следующим образом:

$$r \to \infty,\ \frac{d}{dr} \to \frac{d}{dx},\ \frac{m}{r} \to k_y = \text{const},\ k_z = n/R,$$

перепишем систему (3.28) в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\psi''}{\alpha^2} = \psi(1 + \widetilde{p}/\eta\alpha^2) + \frac{W}{\alpha^2}\left(F/\widetilde{\eta} + \frac{\widetilde{\eta}'F'}{\widetilde{\eta}\,\widetilde{p}}\right); \\
&\frac{(\widetilde{n}W')'}{\alpha^2} = W\left[\widetilde{n} - \frac{S_0^2 G}{\widetilde{p}^2} + \frac{FS_0^2}{\widetilde{p}}\left(\frac{F}{\widetilde{\eta}} + \frac{\widetilde{\eta}'F'}{\widetilde{\eta}\,\widetilde{p}}\right)\right] + \\
&\qquad + \psi S_0^2\left(\frac{F}{\widetilde{\eta}} - \frac{F''}{\widetilde{p}}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (3.29)$$

Здесь введены обозначения работы [19]: $\psi = A_\parallel'$; $W = ic\tau_R k_y\varphi$; $\alpha = k_y a$; $\tau_H = a/c_A$; $c_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi n_0 m_i}}$; $\tau_R = \frac{4\pi a^2}{c^2\langle\eta\rangle}$; $\eta = \frac{m_e\nu_e}{e^2 n_0}$; $\widetilde{\eta} = \eta/\langle\eta\rangle$; $F = k_\parallel/k_y$; $\widetilde{n} = n/\langle n\rangle$; $S_0 = \tau_R/\tau_H$; $\widetilde{p} = \gamma\tau_R = -i\omega\tau_R$.

Штрих означает дифференцирование по безразмерной переменной $\widetilde{\mu} = x/a$, где a — толщина слоя. G — безразмерная величина, учитывающая кривизну силовых линий. Так как в плоском слое плазмы силовые линии обычно прямые, то для соответствия с цилиндрическим случаем эффект кривизны моделируется силой тяжести $m_i g$, тогда $G = \tau_H^2 g \frac{1}{n_0} \cdot \frac{dn_0}{dx}$.

Если в системе (3.28) не переходить к плоскому слою, то в переменных, в которых записана система (3.29), уравнения (3.28) можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu m^2}(\mu\psi')' = \psi\left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{\bar{p}}{\widetilde{\eta} m^2}\right) + \frac{W}{m^2}\left(\frac{F}{\widetilde{\eta}} + \frac{\widetilde{\eta}' F_1}{\widetilde{\eta}\widetilde{p}}\right);\\
&\frac{1}{\mu m^2}(\mu\widetilde{n}W')' = W\left[\frac{\widetilde{n}}{\mu^2} - \frac{S_0^2 G}{\widetilde{p}^2} + \frac{F S_0^2}{\widetilde{p}}\left(\frac{F}{\widetilde{\eta}} + \frac{\widetilde{\eta}' F_1}{\widetilde{\eta}\widetilde{p}}\right)\right] +\\
&\qquad + \psi S^2\left[\frac{F}{\widetilde{\eta}} - \frac{1}{\widetilde{\mu p}}(\mu F_1)'\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (3.30)$$

Здесь $\mu = r/r_0$, r_0 — точка, где $F(r_0) = 0$; $F = \dfrac{H_\vartheta \dfrac{m}{r} - \dfrac{n}{R} H_z}{H_0 m/r_0}$;

$G = \dfrac{r_0^2 \beta}{R a_p}$; $F_1 = \dfrac{c}{4\pi}\left(\dfrac{m}{r} j_z + \dfrac{n}{R} j_\vartheta\right) \dfrac{r_0}{\dfrac{m}{r_0} H_0} = \dfrac{r_0^2}{m H_0}\left(\dfrac{m}{r^2} \cdot \dfrac{d}{dr}(r H_\vartheta) - \right.$

$\left. - \dfrac{n}{R_0} \cdot \dfrac{dH_z}{dr}\right)$; остальные величины определены, как в соотношении (3.29), только $a \to r_0$. В плоском случае $F_1 = F'$, а условие, заменяющее условие (15) работы [19] и выражающее собой стационарность невозмущенного состояния, принимает вид

$$\frac{\widetilde{\eta}' F_1}{\widetilde{\eta}} = -\frac{1}{\mu}(\mu F_1)'.$$

Так как диссипативные неустойчивости обладают обычно очень узкой областью локализации, на которой изменением таких величин, как n_0, r и т. п., можно пренебречь, то уравнения (3.29) и (3.30) практически не отличаются друг от друга. (Небольшая разница возникает лишь из-за того, что $F_1 \neq F'$.) Наиболее существенное отличие от плоского случая возникает из-за G. Мы рассматривали реальную кривизну, и поэтому G содержит градиент давления (как и должно быть), а не плотности, как происходит при моделировании кривизны введением в уравнения эффективной силы тяжести.

В уравнения (3.30) входит большой параметр $S_0 = \tau_R/\tau_H$, равный отношению скинового времени к характерному гидродинамическому времени. Переход к идеальной гидродинамике происходит при $S_0 = \infty$, при этом частоты оказываются порядка τ_H^{-1} (т. е. $\tilde{p} \sim S_0$). Однако если $S_0 \neq 0$, но $S_0 \gg 1$, то наряду с гидродинамическими колебаниями могут развиваться более медленные диссипативные. Для них $\tilde{p} \sim S_0^{\gamma}$, где $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$. Случай $\gamma = 0$ соответствует инкременту того же порядка, что и время диффузии в результате столкновений, и поэтому не представляет интереса; $\gamma = 1$ отвечает обычной идеальной гидродинамике. Поэтому в дальнейшем основное внимание будет уделено случаю $0 < \gamma < 1$.

Для плазмы с хорошей проводимостью ($S_0 \gg 1$) диссипация сказывается только в узкой области около точки, где $F(r_0) = 0$. Действительно, при $S_0 \to 0$ из второго уравнения (3.30) получаем

$$\tilde{p}\psi = -FW \left(\text{т. е. } \varphi - \frac{\omega}{k_{\parallel} c} A'_{\parallel} = 0 \right) \tag{3.31}$$

везде, за исключением точки $F = 0$. Но условие (3.31) — это просто условие вмороженности магнитного поля в плазму, которое, согласно соотношению $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}[\mathbf{vH}]$, может быть записано как $E_{\parallel} = (\mathbf{HE})/H = 0$. Учитывая в соотношении (3.31) следующий член порядка $S_0/\tilde{p}$ и подставляя это выражение в первое уравнение (3.30), получаем уравнения (описывающие колебания идеально проводящей плазмы для $\tilde{p} = 0$, так как $\tilde{p}/S_0 \to 0$), справедливые везде, за исключением малой области около точки $r = r_0$ (ср. с уравнением (2.25)):

$$\frac{1}{\mu}(\mu\psi')' = \left(m^2 - \frac{G}{F^2} + \frac{1}{\mu F}(\mu F_1)' \right) \psi. \tag{3.32}$$

Поэтому, если необходимо определить точные собственные функции и собственные значения задачи, общая процедура решения системы (3.30) (для случая $S_0 \gg 1$, $0 < \gamma < 1$) сводится к нахождению таких решений ψ и W, при которых W убывает от точки $r = r_0$, а ψ при $\mu \to \infty$ переходит в решение (3.32) с соответствующими граничными условиями.

Уравнения (3.28), (3.30) были получены при определенных предположениях. Рассмотрим, когда эти приближения действительно имеют место. Если вместо упрощенных уравнений (3.9), (3.13) использовать точные (1.25), (1.29), то, например, получим следующие выражения для α' (для простоты ограничиваемся здесь лишь потенциальным случаем $A'_{\parallel} = 0$):

$$\alpha' = -\mathrm{i}\frac{e^2 n_0 k_{\parallel}}{m_e \nu_e H_0} \times$$

$$\times \frac{1-\dfrac{\omega^*_{ne}}{\omega}-\dfrac{\omega^*_{Te}}{\omega}\cdot\dfrac{1+i\dfrac{3}{2}\dfrac{u}{v_e}\cdot\dfrac{\nu_e}{k_\parallel v_e}}{1-k_\parallel u/\omega+2ik_\parallel^2 v_e^2/\omega\nu_e+i\chi_\perp k_\perp^2}\left(1-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{k_\parallel u}{\omega}\cdot\dfrac{d\ln n_0}{d\ln T_0}\right)}{1+i\dfrac{k_\parallel^2 v_e^2}{\omega\nu_e}+\dfrac{i\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{k_\parallel^2 v_e^2}{\omega\nu_e}\left(1+i\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{u}{v_e}\cdot\dfrac{\nu_e}{k_\parallel v_e}\right)}{1-\dfrac{k_\parallel u}{\omega}+2ik_\parallel^2 v_e^2/\omega\nu_e+i\chi_\perp k_\perp^2}\left(1-\dfrac{k_\parallel u}{\omega}\right)}\varphi,$$

(3.33)

где

$$\omega^*_{ne}=-\frac{ck_yT_0}{Hen_0}\cdot\frac{dn_0}{dr};\ \omega^*_{Te}=-\frac{ck_y}{He}\cdot\frac{dT_0}{dr}.$$

Сравнивая это выражение с (3.27), можно сделать следующие заключения. Током Холла $\frac{\sigma}{c}[\mathbf{jH}]$ можно пренебречь, если

$$\omega\gg\omega^*_{pe},\tag{3.34}$$

где $\omega^*_{pe}=-\frac{ck_y}{Hen_0}\cdot\frac{dp_{0e}}{dr}$ — дрейфовая частота электронов.

Член с градиентом электронного давления в законе Ома оказывается малым, если наряду с условием (3.34) трение достаточно велико, а именно

$$k_\parallel^2 v_e^2/\omega\nu_e\ll 1;\tag{3.35}$$

при этом можно также опустить член $T_0\frac{\partial}{\partial z}v_z^e$ в уравнении для температуры. Если, кроме того, $\omega\gg k_zu$, то можно опустить и член $u\frac{\partial}{\partial z}T_e'$.

В дальнейшем будем обычно предполагать выполненным условие (3.35). Однако, чтобы иметь возможность рассматривать частоты порядка дрейфовых, уравнения (3.28), (3.30) необходимо обобщить. Сохраняя в уравнении движения тензор вязкости ионов и используя закон Ома в виде (3.8), получаем следующую систему уравнений, учитывающую эффект конечного ларморовского радиуса (ω^*) и вязкость ионов:

$$\rho^2\left(1-\frac{\omega^*_i}{\omega}\right)\left(1-i\frac{\nu_{ii}}{\omega}\rho_i^2\Delta_\perp\right)\Delta_\perp\varphi-2\frac{a_p}{R}\left(\frac{\omega^*_p}{\omega}\right)^2\varphi+$$

$$+\frac{k_y}{\omega}\cdot\frac{T_{0e}}{e^2n_0H_0}\cdot\frac{dj_\parallel}{dr}A'_\parallel+\frac{k_\parallel^2v_e^2}{i\omega\nu_e}\left[\left(1-\frac{\omega^*_{pe}}{\omega}-\frac{\omega^*_{Te}}{\omega}i\frac{3}{2}\cdot\frac{u}{v_e}\cdot\frac{\nu_e}{k_\parallel v_e}\right)\varphi-\right.$$

$$\left.-\frac{\omega}{k_\parallel c}\left(1-\frac{\omega^*_{pe}}{\omega}\right)A'_\parallel\right]=0;\tag{3.36}$$

$$\Delta_\perp A'_\parallel = -\frac{4\pi e^2 n_0}{m_e}\cdot\frac{k_\parallel}{i\nu_e c}\left[\left(1-\frac{\omega^*_{pe}}{\omega}-\frac{\omega^*_{Te}}{\omega}\,i\frac{3}{2}\cdot\frac{u}{v_e}\,\frac{\nu_e}{k_\parallel v_e}\right)\varphi - \right.$$

$$\left. -\frac{\omega}{k_\parallel c}\left(1-\frac{\omega^*_{pe}}{\omega}\right)A'_\parallel\right].$$

Здесь $\rho^2 = T_e/m_i\Omega_i^2$ — ларморовский радиус ионов; $\omega_i^* = \frac{ck_y}{H_0 e n_0}\times$

$\times\frac{dp_i^0}{dr}$; $\omega^*_{pe} = -\frac{ck_y}{eH_0 n_0}\cdot\frac{dp_{0e}}{dr}$, $a_p^{-1} = -\frac{1}{p_0}\cdot\frac{dp_0}{dr}\cdot\frac{T_i+T_e}{T_e}$.

Или в обозначениях Фюрта и др. [19]

$$\left(\frac{\widetilde{p}+i\widetilde{\omega}_i^*}{\widetilde{p}}\right)\left(1-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{m_i}{m_e}}\cdot\frac{\beta_i}{\widetilde{p}}\widetilde{\Delta}_\perp\right)\left[\frac{1}{\mu m^2}(\mu\widetilde{n}W')' - \frac{\widetilde{n}}{\mu^2}W\right] =$$

$$= W\left[-\frac{S_0^2 G}{\widetilde{p}}+\frac{FS_0^2}{\widetilde{p}}\left(\frac{F}{\widetilde{\eta}}\cdot\frac{\widetilde{p}+i\widetilde{\omega}_e^*}{\widetilde{p}}+\frac{\widetilde{\eta}'F_1}{\widetilde{\eta}\widetilde{p}}\right)\right]+$$

$$+\psi S_0^2\left[\frac{F}{\widetilde{\eta}}\cdot\frac{\widetilde{p}+i\widetilde{\omega}_e^*}{\widetilde{p}}-\frac{1}{\widetilde{\mu p}}(\mu F_1)'\right];$$

$$\frac{1}{m^2}\cdot\frac{1}{\mu}(\mu\psi')' = \psi\left(\frac{1}{\mu^2}+\frac{\widetilde{p}+i\widetilde{\omega}_e^*}{\widetilde{m^2\eta}}\right)+\frac{W}{m^2}\left(\frac{F}{\widetilde{\eta}}\cdot\frac{\widetilde{p}+i\widetilde{\omega}_e^*}{\widetilde{p}}+\frac{\widetilde{\eta}'F_1}{\widetilde{\eta}\widetilde{p}}\right), \tag{3.37}$$

где $\widetilde{\omega}^* = \omega^*\tau_R$; $\beta_i = 8\pi p_i/H^2$; $\widetilde{\Delta}_\perp = r_0^2\Delta_\perp$ — безразмерный поперечный лапласиан.

Перейдем теперь к исследованию системы уравнений (3.28). В этих уравнениях содержится ряд членов, которые могут приводить к неустойчивости. Это продольный ток электронов (члены с u); кривизна силовых линий, действующая как эффективная сила тяжести (член с a/R); градиент силы тока $\frac{dj_0}{dr}$ и, наконец, градиент давления. В зависимости от того, какой именно эффект играет основную роль, можно говорить о том или ином виде неустойчивости. Ниже будем рассматривать мелкомасштабные колебания, когда можно воспользоваться квазиклассическим приближением, считая, что $A'_\parallel, \varphi$, характеризующие отклонение от положения равенства, изменяются как $\exp\left\{-i\omega t + i\int k_r dr + im\vartheta - i\frac{nz}{R}\right\}$. Естественно думать, что для таких локализованных возмущений в первую очередь развиваются потенциальные колебания, не искажающие силовых

линий. Поэтому сначала положим $A'_{\parallel} = 0$, а эффекты непотенциальности рассмотрим позднее.

Итак, полагая $A'_{\parallel} = 0$, из первого уравнения (3.28) получаем следующее дисперсионное квазиклассическое уравнение:

$$1 - i\frac{\omega^*_T}{\omega} \cdot \frac{3}{2}\frac{u}{v_e} \cdot \frac{1}{k_{\parallel}\lambda_e} - i\frac{\omega^2 + \omega_g^2}{\omega\omega_s} = 0 \qquad (3.38)$$

или из уравнения (3.36) с учетом эффектов конечного ларморовского радиуса

$$1 - \frac{\omega^*_{pe}}{\omega} - \frac{\omega^*_T}{\omega + i\chi^2_{\parallel}k^2_{\parallel}}\left(1 + i\frac{3}{2}\frac{u}{v_e}\frac{1}{k_{\parallel}\lambda_e}\right) + i\left[\frac{\omega^2}{\omega_s}\left(1 - \frac{\omega^*_{pi}}{\omega}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\omega_g^2}{\omega_s}\right]\left(1 + i\frac{k^2_{\parallel}v_e^2}{\omega\nu_e}\right) = 0. \qquad (3.38а)$$

Здесь для сокращения записи введены обозначения:

$$\omega_g^2 = \frac{2a}{R}(\omega^*_p)^2/k^2_{\perp}\rho^2; \quad \omega_s = \frac{k^2_{\parallel}}{k^2_{\perp}}\frac{\Omega_e\Omega_i}{\nu_e}.$$

Мы будем классифицировать неустойчивости по области локализации, переходя от неустойчивостей с большей областью локализации к более мелкомасштабным неустойчивостям.

Прежде чем начать исследования конкретных неустойчивостей, сделаем некоторые разъяснения относительно структуры рассматриваемых уравнений и о методе квазиклассического исследования.

В дисперсионное уравнение (3.38а) входит характерная для устойчивости неоднородной плазмы дрейфовая частота ω^*. Когда диссипативные эффекты достаточно велики, характерные частоты неустойчивостей, следующие из (3.38а), оказываются больше ω^*. Поэтому везде, где входит $1 - \frac{\omega^*}{\omega}$, вторым членом по сравнению с единицей можно пренебречь. В этом приближении все неустойчивости являются апериодическими. При этом, как отмечено во введении, не имеет смысла искать асимптотические ($t \to \infty$) собственные функции линейной задачи, а вполне достаточен квазиклассический (локальный) подход, поскольку в случае больших инкрементов $\gamma > \omega$ локализация (пространственная структура возмущений) определяется нелинейностью.

При повышении температуры диссипация уменьшается, и характерная частота ω начинает приближаться к дрейфовой частоте. При этом инкремент неустойчивости начинает падать. При дальнейшем повышении температуры частота становится порядка дрейфовой, а инкремент становится меньше частоты $\gamma < \omega^*$. Теперь нелинейные эффекты не в состоянии локализо-

вать возмущение, и приобретает смысл исследование дифференциальных уравнений линейной задачи устойчивости с целью нахождения собственных функций и собственных значений, а также критерия устойчивости. Впрочем, и здесь с точностью до множителя порядка единицы ответ может быть получен из квазиклассического рассмотрения. Обычно при этом (см. ниже) локализация определяется инерцией ионов. Поэтому неустойчивости, отвечающие большим инкрементам, можно назвать безынерционными, в то время как неустойчивости с малыми инкрементами — инерционными.

3. Токово-конвективная неустойчивость

Из уравнения (3.38) при $k_\parallel \to \infty$ находим следующее выражение для частоты:

$$\omega = i\omega_T^* \frac{3}{2} \cdot \frac{u}{v_e} \cdot \frac{1}{k_\parallel \lambda_e}. \tag{3.39}$$

Это так называемая токово-конвективная неустойчивость, развивающаяся при наличии продольного тока [20]. Если двигаться в сторону меньших $k_\parallel \sim x$, то при малых x токово-конвективная неустойчивость сменяется гравитационной неустойчивостью

$$\omega = i\omega_g^2/\omega_s, \tag{3.40}$$

обусловленной кривизной силовых линий.

Разберем более подробно первую из этих неустойчивостей.

Как следует из выражения (3.39), токово-конвективную неустойчивость можно получить из условия $j'_\parallel = 0$, т. е. для нее совершенно не важна инерция ионов. С учетом конечного ларморовского радиуса, а также эффектов теплопроводности, которыми мы до сих пор для простоты пренебрегали, дисперсионное уравнение для этой неустойчивости имеет вид

$$1 - \frac{\omega_{ne}^*}{\omega}\left(1 + i\mu \frac{u}{v_e} \cdot \frac{1}{k_\parallel \lambda_e}\right) - \frac{\omega_{Te}^*}{\omega + i\chi_\parallel k_\parallel^2 + i\chi_\perp k_\perp^2} \times$$

$$\times \left(1 + i\alpha \frac{u}{v_e} \frac{1}{k_\parallel \lambda_e}\right) = 0, \tag{3.41}$$

где $\alpha = \dfrac{d\ln\sigma}{d\ln T}$; $\mu = \dfrac{d\ln\sigma}{d\ln n}$; $\chi_\parallel$ — продольная (электронная), $\chi_\perp$ — поперечная температуропроводность.

В полностью ионизованной плазме $\alpha = {}^3/_2$, а μ представляет собой малую величину ($\sim {}^1/_{20}$), она возникает вследствие зависимости кулоновского логарифма от плотности. Поэтому в первую очередь будет развиваться неустойчивость на возмущениях температуры:

$$\omega_i = \omega_{pe}^* + i\omega_{Te}^* \frac{\alpha u}{v_e k_\parallel \lambda_e} + i\omega_{ne}^* \frac{\mu u}{v_e k_\parallel \lambda_e} - i\chi_\parallel k_\parallel^2. \tag{3.42}$$

В этом выражении $k_\parallel \lambda_e < 1$, так как в противном случае нельзя пользоваться гидродинамическим приближением.

Продольная теплопроводность позволяет развиваться возмущениям температуры для каждой пары чисел m, n только в узкой области порядка

$$x \leqslant x_0 = r_0 \xi^{1/3} m^{-2/3}, \tag{3.43}$$

где $\xi = c^2/\omega_0^2 \lambda_e^2 \theta^2$, $\omega_0^2 = 4\pi e^2 n_0/m_e$. При не слишком малой плотности n_0 величина $\xi \ll 1$, так что $x_0 \ll r_0$. При больших x возмущения температуры стабилизируются. При этом следует учитывать более слабую неустойчивость на возмущениях плотности. В силу того что ее область локализации $x \sim \rho_i/\theta$ может превышать значение (3.43), она может оказаться даже более существенной, чем температурная неустойчивость. При увеличении $k_\parallel \lambda_e$ начинает играть роль продольная вязкость электронов, которую можно учесть в выражении (3.42), добавляя к μ величину $(k_\parallel \lambda_e)^2 > 1$. При $k_\parallel \lambda_e \sim 1$ происходит переход к бесстолкновительной диссипации на затухании Ландау. Если сравнить величину (3.42) с соответствующим выражением (3.103) для бесстолкновительной плазмы, то можно установить, что при $k_\parallel \lambda_e \sim 1$ происходит непрерывный переход от столкновительной диссипации к бесстолкновительной.

Для того чтобы получить выражение для характерного инкремента $\gamma = \omega_T^* \frac{\alpha u}{v_e k_\parallel \lambda_e}$ через параметры системы, воспользуемся результатом нелинейного рассмотрения, из которого следует, что характерное m по порядку величины равно: $m \sim \sqrt{a/x_0}$. Подставив в выражение для ω $x \sim x_0$ и $m \sim \sqrt{a/x_0}$, получим для γ

$$\gamma \sim \frac{v_i}{a} \left[\frac{u}{v_e} \theta \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \frac{\rho}{a} \right]^{1/2}, \tag{3.44}$$

а соответствующее значение для области локализации оказывается равным

$$\frac{x_0}{\rho} \approx \left[\frac{u}{v_e} \cdot \frac{1}{\theta^3} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \rho/a \right]^{1/2} \frac{a^2}{\lambda_e \rho}.$$

Дрейфовая частота ω^* для этой же локализации:

$$\omega^* \sim \frac{v_i}{a} \left[\frac{v_e}{u} \theta^3 \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \left(\frac{\lambda_e \rho}{a_2} \right)^2 \frac{\rho}{a} \right]^{1/4}. \tag{3.45}$$

Поэтому характерная частота $\omega \sim \gamma$ становится порядка дрейфовой или меньше при

$$\left[\frac{v_e^3}{u^3} \theta \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \cdot \frac{a}{\rho} \right]^{1/2} \frac{\lambda_e \rho}{a^2} > 1. \tag{3.46}$$

Рассмотренную токово-конвективную неустойчивость можно назвать безынерционной, так как поперечная инерция ионов не играет никакой роли. Область ее локализации, как уже отмечалось, определяется продольной теплопроводностью и нелинейными эффектами, т. е. по существу усиленной поперечной теплопроводностью.

С повышением температуры диссипация уменьшается, неустойчивость становится все более мелкомасштабной и ее локализация начинает определяться не теплопроводностью, а инерцией ионов. При этом все три члена в уравнении (3.38) оказываются одного порядка величины, так что

$$\omega \sim i\omega_T^* \frac{u}{v_e k_\parallel \lambda_e} \sim \omega_s. \tag{3.47}$$

Это так называемая инерционная токово-конвективная неустойчивость (или, по терминологии работы [19], *rippling mode*). Из соотношений (3.47) и определения ω_s видно, что при этом теплопроводность не играет роли вплоть до $k_\perp^2 \rho^2 \sim 1$, так как

$$\omega \gg \chi_\parallel k_\parallel^2 \sim v_e^2 k_\parallel^2 / \nu_e.$$

Дифференциальное уравнение с учетом конечного ларморовского радиуса для этой неустойчивости, как следует из (3.36), имеет вид

$$\rho^2 \left(1 - \frac{\omega_i^*}{\omega}\right) \Delta_\perp \varphi + i \frac{k_\parallel^2 v_e^2}{\omega \nu_e} \left(1 - \frac{\omega_{pe}^*}{\omega} - \frac{\omega_{Te}^*}{\omega} i \frac{3}{2} \cdot \frac{u \nu_e}{k_\parallel v_e^2}\right) \varphi = 0. \tag{3.48}$$

Здесь опущен член с вязкостью ионов и колебания считаются потенциальными $A_\parallel \approx 0$.

Простой заменой переменной это уравнение сводится к уравнению квантового осциллятора (с учетом $k_\parallel = k_y \theta x / a$).

Наиболее быстрорастущему собственному значению отвечает функция основного состояния осциллятора

$$\varphi = \exp(-ax^2/\rho^2). \tag{3.49}$$

Условие локализации возмущения требует

$$\operatorname{Re} a > 0. \tag{3.50}$$

Подставляя функцию (3.49) в уравнение (3.48), получаем следующие уравнения: для a и ω:

$$\left.\begin{aligned} 2a + k_y^2 \rho^2 - i \frac{\nu_e}{\omega} \cdot \frac{9}{16} \left(\frac{u}{v_e}\right)^2 \frac{\gamma_0^2 \omega_{pe}^{*2}}{\omega_{pe}^{*2} - \omega^2} = 0; \\ 4a - i \frac{\omega_{pe}^{*2}}{\nu_e \omega} \cdot \frac{m_i}{m_e} \theta^2 \frac{\omega_{pe}^* - \omega}{\omega_{pe}^* + \omega} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.51}$$

где предполагается $T_e = T_i$; $\omega^*_{pi} = -\omega^*_{pe}$; $\gamma_0 = \frac{d \ln T_0}{d \ln p_0}$. Соотношения (3.51) совместно с условием (3.50) определяют собственную функцию и собственное значение ω.

Если предположить, что $\omega \gg \omega^*_{pe}$, то из соотношений (3.51) получаем результат [19] для *rippling mode*:

$$\omega = i\,\omega^*_{pe}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^4 \frac{m_e}{m_i}\left(\frac{\nu_e}{\omega^*_{pe}}\right)^3 \frac{\gamma_0^4}{\theta^2}\left(\frac{u}{v_e}\right)^4\right\}^{1/5}. \qquad (3.52)$$

С увеличением температуры частота уменьшается и при $\omega < \omega^*_{pe}$ происходит стабилизация этой неустойчивости за счет эффекта конечного ларморовского радиуса ионов [21].

Таким образом, помимо того, что эта неустойчивость обладает меньшей областью локализации по сравнению с безынерционной [это можно установить из соотношения (3.47) или прямо из выражений (3.49), (3.51)], она стабилизируется конечным ларморовским радиусом при $\omega < \omega^*_{pe}$. Подставляя в это неравенство выражение для частоты (3.52), можно убедиться, что при принятых выше значениях температур и плотностей она или находится на границе своего существования, или стабилизирована.

С учетом инерции ионов может развиваться еще одна коротковолновая неустойчивость, так называемая дрейфово-диссипативная.

4. Дрейфово-диссипативная неустойчивость

Из дисперсионного уравнения (3.38а), временно пренебрегая членом с ω_g^2, можно написать следующее выражение для частоты в случае $\omega_s \gg \omega^*_{pe}$:

$$\omega = \omega^*_{pe}\left(1 - k_\perp^2\rho^2\left(1 - \frac{T_i}{T_e}\right)\right) - i\,\chi^e_\parallel k^2_\parallel + \\ + i\,\omega^*_{Te}\frac{3}{2}\frac{u}{v_e k_\parallel \lambda_e} + i\frac{(\omega^*_{pe})^2}{\omega_s}\left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right). \qquad (3.53)$$

В первом члене в правой части мы учли небольшую поправку к частоте за счет конечного ларморовского радиуса. Из уравнения (3.53) следует, что если

$$\frac{(\omega^*_{pe})^2}{\omega_s} > \frac{\omega^*_T u}{v_e k_\parallel \lambda_e}, \qquad (3.54)$$

то токовая неустойчивость переходит в дрейфово-диссипативную. Условие (3.54) можно переписать в виде

$$x < \rho\left(\frac{v_e}{u\theta}\sqrt{\frac{m_e}{m_i}}\right)^{1/3}. \qquad (3.55)$$

Рассмотрим некоторый волновой пакет, близкий к плоской волне с волновым вектором $\mathbf{k}$. За время $t \sim \gamma^{-1}$ он сместится на расстояние

$$x \sim \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}}{\partial k_x}. \tag{3.56}$$

Эту величину можно рассматривать как характерную область локализации неустойчивости в случае $\gamma < \omega$, даже если в линейном приближении локализованные решения отсутствуют.

Используя соотношение (3.56) и выражение для частоты (3.53), находим

$$x < \rho \sqrt{\delta}, \tag{3.57}$$

где

$$\delta = \frac{1}{m\theta^2} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \cdot \frac{a^2}{\lambda_e \rho},$$

а инкремент при подстановке в выражение (3.53) области локализации (3.57) оказывается равным

$$\gamma \sim \omega^*/\delta. \tag{3.58}$$

Можно убедиться, что к точно таким же выражениям [(3.57), (3.58)] приводит решение задачи на собственные значения.

Если вместо m подставить величину $m_0 = \sqrt{a/x}$, соответствующую перекрывающимся ячейкам, то для ширины локализации (3.57) получим

$$x_0 = \rho \left[\sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \cdot \frac{1}{\theta^2} \cdot \frac{a^2}{\lambda_e \rho} \sqrt{\frac{\rho}{a}} \right]^{2/3}. \tag{3.59}$$

Как следует из формулы (3.59), с ростом температуры возмущения попадают в область $x < \rho$, где уравнение (3.53) несправедливо. При этом нарушается условие $k_\perp^2 \rho^2 < 1$, и поперечное движение ионов нужно описывать кинетически. Продольное движение электронов по-прежнему можно описывать гидродинамически, так как условие $k_\parallel \lambda_e < 1$ при $x \to 0$ только улучшается. Используя кинетическое уравнение, можно получить следующее интегральное уравнение, справедливое при произвольном отношении x/ρ [22]:

$$\left(\omega - \omega_{pi}^*\right) \int e^{i k_x x} \varphi(k_x)\, dk_x \left(1 - \frac{\omega e^{-z} I_0(z)}{\omega + i \nu_{ii} z}\right) + \\ + i \frac{\left(\omega - \omega_{pe}^*\right) k_\parallel^2 v_e^2}{\omega \nu_e + i k_\parallel^2 v_e^2} \varphi = 0. \tag{3.60}$$

Так как получающиеся колебания оказываются апериодическими, то достаточно ограничиться только квазиклассическим приближением.

Предполагая, что $\omega < \omega^*$, $z = k^2\rho_2^i \gg 1$, из (3.60) получим следующее дисперсионное уравнение [23]

$$1 - i\frac{k_\parallel^2 v_e^2}{\omega\nu_e}\left(\frac{\omega}{\omega_{pe}^*} + \frac{1}{\sqrt{2\pi z}}\cdot\frac{1}{1 + i\nu_{ii}z/\omega}\right) = 0. \qquad (3.61)$$

Учет влияния вязкости (член $i\gamma_{ii}z$ в (3.60)) был произведен с помощью кинетического уравнения с кулоновским членом столкновений. Как известно, кулоновский член столкновений имеет вид дифференциального оператора в пространстве скоростей. Вследствие этого для коротковолновых возмущений ($z = k_\perp^2\rho_i^2 > 1$) эффективная частота столкновений, входящая в коэффициент вязкости, порядка $\nu_i k_\perp^2\rho_i^2$, т. е. больше ν_i в z раз [24]. Это приводит к сильной стабилизации коротковолновых возмущений.

Из уравнения (3.61) находим

$$\omega = -i\nu_{ii}z + i\frac{k_\parallel^2 v_e^2}{\nu_e\sqrt{2\pi z}}\left(1 - 2i\frac{k_\parallel^2 v_e^2}{\nu_e\omega_{pe}^*}\right)^{-1}. \qquad (3.62)$$

Из этого выражения следует, что частота ω порядка инкремента γ:

$$\gamma \sim \omega \sim \omega_{pe}^*\sqrt{\delta}, \qquad (3.63)$$

а область локализации по-прежнему определяется выражением (3.57), т. е. $x = \rho\sqrt{\delta}$. Этот же результат, только с точными численными коэффициентами порядка единицы, можно получить, решая уравнение (3.60). В случае $z \gg 1$ оно сводится к дифференциальному уравнению в k-пространстве для вырожденной гипергеометрической функции.

Выше мы пренебрегали влиянием ионной вязкости. Естественно, что для инерционных коротковолновых колебаний $x \sim \rho_i$ вязкость должна играть существенную роль. Если учесть вязкость в гидродинамической области $x > \rho$ ($\delta > 1$), то получим, что рассматриваемые колебания стабилизируются при

$$\theta^2 \gtrsim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \quad (\delta > 1). \qquad (3.64)$$

В кинетической области $x < \rho_i$, как это следует из выражения (3.62), критерий стабилизации имеет вид

$$\theta^2 \gtrsim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}\,\delta \quad (\delta < 1). \qquad (3.65)$$

Таким образом, вязкость в первую очередь подавляет коротковолновые дрейфово-диссипативные колебания, а при $\theta \gtrsim \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/4}$ данная неустойчивость стабилизируется полностью.

5. Гравитационная диссипативная неустойчивость

Рассмотрим теперь, как влияет на устойчивость плазмы кривизна силовых линий. Так как в гидродинамическом приближении влияние кривизны эквивалентно некоторой силе тяжести с ускорением $g_i \sim T/m_i R$, с помощью которой часто имитируют настоящую кривизну, то неустойчивость, обусловленную кривизной силовых линий, для краткости иногда называют гравитационной (а также желобковой или конвективной).

Из уравнения (3.38а), пренебрегая u, находим

$$\omega^2 + \omega(i\omega_s - \omega_{pi}^*) - i\omega_s\omega_{pe}^* + \omega_g^2 = 0, \tag{3.66}$$

где

$$\omega_g^2 = 2\frac{k_y^2}{k_\perp^2} \cdot \frac{T_i + T_e}{Rm_i} \cdot \frac{d \ln p_0}{dr}.$$

Из уравнения (3.66) получаем

$$\omega = \omega_{pe}^* + i\frac{\omega^2 + \omega_g^2}{\omega_s} - i\frac{\omega\omega_{pi}^*}{\omega_s}. \tag{3.67}$$

Существуют две разновидности гравитационной неустойчивости. При ($\omega_s \gg \omega_{pe}^*$) развивается безынерционная гравитационная неустойчивость

$$\omega \approx \omega_{pe}^*; \quad \gamma \sim \frac{\omega_g^2}{\omega_s}, \tag{3.68}$$

область локализации которой определяется неравенством

$$k_\parallel^2 v_e^2/\nu_e < \omega_{pe}^*. \tag{3.69}$$

Это неравенство имеет простой смысл. Когда оно перестает выполняться, электроны успевают прийти в больцмановское равновесие вдоль силовых линий и, согласно более полному уравнению (3.38а), неустойчивость исчезает. Из соотношений (3.68), (3.69) нетрудно установить, что для безынерционной неустойчивости $\omega \ll \omega_s$ ($\omega \sim k_\perp^2 \rho_i^2 \omega_s$). Так как область локализации этой неустойчивости определяется тем же соотношением (3.69), что и дрейфово-диссипативной, то она будет играть большую роль, если ее инкремент превышает инкремент дрейфово-диссипативной неустойчивости, т. е. при $T_e \sim T_i$

$$\omega_g^2 > 2\omega_{pe}^{*2}, \tag{3.70}$$

Так как $\omega_g^2/\omega^{*2} \sim \frac{a}{R}(k_\perp\rho)^{-2}$, то влияние силы тяжести оказывается несущественным при $k_\perp^2 \rho_i^2 > a/R$. Гравитационная неустойчивость, как известно, не развивается в системах с минимумом H, т. е. в системах, где в среднем магнитное поле возрастает

наружу. В нашей схеме этому соответствует случай $R < 0$. Как видно из предыдущего, коротковолновые возмущения с $k_\perp^2 \rho^2 > a/R$ не стабилизируются в конфигурациях с минимумом H.

Характерную область локализации и частоту безынерционной гравитационной неустойчивости можно выразить через параметр δ [см. формулу (3.57)]:

$$x \sim \rho \sqrt{\delta}; \quad \omega \sim \omega_{pe}^*; \quad \gamma \sim \frac{a}{R} \omega_{pe}^*, \tag{3.71}$$

а условие того, что гравитационная неустойчивость более важна, чем дрейфовая (3.70), имеет вид $\frac{a}{R} \delta > 1$.

Если диссипация мала, так что нелинейные эффекты не в состоянии локализовать возмущение, то локализация начинает определяться инерцией ионов, и безынерционная неустойчивость переходит в гравитационную инерционную неустойчивость («G»-моду, по терминологии работы [19]). При этом все три члена в уравнении (3.67) имеют один порядок величины, т. е.

$$\omega \sim \omega_g \sim \omega_s. \tag{3.72}$$

В этом случае $k_\parallel^2 v_e^2 / \nu_e < \omega$, и дифференциальное уравнение для инерционной гравитационной неустойчивости, как это следует из формулы (3.67), имеет вид

$$\rho^2 \left(1 - \frac{\omega_{pi}^*}{\omega}\right)\left(1 - i\frac{\nu_{ii}}{\omega} \rho^2 \Delta_\perp\right) \Delta_\perp \varphi - 2 \frac{a}{R} \left(\frac{\omega_{pe}^*}{\omega}\right)^2 \varphi + \\ + \frac{k_\parallel^2 v_e^2}{\omega(\omega + i\nu_e)} \left(1 - \frac{\omega_{pe}^*}{\omega}\right) \varphi = 0. \tag{3.73}$$

Здесь учитывается столкновительная вязкость ионов (член с ν_{ii}), а также продольная инерция электронов. Как нетрудно получить из уравнения движения электронов, для учета продольной инерции достаточно заменить в выражении (3.67) $i\nu_e \to \omega + i\nu_e$.

Если в уравнении (3.73) пренебречь вязкостью, то получится уравнение для квантового осциллятора. Выбирая решение в виде

$$\varphi = \exp(-a_0 x^2/\rho^2), \tag{3.74}$$

что соответствует наибольшему инкременту, нетрудно получить следующее дисперсионное уравнение:

$$\bar{\omega}\left(\bar{\omega} + \frac{T_i}{T_e}\right)(\bar{\omega} - 1) = -\frac{(\bar{\omega} + i\bar{\nu}_e) m_i}{\theta^2 m_e} \times \\ \times \left[2\frac{a}{R} + k_y^2 \rho^2 \bar{\omega}\left(\bar{\omega} + \frac{T_i}{T_e}\right)\right]^2, \tag{3.75}$$

где $\bar{\omega} = \omega/\omega^*_{pe}$, $\bar{\nu}_e = \nu_e/\omega^*_{pe}$, а условие существования локализованных возмущений примет вид

$$\operatorname{Re} 2a_0 = -\operatorname{Re}\left[k_y^2\rho^2 + 2\frac{a}{R}\cdot\frac{1}{\bar{\omega}\left(\bar{\omega}+\frac{T_i}{T_e}\right)}\right] > 0. \qquad (3.76)$$

Рассмотрим вначале бесстолкновительный случай $\nu_e \to 0$, когда роль конечной проводимости играет инерция электронов. Тогда, как можно получить из уравнения (3.75), плазма устойчива при

$$\theta > \frac{2a}{R}\sqrt{\frac{m_e}{m_i}}. \qquad (3.77)$$

Заметим, что данная неустойчивость является продолжением на потенциальный случай желобковой неустойчивости. Когда выполнен критерий Сайдема, который в приближении плоского слоя можно записать в виде

$$\theta^2 > \frac{a}{R}\beta, \qquad (3.78)$$

то начинает развиваться гравитационная неустойчивость, причем электроны становятся размороженными из-за их инерции [25]. Для ее стабилизации требуется, чтобы был выполнен критерий (3.77), который, как видно из сравнения с условием (3.78), является более слабым. Однако, даже если критерий (3.77) выполнен, включение диссипации ($\nu_e \neq 0$) приводит к появлению неустойчивых решений. Возможны следующие случаи [26]:

а) $\nu_e \gg \omega \gg \omega^*$, тогда

$$\omega = \omega^*_{pe}\left\{-i\frac{2a}{R}\cdot\frac{1}{\theta}\sqrt{\frac{m_e}{m_i}}\bar{\nu}_e^{-1/2}\right\}^{2/3}; \qquad (3.79)$$

б) с увеличением температуры $\nu_e \to 0$ и начиная с некоторого момента выполняются неравенства $\omega \ll \omega^*$, $\omega \ll \nu_e$. При этом

$$\omega = \omega^*_{pe}\frac{T_e}{T_i}\cdot\frac{i\bar{\nu}_e m_i}{\theta^2 m_e}\cdot\frac{4a^2}{R^2}. \qquad (3.80)$$

Другими словами, инкремент начинает быстро падать с ν_e. Поэтому можно считать, что при $\omega \ll \omega^*$ практически наступает стабилизация рассматриваемой неустойчивости, критерием чего является неравенство

$$\frac{1}{m}\sqrt{\frac{m_i}{m_e}}\cdot\frac{a^2}{\lambda_e\rho} < \frac{\theta^2 m_e}{m_i}\cdot\frac{4a^2}{R^2}\left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{5/2}. \qquad (3.81)$$

Приведем еще порядок величины области локализации для случая «а» ($\omega > \omega^*$):

$$x/\rho \sim \frac{R}{a}\left(\frac{4a^2 m_i\bar{\nu}_e}{R^2\theta^2 m_e}\right)^{1/3} > R/a. \qquad (3.82)$$

Этот же результат можно получить из условия (3.72). Инерционная неустойчивость обладает областью локализации меньшей, чем безынерционная.

6. Температурная дрейфовая неустойчивость

При увеличении k_y начинают развиваться бесстолкновительные неустойчивости. Их характерная область $k_x \sim k_y$ ($k_y x \sim 1$) [27]. При этом диссипация не играет роли. Действительно, $k_\parallel \lambda_e \sim k_y x \theta \lambda_e / a \sim \theta \lambda_e / a > 1$.

Введение большого шира $\theta \gg \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$ (для определенности в дальнейших выкладках будем считать $\theta \sim 10^{-1}$) сильно упрощает классификацию этих неустойчивостей. Для простоты пока пренебрежем эффектами, связанными с кривизной и неоднородностью магнитного поля вдоль силовых линий (захваченные частицы), а также продольным током. Тогда возможны две причины раскачки колебаний: а) бесстолкновительная диссипация (затухание Ландау) на электронах, максимум которой достигается при $\omega / k_\parallel v_e \sim 1$, и б) диссипация от ионов, максимальная при $\omega / k_\parallel v_i \sim 1$.

Заметим, что если электроны и ионы распределены по Больцману (а в рассматриваемой постановке задачи этому соответствует условие $\omega \ll k_\parallel v_j$, где v_j — тепловая скорость соответствующего сорта частиц), то, естественно, никакой неустойчивости не возникает. Допустим, что существование неустойчивости связано с неравновесностью электронов, т. е.

$$\frac{\omega}{k_\parallel v_e} \gtrsim 1. \tag{3.83}$$

Тогда, учитывая, что $k_\parallel = k_y \theta x / a$, а также $\omega < \omega^*$, где ω^* — дрейфовая частота, из условия (3.83) получаем характерную область локализации этих колебаний

$$x_e \sim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}\, \rho_{ie} / \theta. \tag{3.84}$$

Индекс e означает, что эта область локализации характерна для неустойчивостей, раскачиваемых электронами, $\rho_{ie} = \sqrt{\frac{T_e}{m_i}} \cdot \frac{1}{\Omega_i}$ — ионный ларморовский радиус по электронной температуре. Но из соотношения (3.84) и неравенства $\theta \gg \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$ следует, что $x_e / \rho_i \ll \sqrt{\frac{T_e}{T_i}}$, где ρ_i — ионный ларморовский радиус, т. е. при $T_e \sim T_i$ длина волны колебаний оказывается меньше ларморовского радиуса ионов. В таких коротковолновых колебаниях ионы можно считать распределенными по Больцману. Таким об-

разом, мы приходим к следующему заключению: неустойчивости, развивающиеся в плазме с большим широм и обязанные своим происхождением неравновесности электронов, обладают областью локализации (3.84), и ионы в них можно считать распределенными по Больцману. Известна только одна такая неустойчивость — это электронная температурная неустойчивость [28].

Естественно возникает вопрос, а нет ли колебаний с большей областью локализации. Если $x \gg x_e$ ($\omega/k_\parallel v_e \gg 1$), то электроны уже успевают распределиться по Больцману, и единственной причиной неравновесности являются ионы, так как для них все еще может быть $\dfrac{\omega}{k_\parallel v_i} \gtrsim 1$ (см. п. 7). Это условие дает другую возможную область локализации

$$x_i \sim \rho_i/\theta. \tag{3.85}$$

При $x > x_i$ ионы также успевают прийти в равновесие [если нет особых причин, мешающих им это сделать, как, например, существование захваченных частиц (§ 4)], и колебания начинают затухать [27]. Таким образом, при такой постановке задачи локализация (3.85) является наибольшей из возможных, и остается выяснить, есть ли неустойчивости в этом интервале. Ниже показано, что единственной неустойчивостью подобного типа является потенциальная дрейфово-температурная неустойчивость.

При исследовании неустойчивостей будем применять квазиклассическое локальное приближение, и так как получающиеся инкременты оказываются порядка частоты колебаний, то такое приближение можно считать достаточным.

Начнем с дрейфово-температурной неустойчивости как обладающей большей локализацией, и поэтому особенно важной. Электронная температурная неустойчивость во многом похожа на температурно-дрейфовую.

Рассмотрим вначале для простоты случай $\omega \gg k_\parallel v_i$. Тогда для описания продольного движения ионов можно использовать гидродинамическое уравнение. Считая, что поперек магнитного поля колебания имеют длину волны больше ларморовского радиуса ионов, можно пренебречь их поперечной инерцией. Из уравнения непрерывности находим

$$\frac{n_i'}{n_0} = -\frac{k_y c}{H\omega n_0} \cdot \frac{dn_0}{dr} \varphi + \frac{k_\parallel v_z'}{\omega}. \tag{3.86}$$

Пользуясь выражением для возмущенного давления

$$p_i' = -\frac{k_y c}{H\omega} \cdot \frac{dp_{0i}}{dr} \varphi,$$

найдем продольную скорость ионов

$$v_z' = \frac{k_\parallel}{m_i \omega} \left(1 - \frac{\omega_{pi}^*}{\omega}\right) \varphi \tag{3.87}$$

и подставим это выражение в соотношение (3.86).

Тогда получим окончательно возмущенную плотность ионов в виде

$$\frac{n_i'}{n_0} = -\frac{k_y c}{H\omega n_0}\cdot\frac{dn_0}{dx}\varphi + \frac{k_\parallel^2 e}{m_i\omega^2}\left(1-\frac{\omega_{pi}^*}{\omega}\right)\varphi, \qquad (3.88)$$

где $\omega \gg k_\parallel v_i$; $\omega_{pi}^* = \frac{k_y c}{Hn_0}\frac{dp_{0i}}{dv}$ — дрейфовая частота ионов.

Приравнивая выражение (3.88) к плотности электронов, распределенных по Больцману, $\frac{n_e'}{n_0} = \frac{e\varphi}{T_e}$, получим следующее дисперсионное уравнение [29]:

$$1 - \frac{\omega_{en}^*}{\omega} - \frac{k_\parallel^2 T_e}{m_i\omega^2}\left(1-\frac{\omega_{pi}^*}{\omega}\right) = 0. \qquad (3.89)$$

Здесь $\omega_{en}^* = -\frac{k_y c T_e}{eHn_0}\cdot\frac{dn_0}{dr}$ — дрейфовая частота электронов. Из самого вывода следует, что уравнение (3.89) справедливо лишь при $k_\parallel^2 T_e \ll m_i\omega^2$, поэтому оно может иметь решение, отличное от $\omega = \omega_e^*$, только при $\omega \ll \omega^*$. Учитывая это, найдем из уравнения (3.89) следующее выражение для частоты:

$$\omega^2 = -\frac{k_\parallel^2 T_e}{m_i}(1+\eta), \qquad (3.90)$$

где

$$\eta = \frac{d\ln T_0}{d\ln n_0}.$$

Один из корней раскачивающийся. Из условия применимости $\omega \gg k_\parallel v_i$ следует, что этот результат справедлив лишь при $\eta \gg 1$. Выражение (3.90) относится к области малых $k_\parallel \sim x$. При увеличении $k_\parallel$ второй член в уравнении (3.89) оказывается несущественным, и оно приводится к кубическому уравнению для частоты [17]

$$\omega^3 = -\frac{k_\parallel^2 T_e}{m_i}\omega_{Ti}^* \quad (\eta \gg 1), \qquad (3.91)$$

из которого можно найти частоту и инкремент неустойчивых колебаний.

Выражение (3.91) справедливо в области малых $k_\parallel$, т. е. в непосредственной близости от точки, где $k_\parallel = 0$. С ростом x постепенно начинает нарушаться принятое выше условие $\omega/k_\parallel v_i \gg 1$, и колебания попадают в область с $\omega \sim k_\parallel v_i$. Инкремент начинает падать, обращается в нуль и, наконец, при достаточно больших x становится отрицательным. Естественно, чтобы рассмотреть область частот $\omega \sim k_\parallel v_i$, необходимо использовать кинетическое уравнение. Общее интегральное уравнение для потенциальных

колебаний может быть записано [29] в следующем симметричном относительно ионов и электронов виде:

$$\int e^{ik_x x}\varphi(k_x)\left\{\frac{1}{T_i}\left[1-\frac{\omega^*_{Ti}}{\omega}e^{-z_i}I_0(z_i)\,y_i^2+i\sqrt{\pi}\,e^{-z_i}I_0(z_i)y_iW(y_i)\times\right.\right.$$
$$\times\left.\left(1-\frac{\omega^*_{ni}}{\omega}+\frac{\omega^*_{Ti}}{\omega}\left(z_i-\frac{I_1(z_i)z_i}{I_0(z_i)}+\frac{1}{2}-y_i^2\right)\right)\right]+$$
$$+\frac{1}{T_e}\left[1-\frac{\omega^*_{Te}}{\omega}e^{-z_e}I_0(z_e)\,y_e^2+i\sqrt{\pi}\,e^{-z_e}I_0(z_e)\,y_eW(y_e)\times\right.$$
$$\times\left.\left(1-\frac{\omega^*_{ne}}{\omega}+\frac{\omega^*_{Te}}{\omega}\left(z_e-\frac{I_1(z_e)z_e}{I_0(z_e)}+\frac{1}{2}-y_e^2\right)\right)\right]+$$
$$\left.+\frac{k^2}{4\pi e^2 n_0}\right\}dk_x=0. \qquad (3.92)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\omega^*_{Tj}=\frac{k_y}{m_j\Omega_j}\cdot\frac{dT_j}{dr}\ (j=e,i);\ \omega_{nj}=\frac{k_yT_j}{m_j\Omega_jn_0}\cdot\frac{dn_0}{dr};$$

$$e_i=-e_e=e;\ z_j=\frac{k_\perp^2T_j}{m_j\Omega_j^2};\quad k_\perp^2=k_x^2+\left(\frac{m}{r}\right)^2;\ k_y=m/r;$$

$$y_j=\frac{\omega}{k_\parallel v_j};\ k_\parallel=k_y\theta x/a;\ v_j=\sqrt{\frac{2T_j}{m_j}};$$

I_0, I_1 — модифицированные функции Бесселя;

$$W(y)=e^{-y^2}\left(1+\frac{2i}{\sqrt{\pi}}\int_0^y e^{t^2}dt\right).$$

Для рассматриваемых ниже коротковолновых колебаний с областью локализации $x\sim\rho_i/\theta\ll a$ макроскопические величины n_0, $\frac{dT_0}{dr}$ и т. д. можно считать постоянными. Считая, что в области локализации имеется несколько узлов, можно выбрать φ в виде квазиклассической волновой функции $\varphi(x)=\exp\left(\int k_x(x)\,dx\right)$. Тогда из уравнения (3.92), учитывая, что $\omega\ll k_\parallel v_e$, $z_e\ll 1$, получаем дисперсионное уравнение

$$1+\frac{T_i}{T_e}-\frac{\omega^*_T}{\omega}e^{-z}I_0(z)\,y^2+i\sqrt{\pi}\,e^{-z}I_0(z)\,yW(y)\left\{1-\frac{\omega^*_n}{\omega}+\right.$$
$$\left.+\frac{\omega^*_T}{\omega}\left[z\left(1-\frac{I_1}{I_0}\right)+\frac{1}{2}-y^2\right]\right\}+i\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{m_e}{m_i}}\times$$

$$\times \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{3/2} y \left\{1 + \frac{T_e}{T_i} \cdot \frac{\omega_n^*}{\omega} - \frac{T_e}{T_i} \cdot \frac{\omega_T^*}{\omega} \frac{1}{2}\right\} = 0. \qquad (3.93)$$

Здесь все величины без индекса относятся к ионам.

Важным параметром, характеризующим дрейфово-температурную неустойчивость, является область локализации l, в качестве которой примем расстояние от точки $x = r - r_0 = 0$ до точки, где локальный инкремент обращается в нуль. Действительно, при $x > l$ инкремент становится отрицательным и колебания в этой области затухают, т. е. они в основном сосредоточены там, где $\gamma > 0$. Учитывая, что при $x = l$ $\gamma = \mathrm{Im}\,\omega = 0$, и приравнивая

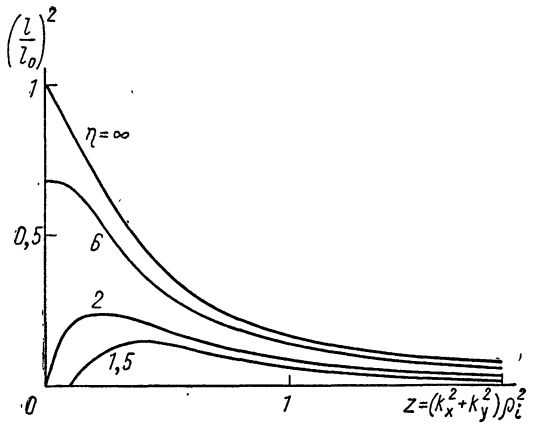


Рис. 6. Зависимость ширины локализации от волнового числа.

действительную и мнимую части уравнения (3.93) по отдельности нулю, а затем исключая из этих двух уравнений ω, получаем следующее выражение для l:

$$\left(\frac{l}{l_0}\right)^2 = \frac{2}{1 + T_i/T_e} (e^{-z} I_0(z))^2 \frac{1 - 2/\eta + 2z(1 - I_1/I_0)}{1 + T_i/T_e - e^{-z} I_0}, \qquad (3.94)$$

где $l_0 = \frac{\rho_i}{2\theta} \cdot \frac{d \ln T}{d \ln r}$ — характерная область локализации температурной дрейфовой неустойчивости, $\eta = \frac{d \ln T}{d \ln n}$.

Как следует из формулы (3.94), рассматриваемая неустойчивость может существовать ($l^2 > 0$) при [30]

$$\eta \equiv \frac{d \ln T}{d \ln n} > \frac{2}{1 + 2z(1 - I_1/I_0)} \quad \text{или} \quad \eta < 0. \qquad (3.95)$$

В области относительно крупномасштабных возмущений $x \sim \rho_i/\theta$ ($z \ll 1$) критерий (3.95) приводит к условию $\eta > 2$. Минимальное значение $\eta \approx 0{,}95$ достигается при $z \approx 1$.

Величина l^2/l_0^2 как функция $z = (k_x^2 + k_y^2)\rho^2$ изображена на рис. 6 при различных параметрах η в случае $T_i = T_e$. При уменьшении отношения T_e/T_i область локализации уменьшается и наоборот. Если $T_e = T_i$, $z \ll 1$, а $\eta \gg 1$, т. е. реализуется случай, рассмотренный при малых x гидродинамически в начале раздела, то $l = l_0$.

Зная область локализации l, можно найти, сколько узлов имеет решение при данном значении θ. Приближенно число узлов равно

$$n \lesssim \frac{k_x l}{\pi}\,\alpha \quad (n = 1, 2 \ldots), \tag{3.96}$$

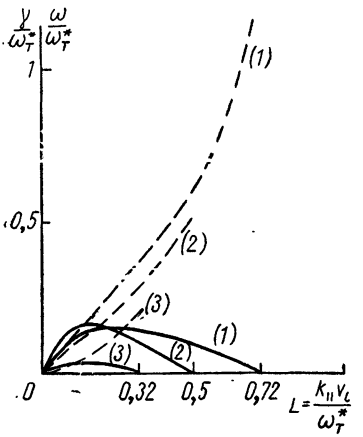


Рис. 7. Зависимость локальных инкремента γ и частоты ω от x: *1* — $a = 0{,}5$, $b = 1{,}6$; *2* — $a = 0{,}5$; $b = 2$; *3* — $a = 0{,}2$, $b = 2$.

где n — ближайшее целое число, меньшее $k_x l\alpha/\pi$; α — численный множитель порядка единицы, который не может быть определен в локальной квазиклассике. Если $k_x l\alpha/\pi < 1$, то вообще не существует ни одного уровня. Это как раз и есть условие стабилизации широм. Критическое значение θ_c можно найти, подставляя l в соотношение $\frac{k_x l\alpha}{\pi} = 1$ из выражения (3.94). В результате получаем θ_c как функцию k_y. Максимум этой величины по k_y обозначим через θ_{mc}. Приближенное выражение для этой величины:

$$\theta_{mc} \approx \frac{0{,}3}{\pi}\,\alpha\left(1 - \frac{0{,}95}{\eta}\right)^{1/2} (T_e = T_i). \tag{3.97}$$

Если $T_e \ll T_i$, то

$$\theta_{mc} \approx \frac{0{,}5}{\pi}\,\alpha\,\frac{T_e}{T_i}\left(1 - \frac{0{,}95}{\eta}\right)^{1/2}. \tag{3.98}$$

Другой важной характеристикой температурной дрейфовой неустойчивости является ее инкремент. В общем случае уравнение (3.98) не содержит малых параметров, и поэтому необходимы численные расчеты. Так, на рис. 7 приведены локальный инкремент и частота как функции x для разных значений параметров:

$$a = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\eta} + z\left(1 - \frac{I_1(z)}{I_0(z)}\right)\right]; \quad b = \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right) e^z I_0^{-1}(z).$$

7. Бесстолкновительные неустойчивости, раскачиваемые электронами

При переходе к колебаниям с локализацией, меньшей чем ρ_i/θ, диссипация, вносимая ионами, становится экспоненциально малой и раскачка неустойчивостей начинает обусловливаться электронами. Эти так называемые электронные неустойчивости начнем рассматривать с неустойчивости, обладающей среди них наибольшим инкрементом, а именно с электронной температурной [28].

Она характеризуется локализацией $x_e = \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}\frac{\rho_i}{\theta}$ [см. формулу (3.84)]. При этом аргумент ионной функции Бесселя оказывается гораздо больше единицы $z_i = x_\perp^2\rho^2 \sim \frac{m_i}{m_e}\theta^2 \gg 1$ (так как мы выбрали $\theta \gg \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$) и ионы распределены по Больцману. Дисперсионное уравнение для рассматриваемых колебаний может быть получено из уравнения (3.92):

$$1 + \frac{T_e}{T_i} - \frac{\omega_{Te}^*}{\omega} e^{-z_e} I_0(z_e)\, y_e^2 + i\sqrt{\pi}\, e^{-z_e} I_0(z_e)\, y_e W(y_e) \times$$
$$\times \left\{1 - \frac{\omega_{ne}^*}{\omega} + \frac{\omega_{Te}^*}{\omega}\left(z_e - \frac{z_e I_1(z_e)}{I_0(z_e)} + \frac{1}{2} - y_e^2\right)\right\} = 0. \quad (3.99)$$

Сравнивая его с уравнением для ионной неустойчивости (3.93), видим, что эти уравнения полностью совпадают с точностью до замены индекса i на e, за исключением последнего члена в уравнении (3.93). Но так как во многих случаях он оказывается несущественным, поэтому можно переносить соответствующие результаты для ионной неустойчивости на электронную, просто заменяя i на e. Так, остаются справедливыми выражения (3.90) и (3.91) для ширины области локализации (3.94), вид инкремента, приведенный на рис. 7, и т. д. (О влиянии непотенциальности на эту неустойчивость см. п. 8.)

Во всех предыдущих рассуждениях относительно бесстолкновительных неустойчивостей неявно предполагалось, что при $\omega \ll k_\parallel v_e$ электроны распределяются по Больцману, т. е. $n_e = \frac{e\varphi}{T_e} n_0$. Строго говоря, в выражении для плотности n_e имеется небольшая мнимая добавка порядка $\frac{\omega}{k_\parallel v_e}$, вызванная резонансными электронами. Так как она спадает как $1/x$, т. е. весьма медленно от точки $k_\parallel = 0$, то в принципе, казалось бы, возможна раскачка колебаний электронами и далеко от их характерной области локализации (3.84). Для того чтобы выяснить этот вопрос, рассмотрим колебания с $x > \rho_i$. Тогда для частоты дрейфо-

вых колебаний, раскачиваемых электронами, нетрудно получить следующее выражение [31]:

$$\omega = \omega_e^* \left(1 - k_\perp^2 \rho^2 - \frac{a}{R} + \frac{k_\parallel^2 T_e}{m_i \omega_e^{*2}}\right) + \\ + i\sqrt{\pi}\,\frac{(\omega_e^*)^2}{|k_\parallel| v_e}\left(k_\perp^2 \rho^2 + \frac{a}{R} - \frac{1}{2}\frac{d \ln T_e}{d \ln n} - \frac{k_\parallel^2 T}{m_i \omega_e^{*2}}\right). \quad (3.100)$$

Здесь учитываются малые поправки за счет инерции ионов и кривизны магнитного поля. Максимальный инкремент в выражении (3.100) достигается при $x \sim \rho_i$, при этом он составляет величину порядка $\sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$ от частоты.

Для рассматриваемых неустойчивых колебаний, инкремент которых мал по сравнению с частотой, может иметь место стабилизирующий эффект за счет конечного ларморовского радиуса ионов. Происхождение этого эффекта можно пояснить следующим образом. Рассмотрим некоторый волновый пакет, близкий к плоской волне с волновым вектором $\mathbf{k}$. Учет конечного ларморовского радиуса ионов приводит к изменению реальной части частоты на малую величину порядка $\omega^* k_\perp^2 \rho_i^2$. Вследствие этого групповая скорость дрейфовой волны $\mathbf{u}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$ приобретает малую компоненту $\sim k_x \rho_i^2 \omega^*$ в радиальном направлении, и за время $t \sim x/u_g \sim \frac{x}{k_x \rho_i^2 \omega^*}$ волновой пакет уходит из области локализации в область поглощения. Так как $k_x \gtrsim x^{-1}$, то возмущения не успеют заметно увеличить амплитуду, если

$$\gamma/\omega < \rho_i^2/x^2 \lesssim k_x^2 \rho_i^2. \quad (3.101)$$

В действительности если γ/ω не зависит от k_x, то условие устойчивости может быть даже мягче. Дело в том, что частота колебаний $\omega = \omega_e^*$ не является собственной частотой, так как она есть функция x. С учетом продольной инерции ионов эта зависимость еще усиливается, так как к частоте ω_e^* добавляется слагаемое вида $k_\parallel^2 T/m_i \omega^*$. Вследствие этого компонента волнового вектора k_x возрастает со временем как $\frac{\partial \omega^*}{\partial x} t$. При $x \sim \rho_i/\theta$ и $t_i \sim 1/\gamma$ имеем $k_x \sim \omega^* \theta/\rho_i \gamma$, так что условие стабилизации принимает вид

$$\gamma/\omega < \theta. \quad (3.102)$$

Часть инкремента в выражении (3.100), соответствующая первому слагаемому $k_\perp^2 \rho^2$ в круглых скобках, отвечает обычной дрейфовой неустойчивости. Условие ее стабилизации можно по-

лучить из условия (3.101), учитывая, что $x \sim \rho$. Оно имеет вид: $\theta > \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$ [32].

Второе слагаемое в круглых скобках при мнимой части описывает гравитационную раскачку дрейфовых волн. Условие стабилизации в этом случае

$$\theta > \frac{a}{R}\sqrt{\frac{m_e}{m_i}}.$$

При $\theta \gg \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$, как принято выше, эта неустойчивость стабилизирована.

Наконец, третье слагаемое учитывает раскачку дрейфовых волн за счет градиента электронной температуры, причем неустойчивость возможна лишь при $\eta_e = \frac{d \ln T_e}{d \ln n} < 0$. Условие ее стабилизации: $\theta > \eta_e \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$.

Таким образом, все неустойчивости, раскачиваемые электронами далеко за областью их характерной локализации (3.84), относительно легко стабилизируются широм. Исключение может представлять только токовая раскачка дрейфовых волн. В этом случае имеем следующее выражение для частоты

$$\omega = \omega_e^* + i\sqrt{\pi}\,\omega_e^* \frac{u}{v_e}. \qquad (3.103)$$

Используя критерий (3.102), находим условие стабилизации

$$\theta > u/v_e. \qquad (3.104)$$

В плазме с холодными ионами $T_i \ll T_e$ возможна еще электронная раскачка ионного звука. В случае $T_i \ll T_e$ из уравнения (3.92) получаем следующее дисперсионное соотношение:

$$1 - \frac{\omega_{ne}^*}{\omega} + \frac{T_e k_\perp^2}{m_i \Omega_i^2} - \frac{k_\parallel^2 T_e}{m_i \omega^2} + i\sqrt{\pi}\,\frac{\omega}{k_\parallel v_e}\left(1 - \frac{\omega_{ne}^*}{\omega} + \frac{1}{2}\,\frac{\omega_{Te}^*}{\omega}\right) = 0. \qquad (3.105)$$

Считая ω действительным и приравнивая нулю по отдельности действительную и мнимую части, можно получить условие неустойчивости

$$-(1 - \eta_e/2)\,\eta_e > 0, \qquad (3.106)$$

где $\eta_e = \frac{d \ln T_e}{d \ln n}$.

Условию $\eta_e < 0$ соответствует рассмотренный выше случай. Ионный звук раскачивается при $\eta_e > 2$. Чтобы чрезмерно не

усложнять выкладки, рассмотрим наиболее неблагоприятный с точки зрения устойчивости случай $\eta_e \gg 1$ (т. е. $\nabla n_0 \approx 0$). Тогда из уравнения (3.105) находим

$$\omega^2 = \frac{k_\parallel^2 T_e}{m_i}\left\{1 + i\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{m_e}{m_i}}\cdot\frac{1+\frac{1}{2}\frac{\omega_{Te}^*}{k_\parallel}\sqrt{\frac{m_i}{T_e}}}{1+k_\perp^2 T_e/m_i\Omega_i^2}\right\}. \quad (3.107)$$

Из этого соотношения следует, что максимальный инкремент достигается при $x \sim \rho_{ie} \sim \sqrt{\frac{T_e}{m_i\Omega_i^2}}$ (ρ_{ie} — ионный радиус по электронной температуре) и $\gamma \sim \omega\sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$. Тогда из условия (3.102) получаем, что и эти колебания стабилизируются при $\theta > \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$.

Таким образом, при $\theta > \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$ практически все неустойчивости, раскачиваемые электронами, оказываются мало существенными.

8. Непотенциальные неустойчивости

Рассмотрим, к чему приводит учет непотенциальности малых колебаний — эффекта, которым мы ранее пренебрегали. При $\beta = \frac{8\pi p}{H^2} \ll 1$ у плазмы не хватает энергии, чтобы привести к сжатию или разрежению силовых линий (точнее, $B_\parallel \sim \beta B_\perp$), поэтому магнитные силовые линии могут лишь слегка искривляться. Это искривление соответствует распространению альфвеновских волн, и математически его можно описать, как это было сделано в § 3, вводя единственную компоненту векторного потенциала $A_\parallel$. Таким образом, уравнения (3.37), учитывающие непотенциальность, содержат еще одну ветвь колебаний — альфвеновскую волну. Потенциальное приближение, принятое в разд. 3—7 § 3 $A_\parallel \cong 0$, соответствует неравенству $\omega \ll k_\parallel c_A$. При $\omega \gtrsim k_\parallel c_A$ необходимо пользоваться полной системой. Из условия $\omega \sim k_\parallel c_A$ можно найти характерную область, где важно учитывать непотенциальность. Действительно, при $\omega \gtrsim k_\parallel c_A$ нельзя пренебрегать жесткостью силовых линий при их искривлении, но так как, с другой стороны, во всех рассмотренных неустойчивостях $\omega \sim \omega^*$, то $\omega^* \sim \omega > k_\parallel c_A$; отсюда находим, что непотенциальность важна при

$$x < \frac{\rho_i}{\theta}\sqrt{\beta}. \quad (3.108)$$

Из условия равновесия (см. разд. 1 § 2) $\beta \leqslant \frac{R}{a}\theta^2$. Поэтому непо-

тенциальность начинает сказываться при $x \sim \rho_i$, но при этом нарушается само гидродинамическое приближение, и поперечное движение ионов нужно описывать кинетически, как это было сделано в п. 4 § 3.

Заметим, что единственная диссипативная неустойчивость, существенная при $x \sim \rho_i$,— это дрейфово-диссипативная неустойчивость. Квазиклассическое уравнение, обобщающее уравнение (3.60) на непотенциальный случай, можно получить, учтя уравнение для векторного потенциала [второе уравнение (3.36)]. В результате получим

$$\frac{T_e}{T_i}(1-e^{-z}I_0)\left(1-\frac{\omega_i^*}{\omega}\right)+i\frac{k_\parallel^2 v_e^2/\omega\nu_e}{1+i\dfrac{k_\parallel^2 v_e^2}{\omega\nu_e}}\left(1-\frac{\omega_e^*}{\omega}\right)\times$$

$$\times\left[1-\frac{\omega^2}{k_\parallel^2 c_A^2}\left(1-\frac{\omega_i^*}{\omega}\right)\frac{1-e^{-z}I_0}{z}\right]=0. \qquad (3.109)$$

Учитывая, что $x < \rho_i$, для простоты сразу рассмотрим случай $x \ll \rho_i$, тогда из уравнения (3.109) находим

$$\omega = i\frac{k_\parallel^2 v_e^2}{\nu_e\sqrt{2\pi z}}\cdot\frac{1}{1-i\dfrac{k_\parallel^2 v_e^2}{\omega_e^* v_e}\left(1+\dfrac{T_e}{T_i}-\dfrac{T_i}{T_e}\beta/\theta^2\right)}. \qquad (3.110)$$

Сравнивая выражения (3.110) с (3.62), видим, что непотенциальность приводит к несущественному изменению области локализации.

Из бесстолкновительных дрейфовых неустойчивостей непотенциальность в первую очередь должна сказываться на электронной температурной неустойчивости, обладающей наименьшей локализацией. Однако если выполнено условие $\beta \ll \theta^2$, то, как можно показать, для нее достаточно потенциальное приближение.

Для температурной дрейфовой неустойчивости с областью локализации $x \sim \rho_i/\theta$ условие (3.108) не выполняется, поэтому при ее рассмотрении тоже можно считать колебания потенциальными. Точнее говоря, непотенциальность захватывает лишь самую «сердцевинку» возмущения около особой точки шириной $x \sim \rho_i/\theta\sqrt{\beta}$.

Таким образом, для коротковолновых дрейфовых колебаний ($\lambda \ll a$) влияние непотенциальности в системах с достаточно большим широм $\theta^2 > \beta$ оказывается несущественным.

Однако возможны еще непотенциальные неустойчивости первых мод ($m \sim 1$). В идеальной гидродинамике это винтовая неустойчивость (см. п. 2, § 2) В § 2 было показано, что при достаточно плавном распределении тока и большом коэффициенте запаса q эта гидромагнитная неустойчивость не развивается. Но

если учесть диссипацию (или инерцию электронов), которая ликвидирует вмороженность плазмы, то это приводит к тому, что при определенных условиях неустойчивость первых мод все же может развиваться, хотя и с гораздо меньшим инкрементом. Это так называемая tearing mode [20]. Она может захватывать значительную часть плазменного шнура и поэтому существенно зависит от распределения тока по сечению и от наличия кожуха.

Перейдем к получению дисперсионного уравнения для tearing mode. Как показано в § 3, диссипативные процессы и инерция сказываются только в узкой области около точки $k_\parallel = 0$ ($F = 0$). В остальной части справедливо приближение идеальной магнитной гидродинамики, а векторный потенциал удовлетворяет уравнению (3.32):

$$\frac{1}{\mu}(\mu\psi')' = \left(m^2 - \frac{G}{F^2} + \frac{1}{\mu F}(\mu F_1)'\right)\psi,$$

где

$$\frac{1}{\mu}(\mu F_1)' \sim \frac{dj_\parallel}{dr}. \qquad (3.111)$$

Здесь и ниже будут использованы безразмерные переменные, введенные в § 3.

Решение уравнения (3.111), удовлетворяющее необходимым граничным условиям [обращение в нуль векторного потенциала в центре ($r = 0$) и на кожухе ($r = b$)], требуется сшить с решением уравнений (3.30), справедливых вблизи особой точки $F(\mu_0) = 0$. Выпишем их здесь, сохранив только те члены, которые важны для дальнейшего:

$$\frac{1}{m^2}\psi'' = \psi\left(\frac{1}{\mu_0^2} + \frac{\tilde{p}}{\underset{\sim}{\eta} m^2}\right) + \frac{1}{m^2} W \frac{F}{\underset{\sim}{\eta}};$$

$$\frac{1}{m^2} W'' = \left(\frac{1}{\mu_0^2} + \frac{F^2 S^2}{\underset{\sim}{p}\,\underset{\sim}{\eta}}\right) + \psi S^2 \frac{F}{\underset{\sim}{\eta}}. \qquad (3.112)$$

Так как ширина особой области, где неприменимо уравнение (3.111), гораздо меньше характерных размеров плазмы, то в ее пределах можно считать макроскопические величины постоянными. Кроме того, для простоты считаем $\eta' = 0$, и предполагаем $\omega \gg \omega^*$. Влияние дрейфовой частоты будет рассмотрено позже. В уравнениях (3.112), кроме того, опущена производная от продольного тока $dj_\parallel/dr$, как можно показать [21], она не дает вклад в последующие выражения.

Точный вид $\psi(\mu)$ зависит от конкретного вида функций H_0, H_ϑ. В дальнейшем понадобится лишь выражение для разности

логарифмических производных

$$\Delta^e = \frac{1}{\psi_2}\cdot\frac{d\psi_2}{d\mu} - \frac{1}{\psi_1}\cdot\frac{d\psi_1}{d\mu}\Big|_{\mu=\mu_0}, \qquad (3.113)$$

которую будем считать заданной. Ее можно найти, если известны H_0, H_Φ. Хотя по отдельности производные $\frac{1}{\psi}\cdot\frac{d\psi}{d\mu}$ логарифмически расходятся, их разность при $\mu \to \mu_0$ остается конечной.

Далее необходимо решить систему (3.112) при условии, что $W \to 0$ при $\mu \to \pm\infty$, а ψ переходит в решение уравнения (3.111). Фактически мы будем сшивать Δ^i для внутренней области с Δ^e, (3.113). Выражение для Δ^i можно получить из первого уравнения (3.112):

$$\Delta^i = \frac{\psi'(\infty) - \psi'(-\infty)}{\psi} = \frac{1}{\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\tilde{\eta}}(\tilde{p}\psi + WF)\,d\mu. \qquad (3.114)$$

Около точки $\mu = \mu_0$, ψ приближенно можно считать постоянным. Тогда второе из уравнений нетрудно решить, например, путем разложения по функциям Эрмита или переходя в k-представление [21]. Полученное выражение для W следует подставить в равенство (3.114). Произведя интегрирование [24], можно получить

$$\Delta^i = 3\frac{\tilde{p}}{\tilde{\eta}}\,[\tilde{p}\tilde{\eta}/4m^2S^2(F')^2]^{1/4}. \qquad (3.115)$$

Приравнивая $\Delta^i = \Delta^e$, получаем дисперсионное уравнение, из которого находим

$$\tilde{p} = \left(\frac{\Delta^e}{3}\right)^{4/3}(2mSF')^{2/3}. \qquad (3.116)$$

Характерная область локализации этой неустойчивости оказывается порядка

$$\Delta x \sim a\left(\frac{\tilde{p}}{4m^2S^2(F')^2}\right)^{1/4}. \qquad (3.117)$$

Как следует из выражения для частоты (3.116), рассматриваемая неустойчивость может развиваться только при $\Delta^e > 0$.

Этот результат справедлив лишь для достаточно малых $m \sim 1$, так как с ростом m начинают играть роль отброшенные ранее члены в уравнениях (3.112).

При учете эффектов конечного ларморовского радиуса дисперсионное уравнение (3.116) несколько усложняется [21]:

$$\Delta^i = \frac{3}{\tilde{\eta}}\left[\frac{\tilde{p}\tilde{\eta}(\tilde{p}+i\tilde{\omega}_i^*)(\tilde{p}+i\tilde{\omega}_e^*)^3\tilde{\eta}}{4m^2S^2(F')^2}\right]^{1/4}. \qquad (3.118)$$

Отсюда при $\omega^* \to \infty$ находим

$$\tilde{p} \cong -i\tilde{\omega}_e^* + \frac{1}{(2\tilde{\omega}_e^{*2})^{1/3}} \left(\frac{\tilde{\eta}}{3}\Delta^i\right)^{4/3} (4m^2S^2(F')^2)^{1/3}, \qquad (3.119)$$

т. е. колебания приобретают осцилляторный характер, причем для них $\gamma < \omega^*$.

9. Неустойчивость плотной плазмы

В плотной плазме, т. е. при достаточно малой длине пробега λ_e, ширина области, в которой температура электронов не успевает выравниваться вдоль магнитного поля, увеличивается, и в дрейфовых колебаниях следует учитывать возмущение электронной температуры T_e. Как показано в работе [33], этот эффект приводит к возможности развития неустойчивости неоднородной плазмы, проявляющейся в образовании вытянутых вдоль магнитного поля «нитей» повышенной и пониженной температуры. Как увидим ниже (см. § 10), эта неустойчивость несущественна, но для полноты картины мы ее рассмотрим.

Предположим для простоты, что градиент температуры в равновесном состоянии отсутствует (наличие градиента температуры не приводит к существенно новым эффектам). Поскольку в рассматриваемой неустойчивости поперечная инерция ионов не играет никакой роли, то ею пренебрежем. Тогда из условия $\mathrm{div}\,\mathbf{j}' = 0$ и равенства $\mathbf{j}'_\perp = 0$ следует, что продольные скорости ионов $v^i_\parallel$ и электронов $v^e_\parallel$ совпадают ($j'_\parallel = 0$), т. е. член с силой трения в продольной компоненте уравнения движения для электронов равен нулю. Таким образом, пренебрегая инерцией электронов, можно записать это уравнение в виде

$$\mathbf{h}\nabla p_e = -enE_\parallel - sn_0\,\mathbf{h}\nabla T_e, \qquad (3.120)$$

где второе слагаемое справа представляет собой термосилу, причем $s = 0{,}71$ [18].

Для потенциальных колебаний $E_\parallel = -(\mathbf{h}\nabla)\varphi$. Интегрируя выражение (3.120) вдоль силовой линии, получаем в линейном приближении

$$T_0 n' + (1+s)T'_e n_0 - en_0\varphi = 0, \qquad (3.121)$$

где n' — возмущение плотности; T'_e — возмущение электронной температуры.

Ширина локализации рассматриваемой неустойчивости, вообще говоря, не превышает максимальной ширины всех дрейфовых неустойчивостей ρ_i/θ, но практически, как увидим ниже, она значительно меньше. Кроме того, ее инкремент и частота не превышают $k_\parallel v_i \ll \omega^*$. Поэтому в линеаризованном уравнении непре-

рывности для ионов или электронов (в данном случае они совпадают)

$$-i\omega\frac{n'}{n_0}-i\omega^*\frac{e\varphi}{T_0}+ik_\parallel v_\parallel=0 \qquad (3.122)$$

первое и второе слагаемое пренебрежимо малы, так что в нулевом приближении по ω/ω^* имеем $\varphi=0$, т. е., согласно равенству (3.121),

$$(1+s)n_0T_e'+T_0n'=0. \qquad (3.123)$$

Для полного описания колебаний нам необходимо привлечь уравнение движения для ионов

$$-i\omega m_in_0v_\parallel=-ik_\parallel(n_0T_e'+n_0T_i'+2T_0n') \qquad (3.124)$$

и уравнения теплового баланса для электронов и ионов

$$-i\omega T_e'=-\frac{2}{3}T_0ik_\parallel v_\parallel-\chi_ek_\parallel^2T_e'-\nu(T_e'-T_i'); \qquad (3.125)$$

$$-i\omega T_i'=-\frac{2}{3}T_0ik_\parallel v_\parallel-\nu(T_i'-T_e'), \qquad (3.126)$$

где член с $\nu\sim\nu_e\frac{m_e}{m_i}$ учитывает теплообмен между электронами и ионами. Мы пренебрегли здесь продольной теплопроводностью ионов, поскольку $\chi_i\ll\chi_e$.

Из уравнений (3.123)—(3.126) получаем

$$\omega^2=-\frac{4s}{3}k_\parallel^2v_i^2 \text{ при } \chi_ek_\parallel^2\ll k_\parallel v_i; \qquad (3.127)$$

$$\omega=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}k_\parallel v_i+i\frac{1}{2}\left(\frac{2(2s+1)}{3}\frac{v_i^2}{\chi_e}-\nu\right) \text{ при } \chi_ek_\parallel^2\gg k_\parallel v_i. \qquad (3.128)$$

Подстановка численных значений для χ_e и ν из работы [18] показывает, что частота (3.128) соответствует затухающим колебаниям, так что неустойчивость имеет место только в области $\chi_ek_\parallel^2<k_\parallel v_i$, т. е.

$$\lambda_ek_\parallel<\sqrt{\frac{m_e}{m_i}}. \qquad (3.129)$$

Ширина локализации этой области x может быть найдена из соотношения (3.129):

$$x=\frac{\rho_i}{\theta}\frac{1}{mS}\sqrt{\frac{m_e}{m_i}}, \qquad (3.130)$$

где m — азимутальное число; $S=\lambda_e\rho_i/a^2$ Как видно, при $S\gg\sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$ область локализации данной неустойчивости много меньше ρ_i/θ, т. е. предположение $\omega\ll\omega^*$ оправдано.

Согласно выражению (3.127), инкремент нарастания малых возмущений не превышает величины $v_i^2/\chi_e \sim \frac{m_e}{m_i}\nu_e$.

Заметим еще, что рассмотренная в п. 6 § 3 температурная дрейфовая неустойчивость существует, несколько видоизменяясь, и в плотной плазме, когда свободный пробег частиц мал ($k_\parallel \lambda < 1$) [34].

При получении дисперсионного уравнения (в случае $k_\parallel \lambda < 1$) будем исходить из уравнений двухжидкостной гидродинамики [18]. Возмущения с $k_\parallel v_i \lesssim \omega^*$ (т. е. $x \lesssim \rho_i/\theta$) при не слишком большом шире ($\theta \ll 1$) имеют характерную область локализации x гораздо больше ρ_i. При этом можно пренебречь инерцией ионов в уравнениях для поперечных компонент скоростей, в результате для каждого сорта частиц получаем

$$\mathbf{v}_\perp^i = \frac{c}{H}\left[\mathbf{h}, \left(\nabla\varphi + \frac{\nabla p_i}{en}\right)\right]; \quad \mathbf{v}_\perp^e = \frac{c}{H}\left[\mathbf{h}, \left(\nabla\varphi - \frac{\nabla p_e}{en}\right)\right], \qquad (3.131)$$

где

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{H}}{H}.$$

Подставляя выражение для $v_\perp^i$ в ионные уравнения непрерывности, продольного движения и теплопроводности, получаем следующую систему:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{c}{H}[\mathbf{h}\nabla\varphi]\nabla n + \mathbf{h}\nabla n v_\parallel^i = 0; \qquad (3.132)$$

$$Mn\left(\frac{\partial v_\parallel^i}{\partial t} + v_\parallel^i \mathbf{h}\nabla v_\parallel^i + \frac{c}{H}[\mathbf{h}\nabla\varphi]\nabla v_\parallel^i\right) = -\mathbf{h}\nabla p_i - en\mathbf{h}\nabla\varphi; \qquad (3.133)$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} + \frac{c}{H}[\mathbf{h}\nabla\varphi]\nabla T_i + v_\parallel^i \mathbf{h}\nabla T_i + \frac{2}{3}T_i \mathbf{h}\nabla v_\parallel^i = 0. \qquad (3.134)$$

В уравнении (3.133) отсутствует член с трением $\sigma j_\parallel$, поскольку из уравнения квазинейтральности $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$, выражений (3.131) и принятого нами предположения о равенстве нулю равновесного тока следует $j_\parallel = 0$. Кроме того, в уравнении (3.133) опущен член с продольной вязкостью ионов, а в уравнении (3.134) — член с продольной теплопроводностью, что допустимо при $\omega \gg k_\parallel^2 \chi_\parallel^i$ (ω — частота колебаний; $\chi_\parallel^i$ — продольная температуропроводность ионов [23]). Отметим, что в интересующем нас случае колебаний с $\omega \sim k_\parallel v_i$ это неравенство совпадает с условием применимости столкновительной гидродинамики $k_\parallel \lambda < 1$. К системе (3.132)—(3.134) необходимо добавить еще уравнения для электронов, в качестве которых примем следующие:

$$-\mathbf{h}\nabla p_e + en\mathbf{h}\nabla\varphi = 0; \quad T_e = \text{const}. \qquad (3.135)$$

Здесь предполагается, что электроны успевают принять больцмановское распределение вдоль силовых линий. Условием этого является неравенство $\omega \ll \frac{k_\parallel^2 v_e^2}{\nu_e}$, что при $\omega \sim k_\parallel v_i$ можно переписать как $k\lambda > \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}$. Таким образом, наше рассмотрение справедливо при $1 > k_\parallel \lambda > \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}$.

Линеаризуя систему (3.132)—(3.134) и выбирая возмущенные величины в виде $\varphi = \varphi(x) e^{-i\omega t + ik_y y + ik_z z}$, получаем дисперсионное соотношение

$$1 - \frac{\overset{*}{\omega}_{ne}}{\omega} - \frac{k_\parallel^2 T_e}{m_i \omega^2}\left(1 - \frac{\overset{*}{\omega}_{pi}}{\omega}\right) - \frac{5}{3}\frac{k_\parallel^2 T_i}{m_i \omega^2}\left(1 - \frac{\overset{*}{\omega}_{ne}}{\omega}\right) = 0, \quad (3.136)$$

где

$$\overset{*}{\omega}_{ne} = -\frac{ck_y T_e}{eHn}\frac{dn}{dx}; \quad \overset{*}{\omega}_{pi} = \frac{ck_y}{eHn}\frac{dp_i}{dx}; \quad k_\parallel = (\mathbf{h}\mathbf{k}).$$

Из этого уравнения следует, что неустойчивость существует только при $k_\parallel v_i \lesssim \overset{*}{\omega}_{pi}$, причем $\omega \lesssim \overset{*}{\omega}_{pi}$. Рассматривая для простоты случай $k_\parallel v_i \ll \overset{*}{\omega}_{pi}$, $\omega \ll \overset{*}{\omega}_{pi}$, получаем из соотношения (3.136) следующее выражение для частоты:

$$\omega^2 = \frac{k_\parallel^* T_i}{m_i}\left(\frac{2}{3} - \eta\right),$$

где

$$\eta = \frac{d \ln T_i}{d \ln n}. \quad (3.137)$$

Таким образом, колебания раскачиваются, если $\eta > \frac{2}{3}$. Можно найти, что максимальный инкремент оказывается порядка

$$\gamma \sim \omega^* \sim k_\parallel v_i. \quad (3.138)$$

Отсюда следует, что, как и в случае температурной дрейфовой неустойчивости бесстолкновительной плазмы, характерная область локализации по порядку величины равна

$$x \sim \rho_i/\theta. \quad (3.139)$$

Используя оценку (3.138), находим условие применимости предыдущего рассмотрения $k_\parallel \lambda < 1$, переписанное через параметр столкновительности $S = \frac{\lambda \rho_i}{a^2}$: $S \ll 1$.

§ 4. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НА ЗАПЕРТЫХ ЧАСТИЦАХ

1. Бесстолкновительная неустойчивость

Всюду выше при исследовании диссипативных неустойчивостей тороидальность системы была практически несущественной. Теперь перейдем к исследованию неустойчивостей, связанных именно с тороидальностью. Рассмотрим сначала случай бесстолкновительной плазмы и предположим, что колебания являются потенциальными, т. е. можно пренебречь искажением магнитного поля. При этом кинетическое уравнение для малых колебаний имеет вид

$$\frac{\partial f'}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla f' - \frac{e}{m}\nabla\varphi_0 \frac{\partial f'}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e}{mc}[\mathbf{v}\,\mathbf{H}]\frac{\partial f'}{\partial \mathbf{v}} = \frac{e}{m}\nabla\varphi' \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}. \tag{4.1}$$

Здесь f — равновесная (невозмущенная) функция распределения, удовлетворяющая уравнению

$$\mathbf{v}\nabla f - \frac{e}{m}\nabla\varphi_0 \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e}{mc}[\mathbf{v}\,\mathbf{H}]\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \tag{4.2}$$

где φ_0 — невозмущенный потенциал электрического поля; φ' — его возмущение; $\mathbf{H}$ — невозмущенное магнитное поле; f' — возмущение функции распределения. В равновесном состоянии φ_0 есть функция магнитной поверхности, т. е. переменной r. Переходя в движущуюся вдоль ζ систему координат, можно добиться, чтобы $\nabla\varphi_0$ обратился в нуль. Для рассматриваемых здесь нами локальных возмущений можно считать, что переносная скорость не зависит от r и, следовательно, член с $\nabla\varphi_0$ в уравнениях (4.1), (4.2) можно опустить.

Далее предположим, что равновесная функция распределения f близка к максвелловской f_0 с зависящими от r плотностью n и температурой T. Тогда с точностью до малых величин первого порядка по Ω_H^{-1} получаем из уравнения (4.2)

$$f = f_0 - \frac{mc}{eH}[\mathbf{hv}]\nabla f_0, \tag{4.3}$$

где $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$.

Из уравнения (4.1) находим

$$f' = \frac{e}{m}\int_{-\infty}^{t} \nabla\varphi' \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\, dt', \tag{4.4}$$

где интегрирование проводится по невозмущенной траектории $\mathbf{r}' = \mathbf{r}(t)$, проходящей в момент t через точку наблюдения $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$.

Закон движения заряженной частицы по траектории задается выражением

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0(t') + \mathbf{n}\frac{v_\perp}{\Omega_H}\cos\alpha' + \mathbf{b}\frac{v_\perp}{\Omega_H}\sin\alpha', \qquad (4.5)$$

где $\mathbf{r}_0(t)$ — траектория ведущего центра; $\mathbf{n}$ — нормаль; $\mathbf{b}$ — бинормаль к силовой линии магнитного поля; $v_\perp$ — поперечная компонента скорости; $\alpha' = \alpha_0 - \Omega_H(t' - t_0)$ — азимут в пространстве скоростей. Так как мы будем исследовать колебания с частотой, значительно ниже циклотронной, то необходимо произвести усреднение по быстрым колебаниям с частотой Ω_H под знаком интеграла (4.4). Тогда получим

$$f' = \frac{e}{m}\int_{-\infty}^{t} F'\,\nabla\varphi'\,\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\,dt'. \qquad (4.4а)$$

Здесь F' — оператор, действующий на φ' и в $\mathbf{k}$-представлении равный просто $F' = J_0\left(\frac{k_\perp' v_\perp}{\Omega n}\right)$, где J_0 — функция Бесселя нулевого индекса, а интегрирование в выражении (4.4а) проводится по траектории ведущего центра.

Так как мы предположили, что функция f_0 близка к максвелловской, то, согласно формуле (4.3), имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{m\mathbf{v}}{T}f + \frac{mc}{eH}[\mathbf{h}\nabla f_0]. \qquad (4.6)$$

В действительности за счет магнитного дрейфа частиц функция f_0 несколько отличается от максвелловской, однако при $\rho_i/a \ll 1$ этим отклонением можно пренебречь.

Учитывая, что f не зависит от t', $\mathbf{v}'\nabla\varphi' = \frac{d\varphi'}{dt'} - \frac{\partial\varphi'}{\partial t'}$ и выбирая зависимость φ' от t' в виде $\exp(-i\omega t')$, получим

$$f' = -\frac{e\varphi'}{T}f + \frac{e}{m}\int_{-\infty}^{t} F'\left\{-\frac{i\omega m}{T}f\varphi' + \frac{mc}{eH}[\mathbf{h}\nabla f_0]\nabla\varphi'\right\}dt'. \qquad (4.7)$$

В первом слагаемом пренебрежено слабой зависимостью T от t' из-за отклонения ведущего центра от магнитной поверхности при дрейфовом движении (учет этого эффекта привел бы к замене T на некоторое среднее значение по близким магнитным поверхностям).

В силу периодичности по ζ и ϑ функцию φ' и аналогично f' можно представить в виде

$$\varphi' = \exp(-i\omega t + im\vartheta - il\zeta)\,\varphi(r, \vartheta), \qquad (4.8)$$

где $\varphi(r, \vartheta)$ — периодическая функция ϑ, на которую можно наложить требование, чтобы она имела минимальное число узлов по ϑ. Выделяя аналогичный (4.8) экспоненциальный множитель

в f' и деля на него, получаем после интегрирования по $\mathbf{v}$ выражение для возмущения плотности:

$$n' = -\frac{e\varphi}{T} n + \int\limits_{-\infty}^{0} FF' \exp\left[-i\omega t' + im(\vartheta' - \vartheta) - il(\zeta' - \zeta)\right] \times$$

$$\times \left\{ -\frac{i\omega e}{T} f_0 \varphi + \frac{c}{\sqrt{g} H} \left[i(mh_3 + lh_2)\varphi + h_3 \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta'} \right] \frac{\partial f_0}{\partial r} \right\} dt' d\mathbf{v}. \quad (4.9)$$

Здесь n — невозмущенная плотность; второй оператор F под интегралом возник при усреднении по азимуту α в пространстве скоростей; h_2, h_3 — ковариантные компоненты вектора $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$. При интегрировании по траектории f_0 и T с точностью до малых порядка ρ_i/a можно считать постоянными. Таким образом, выражение для плотности (4.9) отличается от соответствующего выражения в цилиндрической геометрии только более сложным характером движения частиц по невозмущенным траекториям.

Из условия квазинейтральности, т. е. равенства возмущений плотности электронов и ионов, находим дисперсионное уравнение для частоты ω малых колебаний

$$\left(\frac{1}{T_e} + \frac{1}{T_i}\right) n\varphi = \sum_{j=i,\,e} \int \int\limits_{-\infty}^{0} F_j F_j' e^{-i\omega t' + im(\vartheta_j' - \vartheta) - il(\zeta_j' - \zeta)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{i\omega}{T_j} f_{0j} \varphi' - \frac{c}{H\sqrt{g}\, e_j} \left[i(mh_3 + lh_2)\varphi + h_3 \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta'} \right] \frac{\partial f_0}{\partial r} \right\} dt' d\mathbf{v}. \quad (4.10)$$

Здесь суммирование в правой части проводится по электронам и ионам, причем $e_i = e$, $e_e = -e$. Выражение (4.10) представляет собой однородное интегральное уравнение, а ω является его собственным значением. Чтобы записать уравнение (4.10) в явном виде, необходимо привлечь рассмотренные в § 1 выражения для дрейфовых траекторий частиц в торе.

Как было установлено в § 1, наиболее существенной особенностью движения частиц в торе является наличие запертых частиц. Присутствие запертых частиц приводит к появлению возможности развития неустойчивости желобкового типа на захваченных частицах. В самом деле, запертые частицы, находящиеся в некоторой силовой трубке между магнитными пробками, совершенно изолированы от других областей в плазме, и, следовательно, они вполне аналогичны захваченным частицам в обычном пробкотроне. Так как они совершают, вообще говоря, неблагоприятный магнитный дрейф в убывающем к периферии магнитном поле, то, как и в обычной магнитной ловушке, на малом возмущении желобкового типа, должна происходить такая поляризация зарядов, при которой начальное возмущение нарастает. Все отличие от открытого пробкотрона состоит в том, что в тороидальной геометрии желобки захваченных частиц погружены в плазму пролетных частиц, которая из-за своей большой про-

дольной диэлектрической проницаемости $\varepsilon = 1 + 8\pi ne^2/k_\parallel^2 T \gg 1$ в значительной степени компенсирует заряды запертых частиц. Но так как $\varepsilon \neq \infty$, то полной компенсации не происходит, и, следовательно, в плазме должна развиваться сильно замедленная желобковая неустойчивость на запертых частицах.

Для исследования неустойчивости обратимся к уравнению для потенциала (4.10). Так как в отношении макроскопических эффектов наиболее опасны крупномасштабные возмущения, то предположим, что локализация возмущения по r значительно больше Δr — амплитуды колебаний частиц по радиусу при их невозмущенном дрейфе. В этом приближении в правой части уравнения (4.10) можно пренебречь зависимостью φ от r. Точнее говоря, под $\varphi(r)$ можно подразумевать функцию, имеющую достаточно узкую локализацию по сравнению с a, так что $\omega = \omega(r)$ представляет собой некоторое локальное значение для собственной частоты, но при этом ширина локализации $\varphi(r)$ значительно превосходит Δr. В этом приближении $F_i = F_j' = 1$.

Далее, в выражении (4.10) в множителе, стоящем под интегралом перед $\frac{df_0}{dr}$, пренебрежем малыми членами порядка a/R_0. Кроме того, предполагая, что $m \gg 1$, пренебрежем и производной $\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta'}$ по сравнению с $m\varphi$. В этом приближении уравнение (4.10) для случая $T_i = T_e$ принимает вид

$$2n\varphi = -\sum_j \int_{-\infty}^{0} e^{-i\omega t' + im(\vartheta_j' - \vartheta) - il(\zeta_j' - \zeta)} \left(i\omega f_{0j} - \right.$$
$$\left. - i\frac{cTm}{e_j Hr} \cdot \frac{df_{0j}}{dr} \right) \varphi' dt' d\mathbf{v}. \qquad (4.11)$$

Рассмотрим сначала интеграл по t' для пролетных частиц. Для этих частиц $\vartheta' - \vartheta \cong v_\parallel t'/Rq$, $\zeta' - \zeta \cong q(\vartheta' - \vartheta)$ и, следовательно, интеграл по t' дает множитель вида $i\{\omega - (m - lq)v_\parallel/qR\}^{-1}$. Для рассматриваемых нами здесь колебаний дрейфового типа с частотой $\omega \sim \omega_* \sim m\rho_i v_i/a^2$ этот множитель при $m - lq \sim 1$ даже для ионов значительно меньше ω, и, следовательно, вкладом пролетных частиц в интеграл (4.11) можно пренебречь по сравнению с 2φ в левой части.

При вычислении интеграла по t' для запертых частиц полагаем $\zeta_j' - \zeta = q(\vartheta_j' - \vartheta) + \xi'$. Тогда в экспоненте перед $\vartheta_j' - \vartheta$ будет стоять множитель $(m - lq)$. Число m пока не фиксировано. Очевидно, что для любого заданного l можно подобрать такое m, чтобы разность $m - lq$ была меньше одной второй. Такой выбор m и означает, что в качестве φ берется функция, имеющая минимальное число узлов по ϑ. Рассмотрим сначала более простой случай: $m - lq \ll 1$. Тогда членом $(m - lq)$ $(\vartheta' - \vartheta)$, явля-

ющимся для захваченных частиц периодической функцией t' порядка $m - lq$, можно пренебречь. Кроме того, пренебрегая величиной $l\xi$ за один период колебаний, произведем усреднение ξ_j' по периоду колебаний τ_j и положим $\xi_j' = v_j t'$. Тогда уравнение (4.11) упрощается

$$2n\varphi = \sum_j \int \frac{1}{\omega + v_{\zeta j} l} \left(\omega f_{0j} - \frac{mcT}{re_j H} \cdot \frac{df_{0j}}{dr} \right) \int_{-\tau}^{0} \varphi' \frac{dt'}{\tau} d\mathbf{v}. \quad (4.12)$$

Здесь вместо интегрирования по t' можно перейти к интегрированию по углу ϑ', полагая с точностью до малых порядка $\sqrt{\varepsilon} = \sqrt{r/R}$ $dt'/\tau = (2\chi^2 - 1 - \cos\vartheta')^{-1/2} d\vartheta'$. Далее, $d\mathbf{v}$ для запертых частиц при $\varepsilon \ll 1$ имеет вид $d\mathbf{v} = 2\pi v^2 dv d\gamma_\vartheta$, где $\gamma_\vartheta = \pi/2 - \psi$ — угол в пространстве скоростей в точке ϑ. В силу сохранения поперечного адиабатического инварианта имеем

$$v_\perp^2/v^2 = \cos^2\gamma_\vartheta = \cos^2\gamma\,(1 + \varepsilon(1 + \cos\vartheta)), \quad (4.13)$$

где γ — введенный нами ранее угол в пространстве скоростей в точке $\vartheta = \pi$, т. е. $\gamma = \gamma_\pi$. Согласно соотношению (4.13), имеем при малых ε $\gamma_\vartheta^2 = \gamma^2 - \varepsilon(1 + \cos\vartheta)$. Отсюда получаем

$$d\gamma_\vartheta = \frac{\gamma d\gamma}{\gamma_\vartheta} \frac{\sqrt{\varepsilon}\, d\chi^2}{\sqrt{2\chi^2 - 1 - \cos\vartheta}}. \quad (4.14)$$

Подставляя полученное выражение для dt', $d\gamma_\vartheta$ и выражение (1.50) для τ в уравнение (4.12), получаем интегральное уравнение для потенциала φ

$$\varphi(\vartheta) = \sum_j \int \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon} v^2 dv}{\sqrt{2}\, n(\omega + v_{\zeta j} l)} \left(\omega f_{0j} - \frac{mcT}{re_j H} \cdot \frac{df_{0j}}{dr} \right) \times$$

$$\times \int_{\frac{1+\cos\vartheta}{2}}^{1} \frac{d\chi^2}{K(\chi)\sqrt{2\chi^2 - 1 - \cos\vartheta}} \int_{\vartheta_0}^{\pi} \frac{\varphi(\vartheta')\, d\vartheta'}{\sqrt{2\chi^2 - 1 - \cos\vartheta}}, \quad (4.15)$$

где $\vartheta_0 = \arccos(2\chi^2 - 1)$.

Для рассматриваемого нами случая равных температур скорости дрейфа электронов и ионов $v_{\zeta e}$, $v_{\zeta i}$ при одной и той же энергии $m_j v^2/2$ просто противоположны по знаку и равны по абсолютной величине. Это обстоятельство приводит к существенному упрощению уравнения. Допуская для простоты, что $T = \text{const}$, запишем его в виде

$$\varphi(\vartheta) = \int \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon} v^2 dv f_{0i} (\omega^2 - \omega^* l v_{\zeta. i})}{\sqrt{2}\, n(\omega^2 - l^2 v_{\zeta. i}^2)} \int_{\frac{1+\cos\vartheta}{2}}^{1} \frac{d\chi^2}{K(\chi)\sqrt{2\chi^2 - 1\cos\vartheta}} \times$$

$$\times \int_{\vartheta_0}^{\pi} \frac{\varphi(\vartheta')\,d\vartheta'}{\sqrt{2\chi^2 - 1 - \cos\vartheta'}}, \qquad (4.16)$$

где $\omega^* = -\dfrac{mcT}{reHn} \cdot \dfrac{dn}{dr}$.

Так как выражение (4.16) зависит от квадрата ω, то при наличии неустойчивости естественно считать ω^2 действительным, т. е. $\omega = i\gamma$. При этом знаменатель $\omega^2 - l^2 v_{\zeta i}^2 = -(\nu^2 + l^2 v_{\zeta i}^2)$ становится монотонно возрастающей функцией γ. Вспомним теперь, что v_ζ является малой величиной порядка ε. Так как выражение (4.16) содержит справа малый множитель $\sqrt{\varepsilon}$, то оно может стать порядка единицы только в том случае, если знаменатель $\gamma^2 + l^2 v_{\zeta i}^2$ будет достаточно мал. При этом можно пренебречь γ^2 в числителе по сравнению с $\omega^* l v_{\zeta i}$. Таким образом, по порядку величины имеем из уравнения (4.16)

$$1 \sim \sqrt{\varepsilon}\,\varepsilon\omega^{*2}(\gamma^2 + \varepsilon^2\omega^{*2})^{-1}.$$

Отсюда видно, что $\gamma^2 \sim \omega^{*2}\,\varepsilon^{3/2}$. Пренебрегая величиной $l^2 v_\zeta^2 \sim \varepsilon^2\omega^{*2}$ по сравнению с γ^2 в знаменателе и производя интегрирование по v^2, приводим (4.16) к виду

$$\lambda\varphi(\vartheta) = \frac{\pi}{4} \int_{\frac{1+\cos\vartheta}{2}}^{1} \frac{d\chi^2 G(\chi)}{K(\chi)\sqrt{2\chi^2 - 1 - \cos\vartheta}} \int_{\vartheta_0}^{\pi} \frac{\varphi(\vartheta')\,d\vartheta'}{\sqrt{2\chi^2 - 1 - \cos\vartheta'}}, \qquad (4.17)$$

где $G(\chi)$ — функция, определенная соотношением (1.57) и возникшая в результате подстановки явного значения для v_ζ, $\lambda = \gamma^2\sqrt{2}\pi/3\sqrt{\varepsilon}\,\omega_m\omega^*$; $\omega_m = 2\,lq\varepsilon cT/eHr^2 \cong 2mcT/eHrR_0$. Так как v_ζ пропорционально v^2, то в случае $\nabla T \neq 0$ под ω^* следует подразумевать $\omega_p^* = \omega^* \dfrac{d\ln p}{d\ln n}$. Для решения уравнения (4.17) удобно перейти к фурье-представлению, разлагая $\varphi(\vartheta)$ в ряд по $\cos\vartheta$. Для этого положим

$$\varphi(\vartheta) = \sum_s e^{-is\vartheta}\varphi_s, \qquad (4.18)$$

где φ_s и φ_{-s} — действительные коэффициенты. Подставляя это выражение в уравнение (4.17), умножая его затем на $e^{is\vartheta}$ и интегрируя по ϑ, получаем

$$\lambda(1 + \delta_{s0})\varphi_s = \sum_{s'} F_{ss'}\varphi_{s'}, \qquad (4.19)$$

где

$$F_{ss'} = F_{ss'}^1 + \frac{2q'r}{q} F_{ss'}^2;$$

$$F^{j}_{ss'} = \int_0^1 \frac{G_j \Pi_s \Pi_{s'}}{K(\chi)}\, d\chi; \tag{4.20}$$

$$\Pi_s(\chi) = \int_{\vartheta_0}^{\pi} \frac{\cos s\vartheta d\vartheta}{\sqrt{2\chi^2 - 1 - \cos\vartheta}}. \tag{4.21}$$

Собственное значение λ находится из условия обращения в нуль детерминанта матрицы, соответствующей системе уравнений (4.19). Значения матричных элементов $F^{j}_{ss'}$ для $ss' \leqslant 2$ приведены в таблице.

$F^{1}_{ss'}$			
s	$s'=0$	$s'=1$	$s'=2$
0	0,681	—0,543	0,011
1	—0,543	0,380	—0,151
2	0,011	—0,151	0,161

$F^{2}_{ss'}$			
s	$s'=0$	$s'=1$	$s'=2$
0	0,888	—0,145	—0,189
1	—0,145	0,128	—0,029
2	—0,189	0,029	0,091

Как видим, $F^{j}_{ss'}$ быстро убывают с ростом s. Поэтому при вычислении наибольшего значения λ, отвечающего наиболее неустойчивым колебаниям, достаточно ограничиться системой конечного порядка, считая $\varphi_s = 0$ при s больше некоторого значения s_0. Ограничиваясь системой уравнений второго порядка, находим для случая $q' = 0$ $\lambda = 0{,}74$. Второй корень близок к нулю и лежит практически за пределами применимости нашего рассмотрения. Вспоминая определение λ и приравнивая его найденному численному значению, получаем

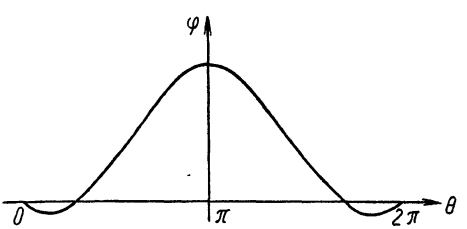


Рис. 8. Зависимость амплитуды колебаний потенциала φ от угла ϑ.

$$\gamma^2 \cong \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\, \omega_m \omega_p^*. \tag{4.22}$$

Учитывая третье уравнение системы (4.19), можно найти первые три члена разложения $\varphi(\vartheta)$ в ряд Фурье. При $q' = 0$ решение $\varphi(\vartheta)$ имеет вид

$$\varphi(\vartheta) \cong 1 - 1{,}4\cos\vartheta + 0{,}4\cos 2\vartheta. \tag{4.23}$$

Функция $\varphi(\vartheta)$ представлена графически на рис. 8 и локализована в области $\vartheta \approx \pi$, где частицы совершают неблагоприятный

дрейф. Другими словами, колебания развиваются в основном на внешнем обводе тора, их амплитуда весьма мала в области $|\vartheta| < \pi/2$.

Рассмотрим теперь, как влияет на неустойчивость изменение q'. Уже упоминалось, что увеличение q' приводит к усилению неустойчивости, а при $q' < 0$ имеет место некоторый стабилизирующий эффект, связанный с укорочением участка силовой линии между точками поворота при движении наружу. Полагая $\lambda = 0$, нетрудно найти критическое значение для параметра $q'r/q$, ниже которого колебания устойчивы. Оно оказывается равным —1,5, так что для стабилизации неустойчивости на захваченных частицах достаточно выполнение неравенства:

$$\frac{d \ln q}{d \ln r} < -{}^3/_2. \tag{4.24}$$

Вернемся теперь к уравнению (4.16). Напомним, что при переходе к более простому уравнению (4.17) мы пренебрегли величиной $l^2 v_{\zeta i}^2$ порядка ε^2 по сравнению с $\gamma^2 \sim \varepsilon^{3/2}$. Но так как γ^2 пропорционально dn/dr, а v_ζ от плотности не зависит, то даже при малом ε такое пренебрежение не всегда оправдано; а поскольку γ^2/v_ζ^2 всего лишь $\sim \sqrt{\varepsilon}$, то переход от (4.16) к (4.17) может быть незаконным даже при не очень мало градиенте плотности. Нетрудно видеть, что уменьшение $\left|\frac{dn}{dr}\right|$ приводит к уменьшению инкремента γ, и при некотором критическом значении $\frac{dn}{dr}$ γ обращается в нуль. Чтобы найти это критическое значение градиента, положим в уравнении (4.16) $\omega = 0$, а затем опять перейдем к фурье-представлению. В результате для случая $T =$ $=$ const получим

$$\mu (1 + \delta_{s0}) \varphi_s = \sum_{s'} P_{ss'} \varphi_{s'}. \tag{4.25}$$

Здесь

$$\mu = \frac{\pi \omega_m}{\sqrt{2\varepsilon \omega^*}}; \quad P_{ss'} = \int_0^1 \frac{\Pi_s \Pi_{s'} d\chi^2}{K(\chi) G(\chi)}, \tag{4.26}$$

где интеграл по χ^2 следует брать в смысле главного значения.

Минимальному значению ω^* отвечает максимальный корень μ. При $rq/q \to \infty$ матричные элементы $P_{ss'}$, а следовательно, и корни μ убывают. С другой стороны, при $q' < 0$ $G(\chi)$ является знакопеременной, и матричные элементы $P_{ss'}$ за счет этого эффекта меньше, чем при $q' > 0$. Таким образом, наибольшее значение μ соответствует значению $rq/q' \sim 1$. Нами было проведено вычисление корней μ при $rq'/q = {}^1/_2$. Для этого значения $P_{00} =$ $=$ 11,9; $P_{12} = 2{,}02$; $P_{22} = 2{,}24$, откуда находим $\mu_1 = 6{,}5$ и $\mu_2 =$

$= 1{,}7$. Беря большее значение μ_1 и подставляя в выражение (4.26) для μ, находим условие устойчивости

$$-\frac{d\ln n}{d\ln r} < \frac{1}{3}\sqrt{\frac{r}{R_0}}\,. \tag{4.27}$$

(Напомним, что при этом температура T предполагается постоянной по сечению.)

Практически это условие может выполняться только в отдельных узких областях изменения r.

Вспомним теперь, что при выводе интегрального уравнения для φ мы предполагали $m - lq \ll 1$. Казалось бы, что это неравенство может быть выполнено при q, близком к целому числу. Однако на самом деле приближенно можно считать $m \cong lq$, даже при lq, не равном целому числу. Это связано с полным пренебрежением пролетными частицами. В результате этого, как видно из уравнения (4.16), при $\vartheta \to 0$ функция $\varphi(\vartheta)$ также стремится к нулю (для частного случая $q' = 0$, это видно из рис. 8). Поэтому в полном решении вида $\varphi = \exp(im\vartheta - il\zeta)\varphi(\vartheta)$ при переходе через точку $\vartheta = 0$ допустим произвольный скачок фазы, так что число m необязательно должно быть целым, и мы можем положить его равным lq. Разумеется, m не может быть равно lq точно, так как в этом случае нельзя пренебрегать вкладом в плотность от пролетных частиц порядка $\omega Rq/v_\parallel$ $(m - lq)$. Но при $\omega Rq/v_\parallel \sim \frac{qm\rho_i}{r} \ll 1$ разность $m - lq$ можно считать равной нулю с большой точностью. Таким образом, полагая в полученном выше решении $m \cong lg$, где l — целое число, распространяем его на произвольные r. Учитывая малые члены за счет смещения частиц по радиусу Δr, можно было бы в принципе рассмотреть задачу о локализации собственных функций линейного приближения по радиусу. Однако практически эта задача не является необходимой, как мы увидим это при исследовании нелинейных колебаний.

В заключение этого пункта рассмотрим вкратце неустойчивость неизотермической плазмы $(T_e \neq T_i)$. Соответствующее уравнение в фурье-представлении имеет вид

$$\varphi_s = \sum_{s'} \int \frac{2\sqrt{2\varepsilon} f_{0i} v^2 dv}{n} \int \frac{\Pi_s(\chi)\,\Pi_{s'}(\chi)}{K(\chi)}\,\varphi_{s'} \times$$

$$\times \frac{\omega^2 + \omega\omega_m G(\chi)\dfrac{v^2}{v_i^2}(\Delta - 1) - \Delta\omega_m\hat{\omega}^*\dfrac{v^2}{v_i^2}G(\chi)}{\omega^2 + \omega\omega_m G(\chi)\dfrac{v^2}{v_i^2}(\Delta - 1) - \Delta\left(\omega_m G(\chi)\dfrac{v^2}{v_i^2}\right)^2} d\chi^2, \tag{4.28}$$

где

$$\hat{\omega}^* = -\frac{T_i cm}{eHrf_{0i}} \cdot \frac{df_{0i}}{dr}; \quad \Delta = T_e/T_i; \quad v_i^2 = 2T/m_i,$$

а остальные обозначения совпадают с введенными выше.

При $\Delta \neq 0$ в правой части уравнения (4.28) имеются линейные по ω члены, что может привести к стабилизации неустойчивости. Чтобы выяснить соответствующий эффект, запишем усредненное по ϑ уравнение (4.28) в виде

$$1 + \frac{\tilde{\omega}_m}{\omega}(\Delta - 1) + \sqrt{\varepsilon}\,\frac{\tilde{\omega}_m \tilde{\omega}^*}{\omega^2}\,\Delta = 0, \tag{4.29}$$

где под $\tilde{\omega}^*$, $\tilde{\omega}_m$ следует подразумевать некоторые эффективные значения, которые могут отличаться от введенных ранее ω^*, ω_m численным множителем порядка единицы. Из уравнений (4.29) видно, что неустойчивость имеет место только внутри интервала

$$\frac{\tilde{\omega}_m}{\tilde{\omega}^*} \cdot \frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}} < \frac{T_e}{T_i} < 4\sqrt{\varepsilon}\,\frac{\tilde{\omega}^*}{\tilde{\omega}_m}. \tag{4.30}$$

Вне этого интервала плазма устойчива. Так как $\frac{\tilde{\omega}_m}{\tilde{\omega}^*} \sim \varepsilon$, то интервал неустойчивости (4.30) весьма широк.

2. Диссипативная неустойчивость на запертых частицах

Так как неустойчивость на запертых частицах в конечном счете связана с сильным различием в движении частиц, то она должна быть весьма чувствительна к столкновениям. В самом деле, столкновения захваченных частиц приводят к тому, что они начинают выбрасываться в «пролетный конус» в пространстве скоростей, т. е. соответствующее возмущение будет затухать с некоторой частотой $\nu_{эфф}$. При $\varepsilon \ll 1$ угол γ_0 в пространстве скоростей, разделяющий область захваченных частиц от пролетных, порядка $\sqrt{\varepsilon}$. Доля захваченных частиц соответственно также мала. Поэтому в члене столкновений в форме Ландау для захваченных частиц можно сохранить лишь слагаемое со второй производной от функции распределения, так что приближенно он принимает диффузионный вид

$$st \cong \nu_j v_j^2 \Delta_v f', \tag{4.31}$$

где Δ_v — лапласиан в пространстве скоростей, ν_j — частота столкновений частиц сорта j, $v_j^2 = \frac{2T_j}{m_j}$. В члене столкновений наибольшим является слагаемое, содержащее вторую производную по γ, и по порядку величины $st \sim -\nu_j/\gamma_0^2 \sim \nu_j/\varepsilon$. Другими слова-

ми, $\nu_{эфф} = \nu/\varepsilon$. Если в уравнение (4.1) для f' добавить член столкновений и учесть его в виде $-\nu_{эфф} f'$, то, как нетрудно видеть, прослеживая заново ход вычислений, для учета столкновений в дисперсионном уравнении (4.12) достаточно заменить ω на $\omega + i\nu_{эфф}$ только в знаменателях подынтегральных функций. Так как в не очень плотной плазме пролетные частицы можно попрежнему считать распределенными по Больцману, то дисперсионное уравнение с учетом столкновений можно приближенно записать

$$2 = \sqrt{\varepsilon}\,\frac{\omega - \omega^*}{\omega + i\nu_i/\varepsilon - \omega_m} + \sqrt{\varepsilon}\,\frac{\omega + \omega^*}{\omega + i\nu_e/\varepsilon + \omega_m}. \qquad (4.32)$$

Здесь слагаемые в правой части, учитывающие вклад запертых частиц, содержат множитель $\sqrt{\varepsilon}$, равный доле захваченных частиц; ω_m — частота магнитного дрейфа, а множитель $1/\varepsilon$ перед частотами ν_i и ν_e учитывает диффузионный характер кулоновских столкновений.

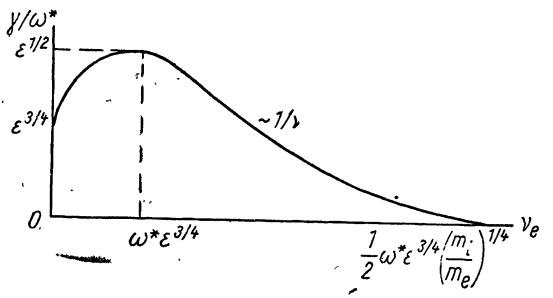


Рис. 9. Зависимость инкремента от частоты столкновений.

Для простоты ограничимся случаем $T_e = T_i$. В уравнении (4.32) можно пренебречь ω по сравнению с ω^* в числителе, кроме того, вообще пренебречь магнитным дрейфом ω_m, а в последнем слагаемом оставить только член с $i\nu_e/\varepsilon$ в знаменателе. В этом приближении получаем

$$\omega = -\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\omega^* + i\frac{\varepsilon^2}{4}\cdot\frac{\omega^{*2}}{\nu_e} - \frac{i\nu_i}{\varepsilon}. \qquad (4.33)$$

Как видно, при $\nu_e\nu_i < \frac{\varepsilon^3}{4}\omega^{*2}$ имеет место неустойчивость, не зависящая от знака кривизны силовых линий, т. е. от ω_m. Эту неустойчивость естественно назвать диссипативной неустойчивостью на запертых частицах. При уменьшении ν_e инкремент возрастает, достигает максимального значения $\gamma_{макс} \sim \sqrt{\varepsilon\omega^*}$ при $\nu_e \sim \varepsilon^{3/2}\omega^*$, а затем начинает убывать. Качественная зависимость инкремента от частоты ν_e изображена на рис. 9, из кото-

рого следует, что при увеличении ν_e диссипативная неустойчивость на запертых частицах стабилизируется за счет ион-ионных столкновений.

3. Неустойчивость, связанная с конечными орбитами

Раскачка дрейфовых волн электронами формально связана тем, что частота колебаний ω оказывается меньше дрейфовой частоты ω^*. Действительно, воспользовавшись выражением для энергии, поглощаемой в единице объема плазмой при прохождении волны $\dot{W} = \mathbf{Ej}$, и выражением для продольного тока $\mathbf{j}$ электронов (3.27), получим

$$\dot{W} = -\frac{e^2 n}{m_e \nu_e} k_z^2 |\varphi|^2 \left(1 - \frac{\omega_e^*}{\omega}\right). \qquad (4.34)$$

Отсюда следует, что при $\omega = \omega_e^*$ $\dot{W}$ меняет знак, т. е. вместо затухания волны имеем раскачку. Выражение (4.34) справедливо для столкновительной плазмы, однако подобный же результат получается и в случае, если диссипация вызвана резонансными частицами. Таким образом, любой эффект, приводящий к уменьшению ω, может приводить и к раскачке колебаний. Одним из таких эффектов является поперечная инерция ионов, с учетом которой частота дрейфовых волн оказывается равной $\omega = \omega^* (1 - k_\perp^2 \rho_i^2) < \omega^*$, ρ_i — ларморовский радиус ионов. Уменьшение ω происходит из-за того, что в магнитном поле при учете инерции частицы описывают некоторые орбиты. В результате частица «чувствует» поле не в данной точке, а среднее поле по орбите, которое оказывается меньше истинного, что и приводит к уменьшению частоты. Как следует из (4.34) и выражения для ω, эффект оказывается тем больше, чем больше размер орбиты, т. е. ρ_i.

Однако в неоднородном магнитном поле замкнутых систем частицы не только вращаются по циклотронной окружности, но и описывают некоторую сложную траекторию (см. рис. 3) с характерным размером Λ. В круговом торе размер орбиты Λ оказывается порядка $\rho_i \sqrt{R/a}$ (см. § 1), а в стеллараторе он может достигать поперечных размеров системы [36]. Если за время рассматриваемых колебаний частица успеет обойти свою орбиту несколько раз, то можно произвести усреднение по этому вращению (буквально так же, как производится усреднение по циклотронному вращению), и в результате для частоты дрейфовых колебаний получим выражение $\omega = \omega^* (1 - k_\perp^2 \rho^2 - k_\perp^2 \Lambda^2) \simeq \omega^* (1 - k_\perp^2 \Lambda^2)$, так как $\Lambda \gg \rho$. Таким образом, в рассматриваемых колебаниях дрейф частиц в неоднородном магнитном поле играет роль, аналогичную поперечной инерции ионов. Возникающую при этом неустойчивость назовем неустойчивостью с конечными орбитами. Качественно правильное дисперсионное

уравнение для нее можно получить из дисперсионного уравнения для инерционной дрейфовой неустойчивости путем замены $\rho_i \to \Lambda$ в инерционном члене [37] (там же приведено более полное уравнение). Например, для дрейфово-диссипативной неустойчивости с конечными орбитами получаем уравнение

$$\omega^2 + \omega\left(i\tilde{\omega}_s - \omega_i^*\right) - i\tilde{\omega}_s\omega_e^* = 0, \tag{4.35}$$

где $\tilde{\omega}_s = \omega_s\left(\frac{\Lambda}{\rho_i}\right)^2$. Как следует из этого уравнения, учет конечных орбит приводит к тому, что максимальный инкремент $\gamma \sim \omega^* \sim \tilde{\omega}_s$ достигается теперь в случае более длинных волн $\tilde{\lambda} \sim \lambda\left(\frac{\Lambda}{\rho_i}\right)^2$. В § 10 будет показано, что этот эффект может приводить к заметному увеличению эффективной диффузии.

Остается еще вычислить характерный размер орбиты Λ.

Основной причиной, вызывающей дрейф ведущих центров в тороидальных системах, является неоднородность магнитного поля. Например, для кругового тора типа «Токамак» магнитное поле на внутренней поверхности камеры сильнее, чем на наружной, из-за тороидального эффекта. В результате при движении вдоль силовой линии абсолютная величина полного поля оказывается переменной. Это эквивалентно некоторой эффективной гофрировке продольного магнитного поля. Аналогичным образом для тороидальных систем типа «Стелларатор» гофрировка возникает из-за наличия обмоток, создающих вращательное преобразование. Чтобы качественно учесть эти эффекты, продольное магнитное поле для таких систем можно выбрать в виде [ср. с (1.3)]:

$$H_\zeta = H_0\left(1 - \frac{r}{R_{0c}}\cos\frac{2}{L_R}\zeta\right). \tag{4.36}$$

Здесь ζ — координата вдоль силовой линии, R_{0c} — характеризует глубину, а L_R — период гофрировки поля. Используя дрейфовые уравнения, нетрудно убедиться, что в поле (4.36) максимальное смещение частицы от данной магнитной поверхности по порядку величины равно $\Lambda_0 \approx \frac{L_R v_i}{R_{0c}\Omega_i}$. Однако в дисперсионное выражение входит не эта величина, а смещение за период колебаний $t = \frac{2\pi}{\omega}$, равное $\Lambda = \Lambda_0\frac{\omega_R}{\omega}$, где $\omega_R = \frac{2v_i}{L_R}$ — обратное время прохождения расстояния между гофрами.

Точное вычисление с помощью кинетического уравнения [37] приводит к величине

$$\Lambda = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{8}}\frac{L_R}{R_{0c}}\frac{v_i}{\Omega_i}\right)\left(\frac{\omega_R}{\omega}\right). \tag{4.37}$$

Это выражение справедливо при $\omega > \omega_R$.

§ 5. ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

1. Дрейфово-циклотронная неустойчивость

При увеличении градиента плотности в плазме может развиваться дрейфовая неустойчивость на циклотронных гармониках $\omega \sim n\Omega_i$. Вначале рассмотрим бесстолкновительные колебания, а затем учтем влияние столкновений.

Общее дисперсионное уравнение, описывающее потенциальные колебания плазмы при произвольных частотах, приведено в работе [29]. Для колебаний с частотой, близкой к $n\Omega_i$, когда вкладом в возмущение плотности от остальных гармоник можно пренебречь, его можно записать в виде

$$k^2 d_i^2 + 1 + \frac{T_i}{T_e} + \left(1 - \frac{\omega_i^*}{\omega}\right) i\sqrt{\pi}\,\frac{\omega}{k_\parallel v_i} W\left(\frac{\omega - n\Omega_i}{k_\parallel v_i}\right) e^{-z} I_n(z) +$$

$$+ \frac{T_i}{T_e}\left(1 - \frac{\omega_e^*}{\omega}\right) i\sqrt{\pi}\,\frac{\omega}{k_\parallel v_e} W\left(\frac{\omega}{k_\parallel v_e}\right) e^{-z_e} I_0(z_e) = 0, \qquad (5.1)$$

где

$$\omega_i^* = \frac{k_y T_i c}{eHn}\cdot\frac{dn}{dr};\quad \omega_e^* = -\frac{k_y T_e c}{eHn}\cdot\frac{dn}{dr};$$

$$z = \frac{k_\perp^2 T_i}{m_i\Omega_i^2};\quad z_e = \frac{k_\perp^2 T_e}{m_e\Omega_e^2};\quad d_i^2 = \frac{T_i}{4\pi e^2 n}.$$

Так как дрейфово-циклотронные колебания являются весьма коротковолновыми ($k_\perp \rho_i \gg 1$), то можно думать, что шир не будет оказывать на них существенного влияния.

Рассмотрим вначале колебания с $k_\parallel \cong 0$ $\left(\frac{\omega}{k_\parallel v_e} \gg 1\right)$. Как показывает оценка аргумента электронной W-функции, этот случай действительно может реализоваться. Для малых $k_\parallel \cong 0$ можно воспользоваться прежним разложением $k_y = k_y \theta x / r_0$, тогда

$$\frac{\omega}{k_\parallel v_e} \sim \frac{\Omega_i}{k_y \theta x / r_0 v_e} \sim \frac{r_0}{\rho\theta}\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}$$

(здесь учитывается, что $\omega \sim \Omega_i$ и характерные $k_y \sim x^{-1}$), но эта величина считается большой. Таким образом, в электронной части уравнения (5.1), пренебрегая экспоненциально малыми мнимыми членами, можно положить $k_\parallel = 0$. Относительно аргумента ионной W-функции также предположим, что он достаточно велик $\omega - n\Omega_i \gg k_\parallel v_i$. (Это условие подтверждается результатом.)

Учитывая, кроме этого, что для неустойчивости должно выполняться условие $\omega^* > \omega - n\Omega_i$ или $k_y \rho_i > r_0/\rho_i$, воспользуемся

асимптотическим представлением для функции Бесселя $I_n(z)$. В результате всех упрощений уравнение (5.1) примет вид

$$k^2 d_i^2 + 1 + \frac{T_i}{T_e} - \left(1 - \frac{\omega_i^*}{\omega}\right) \frac{\omega}{\omega - n\Omega_i} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} - \\ - \frac{T_i}{T_e} \left(1 - \frac{\omega_e^*}{\omega}\right) e^{-z_e} I_0(z_e) = 0. \qquad (5.2)$$

Из уравнения (5.2) нетрудно найти условие неустойчивости [15]:

$$\rho_i / r_0 > 2n \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}. \qquad (5.3)$$

Но так как предполагается выполненным обратное неравенство $\rho_i/r_0 < \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}$, то циклотронные колебания с $k_\parallel = 0$ не могут развиваться.

Несколько другими соотношениями описываются колебания с $k_\parallel \neq 0 \left(\frac{\omega}{k_\parallel v_e} \lesssim 1\right)$. Рассмотрим сразу случай $\frac{\omega}{k_\parallel v_e} \ll 1$. При этом изменяется только электронная часть уравнения (5.2): $\frac{T_i}{T_e} \left(1 - \frac{\omega_e^*}{\omega}\right) i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{k_\parallel v_e} e^{-z_e} I_0(z_e)$. Из полученного уравнения нетрудно найти выражение для частоты и инкремента. Отметим, что неустойчивость с $k_\parallel \neq 0$ тоже является пороговой, т. е. может развиваться только при достаточно большом ларморовском радиусе. Действительно, с одной стороны, для нее выполнены неравенства $\omega - n\Omega_i \sim \frac{\Omega_i}{k_\perp \rho \sqrt{2\pi}} > k_\parallel v_i$, $k_\parallel v_e > \omega \sim \Omega_i$, объединяя которые, находим $k_\perp \rho_i < v_e/v_i$, а с другой, $\omega \sim \Omega < \omega^*$, т. е. $k_\perp \rho > r_0/\rho_i$. Таким образом, колебания с $k_\parallel \neq 0$ неустойчивы, если $\rho_i/r_0 > \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}$, а так как предполагается, что выполнено обратное неравенство, то и эта неустойчивость не развивается.

Рассматриваемые колебания являются весьма коротковолновыми. Например, как только начинает выполняться неравенство (5.3), длина волны оказывается порядка электронного ларморовского радиуса. Поэтому естественно думать, что на них может сильно влиять коротковолновая ионная вязкость [22, 27]. Качественно (для случая $\nabla T = 0$) ее можно учесть, заменяя $\omega \to \omega + i\nu_{ii} z$ в уравнении (5.2). Если вязкость мала, она приводит к неустойчивости циклотронных колебаний [38]. Однако если выполнено неравенство $\frac{1}{\omega - n\Omega_i + i\nu_{ii} z} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \sim \frac{1}{i\nu_{ii} z} \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} < 1$, то, как следует из формулы (5.2), циклотронные колебания не раскачиваются. Учитывая условие $k_\perp \rho \gtrsim r_0/\rho$, заключаем, что

циклотронные колебания стабилизируются из-за столкновений, если S не очень велико [22, 27]:

$$S = \lambda_e \rho_i / a^2 < a/\rho_i . \qquad (5.4)$$

Ясно, что этот критерий не зависит от предположения $\nabla T = 0$.

2. Ионно-звуковая неустойчивость

Если ионная температура T_i значительно меньше электронной T_e, то при наличии продольного тока в плазме может развиваться коротковолновая ионно-звуковая неустойчивость. Для этого необходимо, чтобы продольная (токовая) скорость электронов $u = i/en$ превышала скорость звука $c_s = \sqrt{T_e/m_i}$. Поскольку джоулево тепловыделение на один электрон $j^2/\sigma n = \frac{u^2}{v_e^2} \times$ $\times \frac{T_e}{\tau_e}$ в u^2/c_s^2 больше энергопередачи от электронов к ионам $\frac{m_e}{m_i} \times$ $\times \frac{T_e - T_i}{\tau_e}$, то условие $u > c_s$ самосогласованно: при этом и температура электронов «отрывается» от ионной (т. е. появляется возможность распространения ионного звука), и затухание на электронах сменяется раскачкой.

В отсутствие магнитного поля или при наличии слабого магнитного поля ионно-звуковая неустойчивость приводит к развитию колебаний сравнительно небольшой амплитуды, распространяющихся под различными углами и направлению тока [31]. В рассматриваемом нами случае сильного магнитного поля все волны при $kd_e \ll 1$ ($d_e = \frac{T_e}{4\pi e^2 n}$ — дебаевский радиус по электронной температуре) имеют одну и ту же фазовую скорость вдоль магнитного поля, равную c_s, и поэтому характер развития неустойчивости несколько изменяется.

Рассмотрим функцию распределения электронов по продольной скорости $f(v_\parallel)$ (рис. 10). При наличии продольного тока максимум этой функции сдвинут относительно начала координат на величину u_0 порядка u (при кулоновских столкновениях $u_0 \cong$ $\cong 0{,}5u$). Для простоты предположим, что u, а следовательно, и u_0 значительно превышают c_s. Как известно, ионно-звуковая неустойчивость развивается в результате резонансного взаимодействия с волной электронов, движущихся со скоростью, равной фазовой скорости волны. В случае ионного звука фазовая скорость v_Φ уменьшается с k от c_s при $kd_e \ll 1$ до нуля при $k \to \infty$. Поэтому резонансное взаимодействие с волнами малой амплитуды имеет место в области от 0 до c_s (см. рис. 10), и все волны в этой области при $u_0 > c_s$ начинают нарастать со временем, причем наибольшим инкрементом обладают возмущения с $kd_e \sim 1$. По мере нарастания возмущения характер взаимодействия с электронами

может изменяться. А именно если возмущение потенциала приобретает конечную амплитуду φ, то все электроны, продольная скорость которых отличается от v_Φ на величину $\leqslant \sqrt{2e\varphi/m_e}$, оказываются захваченными волной и на функции распределения появляется «плато», как показано на рис. 10 пунктирной линией. Ширина этого плато порядка $2\sqrt{2c\varphi/m_e}$. Наличие плато приводит к тому, что все волны, кроме рассматриваемой, имеющие фазовую скорость внутри этого плато, становятся затухающими. Что же касается возмущения конечной амплитуды, то оно непрерывно продолжает нарастать, поскольку столкновения все время деформируют функцию распределения таким образом, чтобы у захваченных волной частиц появлялась средняя направленная скорость. Инкремент нарастания определяется скоростью

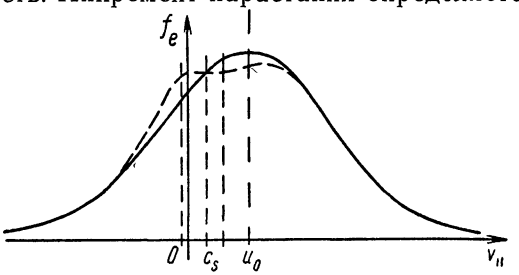


Рис. 10. Функция распределения электронов при наличии тока.

восстановления функции распределения, а именно $\gamma \sim \dfrac{u^2}{v_e^2}\cdot\dfrac{1}{\tau_e}$.

Это нарастание продолжается до тех пор, пока амплитуда волны не станет порядка $e\varphi \sim T_e$ и не появится возможность отражения части ионов от «горбов» ионно-звуковой волны. При этом происходит интенсивная передача энергии ионам. Так как при $e\varphi \sim T_e$ заметная доля электронов (порядка половины) захвачена волной, то эффективная проводимость $\sigma = e^2 n\tau_e/m_e$ уменьшается вследствие уменьшения числа носителей n. Другими словами, ионно-звуковая неустойчивость в сильном магнитном поле приводит к аномальному сопротивлению порядка нормального. Джоулево тепло, выделяющееся на аномальном сопротивлении, передается волне, а затем непосредственно ионам за счет отражения части ионов от «горбов» потенциала и последующих ионных столкновений. Соответствующий эффект можно учесть введением члена типа джоулева тепловыделения непосредственно в уравнение теплового баланса для ионов.

Рассмотренная картина относится к плазме в однородном магнитном поле. В тороидальной геометрии при $\lambda_e \gg a$ электроны с малой продольной скоростью являются запертыми, так что на функции электронов, вообще говоря, имеется плато и в отсут-

ствие колебаний. В этом случае раскачка ионного звука малой амплитуды может происходить только на внутреннем обводе тора, где запертых частиц нет, и лишь при достаточно большой амплитуде $e\varphi > \frac{rT_e}{R_0}$, когда влияние запертых частиц становится несущественным. Можно думать, что вследствие этого эффект возбуждения ионно-звуковых колебаний должен быть жестким: для нарастания малых возмущений величина u должна быть значительно больше значения $\sim c_s$, достаточного для существования волн конечной амплитуды. К аналогичному эффекту может приводить и эффект запирания частиц «горбами» длинноволновых колебаний дрейфового типа.

§ 6. ВИНТОВЫЕ МАГНИТНЫЕ ЯЧЕЙКИ

Исследование нелинейных эффектов начнем с рассмотрения винтового возмущения магнитного поля, которое может развиваться за счет гидромагнитной винтовой или диссипативной винтовой неустойчивости. Как было установлено в § 2 и 3, при достаточно большом коэффициенте запаса q винтовая неустойчивость стабилизирована. Однако как с точки зрения достижения максимального шира θ, так и с точки зрения увеличения джоулева тепла j^2/σ, следует увеличивать азимутальное магнитное поле H_ϑ, т. е. уменьшать q до значения, при котором может развиваться винтовая неустойчивость. Поэтому рассмотрение макроскопического эффекта от винтовой неустойчивости безусловно является необходимым.

Поскольку для винтовой неустойчивости тороидальность несущественна, то рассмотрим цилиндр длиной $L = 2\pi R_0$ и радиусом a. Как известно [39], при винтовой симметрии магнитное поле выражается через две функции I и ψ:

$$H_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}; \tag{6.1}$$

$$H_\vartheta = \frac{1}{k^2r^2 + m^2}\left(m\frac{\partial \Psi}{\partial r} + krI\right); \tag{6.2}$$

$$H_z = \frac{1}{k^2r^2 + m^2}\left(-kr\frac{\partial \Psi}{\partial r} + mI\right), \tag{6.3}$$

где $\zeta = kz - m\vartheta$; $I = I(r, \zeta)$; $\Psi = \Psi(r, \zeta)$.

Нетрудно проверить, что $\mathbf{H}\nabla\psi = 0$ и $\mathrm{rot}\,\mathbf{H}\nabla I = 0$. Таким образом, $\psi = \mathrm{const}$ представляет собой уравнение магнитной, а $I = \mathrm{const}$ — токовой поверхностей.

Чтобы найти возмущение магнитного поля, воспользуемся уравнением

$$m_i n\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = \frac{1}{c}[\mathbf{jH}], \tag{6.4}$$

представляющим собой сумму уравнений движения для электронов и ионов, в которых опущены малые члены с вязкостью.

Для дрейфовых волн поперечный инерционный член значительно меньше градиента давления, а именно, он составляет от него долю $\sim \rho_i^2/a^2$. Поэтому поперечной инерцией можно пренебречь, а инерционный член представить в виде произведения $F\mathbf{H}$. Умножая уравнение (6.4) на $\mathbf{H}$, находим

$$FH^2 = -\frac{1}{r} D(p, \Psi), \tag{6.5}$$

где $D(p, \Psi)$ — якобиан

$$D(p, \Psi) \equiv \frac{\partial p}{\partial r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} - \frac{\partial p}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \tag{6.6}$$

С учетом соотношения (6.5) записываем уравнение (6.4) в виде

$$-\frac{\mathbf{H}}{rH^2} D(p, \Psi) + \nabla p = \frac{1}{c} [\mathbf{jH}]. \tag{6.7}$$

Это уравнение отличается от обычного магнитогидродинамического уравнения равновесия учетом продольной инерции. Его компонента вдоль $\mathbf{H}$ автоматически удовлетворяется, поэтому достаточно рассмотреть лишь две поперечные компоненты.

Умножая уравнение (6.7) на rot $\mathbf{H}$ и учитывая выражения (6.1)—(6.3), получаем

$$D(p, I) + \frac{(\mathrm{rot}\,\mathbf{HH})}{H^2} D(p, \Psi) = 0. \tag{6.8}$$

Аналогичным образом, умножая уравнение (6.7) на $\nabla \psi$, находим уравнение равновесия вдоль $\nabla \psi$

$$\Delta^* \psi + \frac{2kmI}{(k^2r^2 + m^2)^2} + 4\pi \frac{\nabla p \nabla \psi}{(\nabla \psi)^2} + \frac{I}{k^2r^2 + m^2} \cdot \frac{\nabla I \nabla \psi}{(\nabla \psi)^2} = 0, \tag{6.9}$$

где

$$\Delta^* \psi = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{k^2r^2 + m^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} \right). \tag{6.10}$$

Для возмущений с $\omega \ll k_\parallel v_t$, т. е. с локализацией $x \gg \rho_i/\theta$, давление успевает выравниваться вдоль силовых линий, и $D(p, \psi) = 0$, т. е. $p = p(\psi)$. В этом случае из уравнения (6.8) следует $D(p, I) = 0$, $I = I(\psi)$, и уравнение (6.9) приводится к известному уравнению равновесия при винтовой симметрии [39]. Однако для сильно вытянутых вдоль $\mathbf{H}$ возмущений поверхности $p = \mathrm{const}$, $I = \mathrm{const}$, $\psi = \mathrm{const}$ перестают совпадать. Чтобы найти эти поверхности, необходимо привлечь еще одно уравнение — закон Ома вдоль $\mathbf{H}$, т. е. продольную компоненту уравнения движения для электронов. В системе координат, где ячейки покоятся и, следовательно, $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$, это уравнение имеет вид

$$\mathbf{H} \nabla p_e = en\mathbf{H} \nabla \varphi + \frac{m_e}{e\tau_e} \mathbf{jH} - en\mathbf{HE}_0. \tag{6.11}$$

Отсюда находим

$$\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left\{\mathbf{H}\mathbf{E}_0 - \frac{1}{r}D(\varphi, \psi) + \frac{1}{rn}D(p_e, \psi)\right\}, \quad (6.12)$$

где $\sigma = e^2 n\tau_e/m_e$ — проводимость плазмы.

С другой стороны, с помощью соотношений (6.1) — (6.3) можно получить выражение

$$\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = I\left\{\Delta^*\psi + \frac{2kmI}{(k^2r^2 + m^2)^2}\right\} - \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial I}{\partial\zeta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\zeta} - \\ - \frac{1}{k^2r^2 + m^2}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r}\cdot\frac{\partial I}{\partial r}. \quad (6.13)$$

Представим ψ в виде $\psi = \psi_0 + \psi'$, где ψ_0 — невозмущенная функция, соответствующая невозмущенному магнитному полю и определяемая, согласно выражениям (6.2) и (6.3), соотношением

$$\frac{d\psi_0}{dr} = mH_\vartheta - krH_z. \quad (6.14)$$

На цилиндрической поверхности $r = r_0$, где $mH_\vartheta - krH_z = 0$, т. е. шаг возмущения совпадает с шагом невозмущенных силовых линий, $\frac{d\psi_0}{dr} = 0$. На этой поверхности линеаризованное уравнение (6.9) имеет особенность, а нелинейное требует специального рассмотрения, так как третье и четвертое слагаемые могли бы в принципе приводить к особенности. Однако в установившемся состоянии этого не может быть. Действительно, если бы сумма третьего и четвертого слагаемых при $\nabla\psi \to 0$ была очень велика, то была бы велика сумма первого и второго слагаемых, и в первую очередь $\Delta^*\psi$. Сравнивая формулы (6.9) и (6.13), видим, что при этом должно быть велико возмущение продольной плотности тока, т. е. $\mathbf{H}$ rot $\mathbf{H}$. Но из соотношения (6.12) следует, что

$$\left\langle \frac{r}{\sigma}\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}\right\rangle_\psi = \frac{4\pi}{c}\left\langle r\mathbf{H}\mathbf{E}_0 + \frac{1}{n}D(p_e, \psi)\right\rangle_\psi, \quad (6.15)$$

где усреднение проводится в плоскости r, ζ вдоль линии $\psi = \mathrm{const}$.

Отсюда видно, что возмущение продольной плотности тока связано с возмущением температуры и плотности электронов. Все остальные возмущения продольного тока в гидродинамической устойчивой плазме должны затухать со скиновым временем, как можно показать с помощью формулы (6.11), если не предполагать потенциальности возмущенного электрического поля [см. уравнение (6.25)].

Рассмотрим сначала мелкомасштабные возмущения.

Так как относительное возмущение проводимости $\sim x_m/a$, где x_m — область локализации, а $I = m\frac{H^2}{H_z} \approx mH$ в точке $r = r_0$, то по

порядку величины $\Delta^*\psi'$ не превышает $\frac{1}{m}\cdot\frac{x_m}{a}\cdot\frac{H_\vartheta}{a}$. Отсюда при $x_m < a/m$ находим

$$\psi' \lesssim \frac{x_m^2}{a} H_\vartheta, \tag{6.16}$$

а невозмущенная функция ψ_0 изменяется в интервале $\sim x_m$ на величину $\sim m\frac{x_m^2}{a}H_\vartheta \gg \psi'$. Таким образом, при $m \gg 1$ возмущением магнитных поверхностей можно пренебречь, и, следовательно, для мелкомасштабных возмущений оправдано рассмотрение в пренебрежении искривлением силовых линий.

Рассмотрим теперь более подробно возмущения с небольшими m. Чтобы не усложнять выкладок, воспользуемся явно условием $H_\vartheta \ll H_z$ и пренебрежем малыми слагаемыми порядка H_ϑ^2/H_z^2, там где они несущественны. Из соотношения (6.3) видно, что в нулевом приближении $I = I_0 = mH_0$, где H_0 — однородное магнитное поле снаружи от плазменного шнура. С учетом этого обстоятельства, пренебрегая k^2r^2 по сравнению с m^2, запишем уравнение (6.9) в виде

$$\Delta\psi + 2kH_0 + 4\pi m^2\frac{\nabla p\nabla\psi}{(\nabla\psi)^2} + mH_0\frac{\nabla\psi\nabla I}{(\nabla\psi)^2} = 0, \tag{6.17}$$

где

$$\triangle\psi = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{m^2}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta^2}.$$

Отсюда видно, что I можно представить как

$$I = I_0 - \frac{4\pi mp}{H_0} + I_1, \tag{6.18}$$

после чего уравнение (6.17) преобразуется к виду

$$\Delta\psi + 2kH_0 + mH_0\frac{\nabla\psi\nabla I_1}{(\nabla\psi)^2} = 0. \tag{6.19}$$

Таким образом, в этом приближении давление p выпадает из уравнения равновесия. Если бы сохранялись члены $\sim k^2r^2/m^2 \sim \frac{H_\vartheta^2}{H_0^2}$, то полной компенсации градиента давления при подстановке выражения (6.18) в уравнение (6.17) не произошло, что привело бы, в частности, к возможности локальной конвективной неустойчивости в случае нарушения критерия Сайдема.

Однако при $aq'/q \sim 1$ и $\beta \lesssim \frac{H_\vartheta^2}{H_0^2}$ этот критерий выполнен с большим запасом, и поэтому пренебрежение соответствующими

малыми членами вполне оправдано. В пренебрежении малыми членами точное соотношение

$$\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = I\Delta^*\psi + \frac{2kmI^2}{(k^2r^2+m^2)^2} - \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial I}{\partial\zeta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\zeta} - \\ - \frac{1}{k^2r^2+m^2}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r}\cdot\frac{\partial I}{\partial r} \qquad (6.20)$$

можно заменить на более простое

$$\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} \cong \frac{H_0}{m}\Delta\psi + \frac{2kH_0^2}{m}. \qquad (6.21)$$

Сравнивая это соотношение с уравнением (6.19), видим, что

$$\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = -H_0^2\frac{\nabla\psi\nabla I_1}{(\nabla\psi)^2}. \qquad (6.22)$$

Рассмотрим теперь второе уравнение равновесия (6.8), в котором H^2 можно заменить на H_0^2.

В принятом нами приближении производную $\frac{\partial}{\partial\zeta}$ можно заменить на $-\frac{1}{m}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}$, так что соотношение (6.8) с учетом (6.22) можно записать в виде

$$\left[\nabla p,\ \nabla I_1 - \frac{\nabla\psi\nabla I_1}{(\nabla\psi)^2}\nabla\psi\right]_z = 0. \qquad (6.23)$$

Отсюда следует, что если ∇p имеет компоненту, направленную вдоль $\nabla\psi$, то вектор ∇I_1 должен быть направлен вдоль $\nabla\psi$, т. е. $I_1 = I_1(\psi)$. Другими словами, поверхность $I_1 = \mathrm{const}$ должна совпадать с магнитной поверхностью $\psi = \mathrm{const}$, и при этом уравнение равновесия (6.19) принимает вид

$$\Delta\psi + 2kH_0 + mH_0\frac{dI_1}{d\psi} = 0. \qquad (6.24)$$

Из этого уравнения видно, что равновесие возможно только в том случае, если $\Delta\psi$ является функцией ψ. Предположим, что это условие выполнено, т. е. что мы имеем дело с такой конфигурацией, в которой все колебания, связанные с неравновесностью начальных данных, уже затухли (однако возможность достижения такого состояния при произвольных начальных данных совсем не очевидна).

Обратимся теперь к продольной компоненте уравнения движения электронов (6.12), которое заменяет закон Ома. Для общности учтем непотенциальность электрического поля, допуская, что $E_\parallel$ может несколько отличаться от $-\nabla_\parallel\varphi$. Из уравнения

$-\frac{\partial j_\parallel}{\partial t} \cong -\frac{c^2}{4\pi}\Delta_\perp(\nabla_\parallel\varphi + E'_\parallel)$ с учетом формулы (6.21) находим $E'_\parallel = -\nabla_\parallel\varphi + \frac{1}{mc}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t}$. Таким образом,

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{cm}{rH_0}D(\varphi, \psi) + \frac{cm}{rH_0 n}D(p_e, \psi) = -mcE_0 + \\ + \frac{c^2}{4\pi\sigma}(\Delta\psi + 2kH_0). \qquad (6.25)$$

Заметим, что в рассматриваемом нами случае $H_\vartheta \ll H_0$ слагаемое $-\frac{cm}{rH_0}D(\varphi, \psi) = \frac{c}{H_0}[\mathbf{h}\nabla\varphi]\nabla\psi$ описывает «конвекцию» маг-

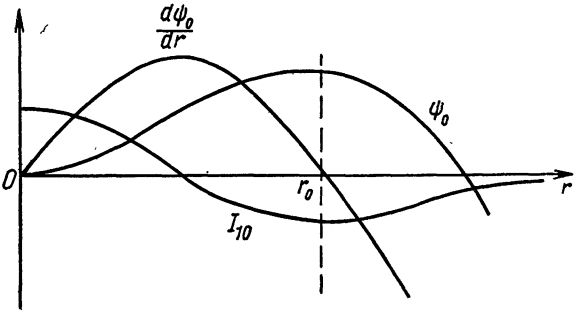


Рис. 11. Зависимость ψ_0, $\frac{d\psi_0}{dr}$ и I_{10} от r.

нитных поверхностей. Оно подбирается из того условия, что $\Delta\psi$ все время должен быть функцией ψ.

Будем считать, что область локализации $x \gg \xi^{1/3}m^{-2/3}$. При этом температуру T_e можно считать постоянной вдоль силовых линий, т. е. $\sigma = \sigma(\psi)$, $D(p_e, \psi) = T_e D(n, \psi)$. Полагая $\varphi = \frac{T_e}{e}\ln n + \varphi'$, получаем вместо уравнения (6.25)

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{cm}{rH_0}D(\varphi', \psi) = -mcE_0 + \frac{c^2}{4\pi\sigma}(\Delta\psi + 2kH_0). \qquad (6.26)$$

Вдали от особой точки $r = r_0$ возмущение магнитного поля мало, и поэтому ψ можно представить в виде $\psi_0 + \psi'$, где ψ_0 — не зависящая от ζ часть ψ, а ψ' — возмущение, причем $\psi' \ll \psi_0$. Аналогично $I_1 = I_{10} + I'_1$. В линейном приближении, полагая $\psi' \sim \exp(\gamma t + i\zeta)$, получим из уравнений (6.24) и (6.26)

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}r\frac{d\psi_0}{dr} + 2kH_0 = \frac{4\pi m}{c}j_0 = -mH_0\frac{dI_{10}}{dr}\left(\frac{d\psi_0}{dr}\right)^{-1}; \qquad (6.27)$$

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}r\frac{d\psi'}{dr} - \frac{m^2}{r^2}\psi' = \frac{4\pi\sigma_0}{c^2}\left(\gamma\psi' + i\frac{cm}{rH_0}\varphi\frac{d\psi_0}{dr}\right) + \\ + \frac{4\pi E_0}{c}\cdot\frac{d\sigma_0}{dr}\left(\frac{d\psi_0}{dr}\right)^{-1}\psi' = \frac{4\pi m}{c}\cdot\frac{dj_0}{dr}\left(\frac{\partial\psi_0}{dr}\right)^{-1}\psi'. \qquad (6.28)$$

Заметим, что эти уравнения остаются справедливыми и в случае медленно изменяющегося со временем тока j_0 (а следовательно, и ψ_0), т. е. при наличии скинирования. При этом достаточно лишь под E_0 понимать j_0/σ_0.

При выводе уравнения (6.28) учитывалось, что σ и $\frac{dI_1}{d\psi}$ являются функциями ψ, так что при возмущении ψ σ изменяется на величину $\frac{d\sigma_0}{d\psi_0}\psi' = \frac{d\sigma_0}{dr}\left(\frac{d\psi_0}{dr}\right)^{-1}\psi'$, и аналогичное изменение испытывает $\frac{dI_1}{d\psi}$. Если $\sigma_0(r)$ — монотонно убывающая функция r, то качественная зависимость ψ_0 и I_{10} от r, согласно формуле (6.27), должна иметь вид, представленный на рис. 11 (мы выбрали произвольную константу в ψ_0 таким образом, чтобы ψ_0 обращалось в нуль при $r = 0$).

Как видим, ψ_0 и I_{10} имеют экстремум в особой точке $r = r_0$, где

$$\frac{d\psi_0}{dr} = mH_\vartheta^0 - krH_0 = 0.$$

Обратимся теперь к уравнениям (6.28). Одно из них удобно записать в виде

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d\psi'}{dr} - U\psi' = 0,$$

где $U = \frac{m^2}{r^2} + \frac{4\pi m}{c}\times$

$$\times\frac{dj_0}{dr}\left(\frac{d\psi_0}{dr}\right)^{-1}. \quad (6.29)$$

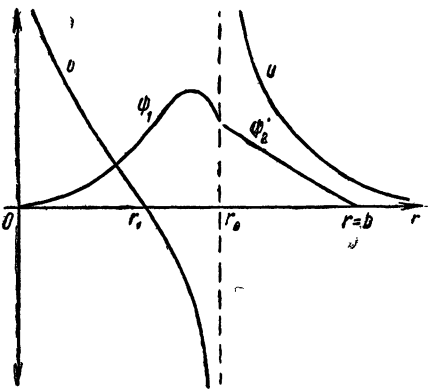


Рис. 12. Зависимость потенциала U и ψ' от r.

Зависимость «потенциала» U от r при $\frac{dj_0}{dr} < 0$ качественно представлена на рис. 12. Кривая имеет «яму» вблизи особой точки при $r < r_0$. Если эта яма достаточно широкая, то у решения (6.29) ψ_1', удовлетворяющего граничному условию $\psi_1'(0) = 0$, в интервале $0 < r < r_0$ могут появиться узлы (нули). В этом случае плазма неустойчива даже при $\sigma = \infty$ [40]. Так как ширина ямы уменьшается с номером m, то, увеличивая q, т. е. продольное магнитное поле H_0, можно добиться, чтобы «яма» появилась лишь при столь больших m (напомним, что в особой точке $q = \frac{m}{n} \lesssim m$), когда магнитогидродинамическая неустойчивость идеальной плазмы отсутствует. При этом ψ_1' в интервале $0 < r < r_0$ в нуль не обращается и имеет вид, представленный на рис. 12. На том же рисунке приведено качественное решение ψ_2' уравнения (6.29) при $r > r_0$, которое удовлетворяет граничному

условию $\psi_2' = 0$ на идеально проводящем кожухе радиусом $r = b$. Так как при $\psi_1'(r_0) = \psi_2'(r_0)$ производные $\frac{d\psi_1'}{dr}$ и $\frac{d\psi_2'}{dr}$ в точке $r = r_0$, вообще говоря, не равны, то ψ_1', ψ_2' не дают решения линеаризованного уравнения во всей области $0 < r < b$. Как видно из уравнения (6.28), второе линейное уравнение сводится просто к условию вмороженности силовых линий $\gamma\psi' + i\frac{cm}{rH_0}\varphi \times \times \frac{d\psi_0}{dr} = 0$ и не может быть использовано для отыскания полного линейного решения ψ'. В рамках линейного приближения этот парадокс разрешается при учете инерции в окрестности особой точки. Соответствующее рассмотрение, проведенное в работе [20] (см. также § 3), показывает, что при

$$\left(\frac{1}{\psi_1'}\cdot\frac{d\psi_1'}{dr} - \frac{1}{\psi_2'}\cdot\frac{d\psi_2'}{dr}\right)_{r=r_0} < 0$$

в плазме может развиваться винтовая неустойчивость с конечной проводимостью (tearing mode, согласно терминологии работы [20]), а при

$$\left(\frac{1}{\psi_1'}\cdot\frac{d\psi_1'}{dr} - \frac{1}{\psi_2'}\cdot\frac{d\psi_2'}{dr}\right)_{r=r_0} > 0$$

остаются лишь токово-конвективная и гравитационная (фактически, дрейфовая инерционная) неустойчивость *. Ниже будет показано, что к аналогичному результату приводит и нелинейное рассмотрение в пренебрежении инерцией.

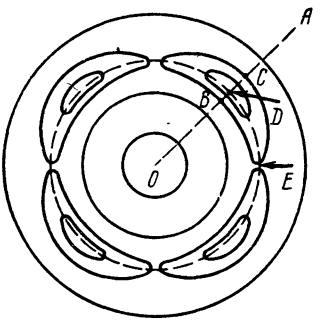


Рис. 13. Расщепление магнитных поверхностей.

Нетрудно видеть, что нелинейность следует в первую очередь учитывать вблизи особой точки. Действительно, так как ψ_0 достигает максимума при $r = r_0$ и, следовательно, очень медленно изменяется в окрестности $r = r_0$, то даже малое возмущение ψ'' приводит к сильному изменению магнитных поверхностей. А именно поверхность $\psi = \text{const}$ вблизи $r = r_0$ расщепляется, как показано, например, для $m = 4$ на рис. 13, где точка D соответствует $\psi = \psi_{max}$, а точка E является седловой. Ширина области, ограниченной сепаратрисой, т. е. поверхностью, проходящей через

* Заметим, что в особой точке производные $\frac{d\psi_1'}{dr}$ и $\frac{d\psi_2'}{dr}$ логарифмически расходятся, однако разность $\frac{1}{\psi_1'}\cdot\frac{d\psi_1'}{dr} - \frac{1}{\psi_2'}\cdot\frac{d\psi_2'}{dr}$ остается конечной.

седловые точки, порядка $x \sim \sqrt{\psi' \left(\frac{d^2\psi_0}{dr^2}\right)^{-1}}$, другими словами она явно нелинейно связана с ψ'. Линейное приближение допустимо лишь при достаточном удалении от границы ячейки, где $\psi' \ll \psi_0(r) - \psi_0(r_0)$. Так как разность $\psi_0(r) - \psi_0(r_0)$ квадратично возрастает с $r - r_0$, то область применимости линейного приближения наступает при удалении от сепаратрисы на расстояние порядка полуширины ячейки.

Рассмотрим теперь уравнение (6.26) внутри ячейки. Второе слагаемое в левой части этого уравнения описывает перенос силовых линий, вмороженных в плазму. Так как соответствующее течение является несжимаемым, то само по себе не может изменить площадь, ограниченную поверхностями $\psi = \text{const}$, а только слегка меняет ее форму, так что в конечном счете ширина ячейки определяется диффузией магнитного поля, которая описывается членом $\frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\psi$.

Проследим, как изменяется ψ вдоль радиуса OA, проходящего через центр отдельной ячейки (см. рис. 13). Учтем при этом, что на поверхности $\psi = \text{const}\,\Delta\psi$ является постоянным. Очевидно, что если сохранять постоянными $\Delta\psi$ и проводимость σ, то разность значений ψ в точках D и C при наличии ячеек будет меньше, чем в отсутствие ячеек, за счет диффузии поля по азимуту. Другими словами, ψ имеет более пологий максимум в центре ячейки, чем в отсутствие ячеек. Отсюда следует, что в стационарном случае возмущение ψ' должно несколько возрастать в обе стороны при удалении от центра ячейки. Если это возрастание достаточно велико, то в центре ячейки ψ будет возрастать со временем, т. е. $\frac{\partial\psi}{\partial t} > 0$, и, следовательно, размер ячейки увеличится, в обратном случае возмущение будет затухать со скиновым временем. Таким образом, ячейки развиваются лишь тогда, когда имеет место винтовая неустойчивость с конечной проводимостью, т. е. когда в линейном приближении $\left(\frac{1}{\psi_1'}\cdot\frac{d\psi_1'}{dr} - \frac{1}{\psi_2'}\cdot\frac{d\psi_2'}{dr}\right)_{r=r_0} < 0$, причем скорость расширения ячейки определяется скиновым временем $t = \frac{4\pi\sigma}{c^2}x^2$. При достаточно больших x это время значительно больше пролетного a/v_i, и инерция ионов не играет роли. По порядку величины это условие сводится к следующему: $x > \frac{c}{\omega_0}\sqrt{\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}\frac{a}{\lambda_e}}$. Ширину ячейки можно определить из линейного приближения, так как область допустимости линейного приближения начинается очень близко от сепаратрисы. Ширина ячейки не превышает, оче-

видно, величины $r_0 = r_2$, где r_2 — точка, в которой $\frac{d\psi_1'}{dr} = 0$ (см. рис. 12). Эта ширина не больше области $r_0 - r_1$, где $U < 0$, которая, согласно выражению (6.29), порядка a/m^2 и не очень сильно зависит от $\frac{dj_0}{dr}$, так как вблизи особой точки $\frac{d\psi_0}{dr} = x\frac{d^2\psi_0}{dr^2}$, а вторая производная $\left(\frac{d^2\psi_0}{dr^2}\right)_{r=r_0}$ также пропорциональна $\frac{dj_0}{dr}$.

В рассмотренную схему нетрудно включить эффект возбуждения ячеек внешними возмущениями. Для этого достаточно лишь к выбранному выше решению линейного уравнения ψ_2' добавить решение, равное внешнему возмущению на кожухе, т. е. при $r = b$, и экспоненциально убывающее внутрь плазмы.

Нетрудно видеть, что внешнее возмущение может приводить к малому расщеплению магнитных поверхностей даже в том случае, когда винтовая неустойчивость стабилизирована. С увеличением m возмущение внутри плазмы экспоненциально убывает, так что соответствующий макроскопический эффект мал.

При достаточно больших m и $\theta \neq 0$ винтовая неустойчивость не развивается и $\psi' = 0$. При этом, как видно из уравнения (6.26), возмущение проводимости компенсируется конвекцией [т. е. вторым слагаемым в левой части уравнения (6.26)], которая будет учтена в следующем параграфе. Отсутствие возмущения ψ' в этом случае, несмотря на возмущение давления p', связано с тем, что в принятом нами приближении $H_\vartheta^2 \ll H_0^2$ давление, согласно выражению (6.18), компенсируется возмущением продольного магнитного поля. Таким образом, возмущение ψ' при тепловой безынерционной конвекции на фактор H_ϑ^2/H_0^2 меньше величины (6.16), т. е. пренебрежимо мало.

§ 7. ТЕПЛОВАЯ КОНВЕКЦИЯ ПЛАЗМЫ С ТОКОМ

1. Основные уравнения

Рассмотрим теперь нелинейную конвекцию плазмы, развивающуюся вследствие токово-конвективной («штопорной») неустойчивости. Для простоты предположим, что плотность постоянна, хотя это ограничение несущественно. Тогда уравнение переноса тепла для несжимаемого течения можно записать в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T = \chi_\parallel \nabla_\parallel^2 T + \chi_\perp \triangle_\perp T, \qquad (7.1)$$

где $\chi_\parallel$, $\chi_\perp$ — продольная и поперечная температуропроводность, которые в области узколокализованных рассматриваемых ниже конвекционных ячеек можно считать постоянными.

Развивающееся вследствие токово-конвективной неустойчивости течение является безынерционным, и в пренебрежении неод-

неоднородностью магнитного поля его можно считать несжимаемым, так что

$$\mathbf{v}_\perp = \frac{c\,[\mathbf{h}\nabla\varphi]}{H_0};\ \operatorname{div}\mathbf{v}_\perp = 0. \tag{7.2}$$

Что касается продольной скорости $v_\parallel$, то для узколокализованных возмущений ею можно пренебречь (для этого, как было установлено § 3, достаточно, чтобы ширина локализации возмущения была меньше ρ_i/θ).

Далее, поскольку движение является безынерционным, плотность тока в плазме практически не возмущается, и поэтому продольный ток можно считать постоянным:

$$j_\parallel = \text{const} = \sigma_0 E_0, \tag{7.3}$$

где условно введено невозмущенное электрическое поле E_0. Хотя в действительности все рассматриваемые ниже результаты справедливы для неустановившегося, медленно меняющегося распределения тока (т. е. и при наличии скинирования), в этом случае под E_0 можно понимать просто $j_\parallel/\sigma_0$.

Для простоты в уравнениях (7.1) и (7.3) не будем делать различия между ионной и электронной температурой. В плотной плазме, действительно, $T_i = T_e$, однако при уменьшении частоты столкновений равновесие между электронами и ионами при конвекции не успевает устанавливаться, и тогда, пренебрегая изменением χ за счет изменения эффективной теплоемкости, можно сохранить уравнение (7.1), подразумевая под T электронную температуру. В этом случае уравнение (7.1), описывающее перенос тепла электронами, остается справедливым и при локализации возмущений, сравнимой или даже меньшей ρ_i, когда ионы вообще не участвуют в конвекции. Соответственно конвекция приводит только к электронной эффективной теплопроводности.

Рассмотрим сначала отдельную конвекционную ячейку, т. е. предположим, что в плазме развивается течение, при котором все величины являются периодическими функциями от переменной $m\vartheta - n\zeta$, где $\zeta = z/2\pi R_0$. При этом вблизи от особой точки $r = r_0$, где $q = m/n$, производную вдоль магнитного поля $\mathbf{h}\nabla = \frac{H_\vartheta}{rH_0} \times \times \frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{\partial}{\partial z}$ можно представить в виде

$$\mathbf{h}\nabla = -\frac{H_\vartheta q'}{qrH_0}\, x\frac{\partial}{\partial\vartheta}, \tag{7.4}$$

где $q' = \frac{dq}{dr}$; $x = r - r_0$. Таким образом, для течения вблизи особой точки уравнение (7.1) принимает вид двумерной конвекции

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T = m^2\alpha x^2\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \chi_\perp\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \tag{7.5}$$

где

$$\alpha = \chi_\parallel\theta^2/r^4;\ y = m\vartheta, \tag{7.6}$$

а θ — шир, равный $\theta = rq'H^{\vartheta}/qH_0$. Следует, помнить, что y является безразмерной величиной.

В уравнении (7.5) мы пренебрегли цилиндричностью и членом $\frac{\varkappa_\perp}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial\vartheta^2}$, предполагая, что область локализации $x_m \ll r$.

Обратимся теперь к уравнению (7.3). Для простоты примем закон Ома в виде $j_\parallel = \sigma E_\parallel = \sigma(E_0 - \nabla_\parallel \varphi)$. Если возмущение температуры мало, что действительно имеет место в узколокализованных ячейках, то уравнение (7.3) можно линеаризовать, и тогда получим

$$E_0 \frac{d\sigma_0}{dT_0} T' - \sigma_0 \mathbf{h}\nabla\varphi = 0, \tag{7.7}$$

где T' — возмущение температуры. Отсюда находим

$$xv_x = AT', \tag{7.8}$$

здесь

$$A = \frac{qcE_0}{q'H_\vartheta\sigma_0}\cdot\frac{d\sigma_0}{dT_0}. \tag{7.9}$$

Заметим, что учет члена с электронным давлением в законе Ома привел бы к добавлению к скорости v слагаемого, которое в приближении $H_z = H_0 = \text{const}$ равно $\mathbf{v}_d = \left\{-\frac{c}{mreH_0}\cdot\frac{\partial T}{\partial y}, \frac{c}{eH_0}\cdot\frac{\partial T}{\partial x}\right\}$. Нетрудно видеть, что $\operatorname{div}\mathbf{v}_d = 0$ и $\mathbf{v}_d\nabla T = 0$, так что это течение никак не сказывается на конвекции, оно приводит просто к скольжению ячеек относительно вещества со скоростью $\sim \frac{c}{eH_0}\cdot\frac{dT_0}{dx}$. При узкой локализации можно пренебречь и тем искажением ячеек, которое возникает за счет изменения $\frac{dT_0}{dx}$ с изменением x. Точно так же к простому скольжению ячеек привел бы учет неоднородности плотности плазмы, как это видно из линейного дисперсионного соотношения. Уравнение (7.8) можно записать также в виде

$$\nabla p = -xv_x\mathbf{e}_r + AT\mathbf{e}_r, \tag{7.10}$$

где $\mathbf{e}_r$ — единичный вектор, направленный по радиусу, а p — произвольная функция r, ϑ. Действительно, из азимутальной компоненты (7.10) следует, что $\frac{\partial p}{\partial\vartheta} = 0$, а усредняя радиальную компоненту и учитывая, что в силу несжимаемости $\int v_r d\vartheta = 0$, получаем $\frac{dp}{dr} = AT_0$, где $T_0 = \int T\frac{d\vartheta}{2\pi}$. С учетом этого обстоятельства нетрудно видеть, что уравнения (7.8) и (7.10) эквивалентны.

Уравнение (7.10) можно рассматривать как уравнение движения безынерционной жидкости (с плотностью $\rho_0 = 0$), которая испытывает трение — xv_x в радиальном направлении и на которую действует сила тяжести AT, пропорциональная температуре. Та-

ким образом, уравнения (7.5), (7.6) и (7.10) описывают тепловую конвекцию своеобразной жидкости с анизотропной теплопроводностью и анизотропной силой трения о неподвижную («пористую») среду.

2. Конвекция в отдельной ячейке

Рассмотрим конвекцию в отдельной ячейке, при этом временно пренебрежем поперечной теплопроводностью, т. е. положим $\chi_\perp = 0$. В линейном приближении из уравнений (7.5), (7.8) получаем

$$\gamma = \operatorname{Im}\omega = -\frac{A}{x}\cdot\frac{dT_0}{dr} - m^2\alpha x^2. \tag{7.11}$$

При $A > 0$, $\frac{dT_0}{dr} < 0$ неустойчивость имеет место, если $x > 0$. Ширина области локализации неустойчивости x_m определяется условием $\gamma = 0$. Из выражения (7.11) получаем

$$x_m = \left(\frac{AS_0}{m^2\alpha}\right)^{1/3} = r\xi^{1/3}m^{-2/3}, \tag{7.12}$$

где $S_0 = -\frac{dT}{dr}$ — невозмущенный градиент температуры,

$\xi = \frac{AS_0}{r^3\alpha}$.

Учитывая, что $\chi_\parallel \approx \lambda_e v_e = \tau_e v_e^2$, $\sigma = e^2 n_0 \tau_e / m_e$, получаем оценку для $\xi \sim \frac{c^2}{\omega_0^2\lambda_e^2}\cdot\frac{H_0^2}{H_\vartheta^2}$. Мы предположим, что $\xi \ll 1$, и, следовательно, даже для $m = 1$ $x_m \ll r$. (Например, для «Токамака» $c/\omega_0 \sim 0{,}1$, $H_0/H_\vartheta \sim 10$, $\lambda_e \sim 10^2 \div 10^3$, так что $\xi \sim 10^{-3} \div 10^{-2}$).

Конвекция, развивающаяся за счет неустойчивости, приводит к переносу тепла, а следовательно, и к изменению профиля усредненной температуры T_0. Рассмотрим сначала стационарную задачу в квазилинейном приближении, допуская, что возмущение температуры остается малым, а именно $T' \ll x_m S_0$. В этом приближении возмущение температуры можно выбрать в виде $T' = T_m \cos m\vartheta = T_m \cos y$.

Усредняя уравнение (7.5) по ϑ, с учетом соотношения (7.8) получаем

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r} r q_T; \quad q_T = \frac{AT_m^2}{2x} - \chi_\perp \frac{dT_0}{dr}. \tag{7.13}$$

Здесь q_T — тепловой поток, равный сумме конвекционного потока $\langle v_x T\rangle$ и теплопроводного $-\chi_\perp \frac{dT_0}{dr}$. Коэффициент $1/2$ в первом слагаемом в выражении для q_T (7.13) возник за счет усреднения $(\cos m\theta)^2$. Если $x_m \ll r$, то тепловой поток q_T в пределах данной конвекционной ячейки можно считать постоянным.

Стационарное состояние наступает, когда деформация профиля температуры T_0 достигает такой величины, что инкремент нарастания малых возмущений обращается в нуль. Из этого условия в пренебрежении $\chi_\perp$ в выражении для γ, т. е. при использовании уравнения (7.1), находим

$$\frac{dT_0}{dx} = -\frac{m^2\alpha}{A}x^3, \quad T_0 = T_a - \frac{S_0}{4}\cdot\frac{x^4}{x_m^3} \quad \text{при} \quad 0 < x < x_m, \tag{7.14}$$

где $T_a = T_0(x=0)$.

Подставляя найденное значение для T_0 в выражение (7.13), получаем

$$\frac{AT_m^2}{2x} + \chi_\perp S_0 \frac{x^3}{x_m^3} = q_\perp = \chi_\perp S_0,$$

откуда

$$T_m^2 = \frac{2x}{A}\left(1 - \frac{x^3}{x_m^3}\right)q_T. \tag{7.15}$$

Как видим, при малой поперечной теплопроводности $\chi_\perp$ амплитуда возмущения температуры также мала и в большей части интервала $0 < x < x_m$ квазилинейное приближение оправданно. Однако при $x \to 0$ $v_m^2 = \dfrac{A^2T_m^2}{x^2} \to \infty$ и, следовательно, необходим более корректный учет нелинейных членов в уравнении переноса тепла (7.5).

Чтобы найти приближенное решение нелинейного уравнения (7.5), необходимо принять во внимание следующие соображения.

Возмущение температуры формируется в основной части ячейки, где существенную роль играет продольная теплопроводность, которая описывается первым членом в правой части уравнения (7.5). Этот член приводит к затуханию всех высших гармоник, так что в большей части значений x имеется только основная мода. Однако при малых x член с продольной теплопроводностью становится пренебрежимо малым, и появляется возможность развития второй и более высоких гармоник вида $\sin ny$. Их амплитуда определяется нелинейным членом $\mathbf{v}\nabla T$, который описывает конвекционный перенос тепла без диссипации. Обозначим x_{1m} границу области, где продольная теплопроводность перестает доминировать и конвекция становится существенно нелинейной. В этой области, т. е. при $x < x_{1m}$, восходящий поток практически без диссипации переносит температуру $T_a = T_0(x=0)$, а нисходящий — температуру точки $x = x_{1m}$. Так как средняя температура T_0 убывает с x, то возмущение температуры в нисходящем потоке T_-, равное разности температуры в потоке и средней температуры T_0, при уменьшении x возрастает. Скорость потока $v_- = \dfrac{T_-}{Ax}$ возрастает еще круче, и в силу несжимаемости поперечный размер струи должен стремиться к нулю при $x \to 0$. Другими сло-

вами, нисходящий поток сходится в точку $y = \pi$, $x = 0$ (рис. 14) до тех пор, пока в игру не вступает поперечная теплопроводность, которая приводит к уменьшению T_-, а следовательно, и v_-. В виду несжимаемости поток растекается тонким слоем вдоль границы $x = 0$, интенсивно поглощая тепло от слоя $x < 0$. Этот теплообмен приводит к некоторому возмущению температуры в устойчивой области $x < 0$, но чтобы не усложнять рассмотрение, пренебрежем этим возмущением.

С учетом приведенных соображений будем искать приближенное решение в виде

$$T' = T_+ \cos\frac{y}{2l}$$

$$\text{при} \quad 0 < y < \frac{\pi l}{2};$$

$$T' = T_- \cos\frac{y-\pi}{2(1-l)}$$

$$\text{при} \quad \frac{\pi l}{2} < y < \pi. \qquad (7.16)$$

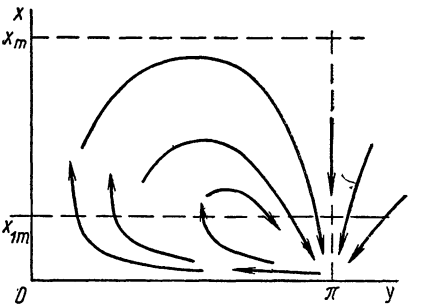


Рис. 14. Течение в конвекционной ячейке.

Другими словами, допустим, что профиль T' как в восходящем, так и в нисходящем потоке по-прежнему задается косинусом, но их ширина, пропорциональная соответственно l и $1 - l$, является функцией x. При $l = 1/2$, $T_- = -T_+$ получаем решение линеаризованного уравнения.

Подставляя выражения (7.16) в уравнение (7.5) и полагая $y = 0$ и $y = \pi$, находим два приближенных уравнения для определения T_+ и T_-:

$$\frac{AT_+}{x} \cdot \frac{d}{dx}(T_0 + T_+) = -\frac{\alpha m^2}{4l^2} x^2 T_+ + \chi_\perp \frac{d^2}{dx^2}(T_0 + T_+); \qquad (7.17)$$

$$\frac{AT_-}{x} \cdot \frac{d}{dx}(T_0 + T_-) = -\frac{\alpha m^2}{4(1-l)^2} x^2 T_- + \chi_\perp \frac{d^2}{dx^2}(T_0 + T_-). \qquad (7.18)$$

Кроме того, из условия $\int T' dy = 0$ следует

$$T_+ l + T_-(1-l) = 0, \qquad (7.19)$$

откуда

$$T_+ = (1-l)T; \quad T_- = -lT, \qquad (7.20)$$

где $T = T_+ - T_-$.

Выражение для потока тепла (7.13) при наличии возмущения вида (7.16) должно быть заменено на следующее:

$$q_T = -\chi_\perp \frac{dT_0}{dr} + \frac{A}{2x}\left[lT_+^2 + (1-l)T_-^2\right] = -\chi_T \frac{dT_0}{dr} - \frac{A}{2x} T_+ T_-. \qquad (7.21)$$

Уравнения (7.17) и (7.18) совместно с соотношениями (7.19) и (7.21) позволяют найти приближенное решение нелинейной задачи.

Упростим задачу, считая поперечную теплопроводность малой и полагая $\chi_\perp = 0$ в уравнениях (7.17), (7.18) и (7.21). Сокращая затем уравнение (7.17) на T_+, (7.18) — на T_- и вычитая одно из другого, получаем с учетом соотношений (7.20) (7.21)

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\alpha m^2 x^3}{4A} \cdot \frac{1-2l}{l^2(1-l)^2} = -\frac{\alpha m^2 A}{16 q_T^2} x(1-2l)T^4. \quad (7.22)$$

Далее, из соотношения (7.21) имеем $l^2 - l + 2q_T x/AT^2 = 0$, откуда с учетом приведенных выше соображений, из которых следует, что $l \to 1$ при $x \to 0$, получаем

$$l = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 2q_T x/AT^2} \quad (7.23)$$

При малых x можно положить приближенно $l = 1$, и тогда из уравнения (7.22) следует

$$T^{-3} + \frac{3\alpha m^2 A}{32 q_T^2} x^2 = T_c^{-3}, \quad (7.24)$$

где T_c — значение $T = T_+ - T_-$ при $x = 0$.

Искомое решение должно быть таким, чтобы при достаточно большом $x > x_{1m}$ величина l принимала значение $l = 1/2$ и начиная с этого значения x должно быть

$$T_+ = -T_- = \frac{T}{2} = \sqrt{\frac{2q_T}{A} x}. \quad (7.25)$$

Если в уравнение (7.22) вместо T подставить значение (7.25), то получим

$$2l - 1 \cong \frac{\sqrt{2Aq_T}}{4\alpha m^2} x^{-7/2}. \quad (7.26)$$

Из этого соотношения видно, что величина $2l - 1$ очень быстро возрастает при уменьшении x. Поэтому положение точки сшивки двух решений (7.24) и (7.25) $x = x_{1m}$ находим с удовлетворительной точностью, полагая просто $l = 1$ в соотношении (7.26):

$$x_{1m} \cong \left(\frac{Aq_T}{8\alpha^2 m^4}\right)^{1/7}. \quad (7.27)$$

Подставляя это значение для x_{1m} и значение для T из решения (7.25) в соотношение (7.24), находим

$$T_c \cong \left(\frac{4}{7}\right)^{1/3} T_1 \cong 0{,}83 \sqrt{\frac{8q_T}{A} x_{1m}}, \quad (7.28)$$

где T_1 — значение T в точке $x = x_{1m}$.

Таким образом, в интервале $0 < x < x_{1m}$ величина T остается почти постоянной, она изменяется всего лишь на 20%. Определим теперь T_0. Из уравнения (7.17), пренебрегая членом с $\chi_\perp$, находим

$$\frac{dT_0}{dx} = -\frac{dT_+}{dx} - \frac{\alpha m^2}{4l^2 A} x^3. \tag{7.29}$$

Так как l изменяется от $1/2$ до 1, причем единице оно равно только при очень малых x, то приближенно в соотношении (7.29) можно положить $l = 1/2$. Таким образом, из соотношения (7.29) приближенно получаем

$$T_0 = T_a - T_+ - \frac{\alpha m^2}{4A} x^4. \tag{7.30}$$

Из соотношения (7.29) с учетом (7.25) находим при $x > x_{1m}$

$$\frac{dT_0}{dx} \cong -\frac{\alpha m^2}{A}\left(x^3 + 2\frac{x_{1m}^{9/2}}{x^{3/2}}\right). \tag{7.31}$$

A при $x \to 0$ в силу того, что $T_+ = (1-l)\,T \cong 2q_T x/AT_c$, получаем

$$\left(\frac{dT_0}{dx}\right)_{x=0} = -\frac{2q_T}{AT_c} \cong -2\left(\frac{7}{4}\right)^{1/3}\frac{\alpha m^2}{A} x_{1m}^3. \tag{7.32}$$

Таким образом, при $x_{1m} \ll x_m$ полную зависимость $\dfrac{dT_0}{dx}$ от x можно грубо аппроксимировать следующим образом:

$$-\frac{dT_0}{dx} \approx \frac{\alpha m^2}{A}\left(x^3 + 2x_{1m}^3 - 2x_{1m}^3\frac{x^3}{x_m^3}\right) =$$

$$= \frac{q_T}{\chi_\perp}\left(\frac{x^3}{x_m^3} + 2\frac{x_{1m}^3}{x_m^3} - 2\frac{x_{1m}^3}{x_m^3}\cdot\frac{x^3}{x_m^3}\right). \tag{7.33}$$

Найденное нами приближенное решение справедливо лишь при достаточно малой проводимости, когда $x_{1m} \ll x_m$, где x_m — граница конвекционной ячейки, а x_{1m} — граница ее сильно нелинейной части. Однако в действительности отношение x_{1m}/x_m, согласно выражениям (7.12) и (7.27) и с учетом соотношения

$$\chi_\perp/\chi_\parallel \xi \approx \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}\,\frac{1}{\Omega_i^2\tau_i^2\xi} \approx \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}\,\beta\frac{H_\vartheta^2}{H_0^2},$$

оказывается порядка

$$\frac{x_{1m}}{x_m} = \left(\frac{\eta m^{2/3}}{8}\right)^{1/7} \approx \left(\frac{\beta m^{2/3}}{8\xi^{1/3}}\sqrt{\frac{m_i}{m_e}}\right)^{1/7} \sim 1, \tag{7.34}$$

где параметр $\eta = \left(\dfrac{\chi_\perp^3\alpha}{S_0^4 A^4}\right)^{1/3} \approx \beta\xi^{-1/3}\sqrt{\dfrac{m_i}{m_e}}$; $\beta = 8\pi p/H^2$ —

отношение давления плазмы к давлению магнитного поля; m_i — масса иона; m_e — масса электрона; $\Omega_i = \frac{eH}{m_i c}$; τ_i — среднее время ион-ионных столкновений.

Как видим из выражения (7.34), отношение x_{1m}/x_m очень слабо зависит от β, m, ξ, и в силу этого оно практически всегда является величиной порядка единицы. Это означает, что следует учитывать поперечную теплопроводность.

Исключая из уравнений (7.17) и (7.18) производную $\frac{dT_0}{dx}$ с помощью решения (7.21), запишем их в виде:

$$\frac{AT_+}{x}\left\{\frac{dT_+}{dx} - \nu q_T - \nu\frac{A}{2x}T_+T_-\right\} = -\frac{\alpha m^2}{4l^2}x^2T_+ - \\ -\frac{d}{dx}\left(\frac{AT_+T_-}{2x}\right) + \chi_\perp\frac{d^2T_+}{dx^2}; \qquad (7.35)$$

$$\frac{AT_-}{x}\left\{\frac{dT_-}{dx} - \nu q_T - \nu\frac{A}{2x}T_+T_-\right\} = -\frac{\alpha m^2}{4(1-l)^2}x^2T_+ - \\ -\frac{d}{dx}\left(\frac{AT_+T_-}{2x}\right) + \chi_\perp\frac{d^2T_-}{dx^2}, \qquad (7.36)$$

где $l = -T_-(T_+ - T_-)^{-1}$; $(1-l) = T_+(T_+ - T_-)^{-1}$; $\nu = \chi_\perp^{-1}$.

Чтобы не усложнять задачу, пренебрежем возмущением температуры за счет теплопроводности в области $x < 0$, полагая $T_+ = T_- = 0$ при $x = 0$.

Рассмотрим сначала линейное уравнение, например, для T_+:

$$\frac{d^2T_+}{dx^2} + \frac{Aq_T\nu^2}{x}\left(1 - \frac{x^3}{x_m^3}\right)T_+ = 0. \qquad (7.37)$$

У этого уравнения появляется нетривиальное решение при $g_m \equiv \equiv Aq_T\nu^2x_m = a_0$, где a_0 собственное значение уравнения

$$xV'' + a_0(1 - x^3)V = 0. \qquad (7.38)$$

Численный расчет с граничным условием $V(0) = 0$ дает значение $a_0 = 2{,}9$.

Пользуясь выражением (7.12) для x_m, запишем условие неустойчивости $g_m \equiv Aq_T\nu^2x_m > a_0$ в виде *

$$g_m^{-1} = m^{2/3}\eta = 8\left(\frac{x_{1m}}{x_m}\right)^7 < a_0^{-1}, \qquad (7.39)$$

* Заметим, что условие неустойчивости написано нами в предположении, что $\chi_\perp$ определяется ионной теплопроводностью, т. е. в предположении о равенстве T_i и T_e. В действительности при $S = \lambda_e\rho_i/a^2 > \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$ теплообмен между электронами и ионами не успевает устанавливать равновесие, поскольку $\omega^* > m_e\nu_e/m_i$. Поэтому неустойчивость, а следовательно, и тепловая конвекция имеет место и при $g_m < a_0$, однако при этом вносимый ею эффект меньше классической теплопроводности ионов и им можно пренебречь.

где

$$\eta = \left(\frac{\chi_\perp^7 \alpha}{A^4 q_T}\right)^{1/3} \approx \beta\xi^{-1/3}\sqrt{\frac{m_i}{m_e}}. \qquad (7.40)$$

Согласно условию (7.39), неустойчивость имеет место только для возмущений с

$$m < m_c = (\eta a_0)^{-3/2}. \qquad (7.41)$$

При $\eta a_0 \geqslant 1$, т. е. $\beta > a_0^{-1}\xi^{1/3}\sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$, устойчивы все моды, включая $m = 1$. Далее, если $m_c^2 x_{mc} < r$, т. е. $\eta a_0 > \xi^{1/6}$, то отдельные конвективные ячейки не перекрываются между собой, и их можно рассматривать отдельно друг от друга.

Предположим, что g_m не очень сильно превосходит критическое значение $g_m = a_0$. Тогда l можно все еще считать равной $1/2$ и, следовательно, $T_+ = -T_-$. В этом приближении получаем из уравнения (7.35)

$$\frac{d^2V}{dt^2} + g_m\left(\frac{1}{t} - t^2\right)V = \frac{1}{2t^2}V^2(1+V), \qquad (7.42)$$

где $t = x/x_m$; $V = A\nu T_+$.

При малом превышении g_m над a_0 уравнение (7.42) можно решать по теории возмущений, полагая $V = BV_0$, где V_0 — решение уравнения (7.38), а B — неизвестная амплитуда, которую можно найти из условия ортогональности, т. е. путем умножения уравнения (7.42) на V_0 и последующего интегрирования по x. Пренебрегая в правой части уравнения (7.42) величиной V по сравнению с единицей, получаем

$$B = 2D_0(g_m - a_0), \qquad (7.43)$$

где

$$D_0 = \int_0^\infty \left(\frac{1}{t} - t^2\right)V_0^2 dt \Big/ \int_0^\infty V_0^3 t^{-2} dt.$$

Нормируем V_0 таким образом, что бы $D_0 = 1$.

При $g_m \gg a_0$ первый член в левой части уравнения (7.42) мал по сравнению со вторым, и поэтому его можно приближенно заменить на $a_0\left(\frac{1}{t} - t^2\right)V$, т. е. на то значение, которое он принимает при малом $g_m - a_0$. В этом приближении получаем

$$V^2 + V = 2(g_m - a_0)t(1 - t^3). \qquad (7.44)$$

В дальнейшем будем пользоваться приближенным решением (7.44) как при больших, так и при малых значениях $(g_m - a_0)$. Как показано на рис. 15, при малых значениях $(g_m - a_0)$ решение (7.44) и $V = BV_0$ приводят к не сильно различающимся

значениям величины V^2/t, которая определяет вклад в тепловой поток

$$q_T = -\chi_\perp \frac{dT_0}{dx} + \frac{A}{2x} T_+^2 = -\chi_\perp \frac{dT_0}{dx} + \frac{q_T}{2g_m} \frac{V^2}{t}. \quad (7.45)$$

Из соотношения (7.45) вытекает

$$-\frac{dT_0}{dx} = \frac{q_T}{\chi_\perp}\left(1 - \frac{1}{2g_m}\frac{V^2}{t}\right). \quad (7.46)$$

Если в соотношении (7.44) пренебречь V по сравнению с V^2, то получим для выражения (7.46)

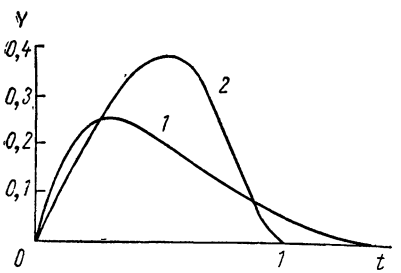


Рис. 15. Зависимость V^2/t вблизи порога устойчивости:
1 — $y = (D_0V)^2/t$; 2 — $y = t(1-t^3)^2$.

$$-\frac{dT_0}{dx} = \frac{q_T}{\chi_\perp}\left[t^3 + \frac{a_0}{g_m}(1-t^3)\right]. \quad (7.47)$$

При $g_m \gg a_0$ можно воспользоваться выражением (7.33), которое, пользуясь соотношением $\frac{x_{1m}}{x_m} = \left(\frac{1}{8g_m}\right)^{1/7}$, можно приближенно записать в виде

$$-\frac{dT_0}{dx} \cong \frac{q_T}{\chi_\perp}\left[t^3 + g_m^{-3/7}(1-t^3)\right]. \quad (7.48)$$

Как видим, (7.47) переходит в (7.48), грубо говоря, только при $g_m > a_0^2 \approx 8$, поэтому практически достаточно иметь только решение (7.47).

3. Поток тепла при наличии конвекции

Конвекция, развивающаяся в результате неустойчивости, приводит к дополнительному потоку тепла.

Рассмотрим сначала случай неперекрывающихся ячеек, когда $m_c^2 x_{mc} < r$, т. е., согласно условию (7.41),

$$\beta > \sqrt{\xi \frac{m_e}{m_i}}. \quad (7.49)$$

Нам нужно найти связь между средним значением градиента температуры $S_0 = -\left\langle \frac{dT_0}{dx} \right\rangle$ и потоком тепла q_T. Величина $S_0 = q_T \nu + \sum_m \rho_m x_m \left\{ \int_0^1 \left(\frac{dT_0}{dx}\right)_m dt - q_T \nu \right\}$, где ρ_m — плотность конвекционных ячеек индекса m, т. е. их число на единице длины,

$\left(\frac{dT_0}{dx}\right)_m$ — найденное выше значение (7.47) и (7.48) для градиента внутри конвекционной ячейки. Величина ρ_m может быть найдена следующим образом. Пусть $q = m/n$, При изменении n на Δn q меняется на $\Delta q = -\frac{m}{n^2}\Delta n = -q^2\frac{\Delta n}{m}$. Но $\Delta q = q'\Delta x$ и, следовательно, число дробей вида $\frac{m}{n}$ на единице длины равно $\frac{\Delta n}{\Delta x} = \frac{m}{q^2}q'$. Однако среди дробей вида $\frac{m}{n}$ часть дробей является сократимыми, т. е. они представляют собой высшие гармоники интересующих нас основных мод в каждой конвекционной ячейке. Пусть P_1 — вероятность попасть на несократимую дробь; P_2 — вероятность того, что дробь сократится только на 2, и т. д. Очевидно, что вероятность $P_s = \frac{1}{s^2}P_1$, т. е. она равна произведению вероятностей $1/s^2$ того, что и числитель, и знаменатель делятся на s, на вероятность P_1 того, что после сокращения на s останется несократимая дробь. Из условия нормировки $\sum_1^\infty P_s = P_1\sum_{s=1}^\infty \frac{1}{s^2} = \frac{\pi^2}{6}P_1 = 1$ находим $P_1 = 6/\pi^2$. Таким образом,

$$\rho_m = \frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{q'}{q^2}m \tag{7.50}$$

и, следовательно,

$$S_0 = q_T\nu + \frac{\pi^2}{6}\frac{q'}{q^2}r\left(\frac{AS_0}{\alpha}\right)^{1/3}\sum_{m=1}^{m_c} m^{1/3}\left\{\int_0^1\left(\frac{dT_0}{dx}\right)_m dt - q_T\nu\right\}. \tag{7.51}$$

Подставляя сюда вместо $\left(\frac{dT_0}{dx}\right)_m$ найденные выше значения (7.47), (7.48) и заменяя суммирование по m интегрированием, получаем с учетом $g_m = a_0\left(\frac{m_c}{m}\right)^{2/3}$

$$\sum_{m=1}^{m_c} m^{1/3}\left\{\int_0^1\left(\frac{dT_0}{dx}\right)_m dt - q_T\nu\right\} \cong -q_T\nu\frac{3}{8}m_c^{4/3} = -\frac{3}{8}\cdot\frac{A^2q_T^3\nu^5 r}{a_0^2}\left(\frac{AS_0}{\alpha}\right)^{2/3}.$$

Отсюда находим

$$S_0 = q_T\nu - \frac{\pi^2}{16}\cdot\frac{q'}{q^2a_0^2}A^2q_T^2\nu^5\frac{AS_0}{\alpha}r^3,$$

т. е.

$$S_0 = -\frac{dT_0}{dr} = \frac{\nu}{1+\frac{\pi^2}{16}\frac{q'A^3r^3}{q^2a_0^2\chi_\perp^5\alpha}q_T^3}q_T. \tag{7.52}$$

Этой формулой можно пользоваться только при условии, что второе слагаемое в знаменателе меньше единицы, так как в противном случае необходимо учитывать перекрытие конвекционных ячеек, и роль поперечной теплопроводности для более крупных ячеек будет играть конвекция в мелких ячейках. В самом деле, из выражения (7.52) следует, что при увеличении $\nu = 1/\chi_\perp$, т. е. при уменьшении поперечной теплопроводности, градиент температуры S_0 при заданном потоке q_T сначала возрастает с ν, а затем, как только второе слагаемое в знаменателе станет порядка единицы, начнет очень быстро убывать. Это убывание явно не реально и связано с тем, что мы не учитывали взаимодействия между ячейками.

Рассмотрим более подробно взаимодействие перекрывающихся ячеек. Выделим некоторую группу ячеек с заданным азимутальным числом m. Ячейки этой группы взаимодействуют как с более крупномасштабными ($m' < m$), так и с мелкомасштабными возмущениями ($m' > m$). Взаимодействие с возмущениями, масштаб которых значительно меньше рассматриваемого, т. е. $m' \gg m$, сводится, очевидно, просто к повышенной теплопроводности, так как для таких возмущений рассматриваемое нами возмущение играет роль «фона», другими словами, оно не отличимо от усредненного распределения T_0. В свою очередь, действие возмущения m на m', а также возмущений $m' \ll m$ на m, сводится к макроскопическому течению со скоростью v_0, которую приближенно можно считать постоянной в пределах рассматриваемой ячейки. Таким образом, если пренебречь изменением характера взаимодействия возмущений при $m' \sim m$, то с учетом взаимодействия уравнение (7.17) для ячейки номера m можно записать в виде

$$\frac{AT_m}{x}\frac{d}{dx}(T_{0m}+T_m) = -\alpha m^2 x^2 T_m + \frac{d}{dx}\left(\chi_m \frac{dT_{0m}}{dx} + \right.$$
$$\left. + \chi_m \frac{dT_m}{dx}\right) - v_{0m}\frac{dT_m}{dx}, \qquad (7.53)$$

где $T_m \equiv T_+$; χ_m — эффективный коэффициент теплопроводности, который определяется всеми возмущениями с $m' > m$; v_{0m} — эффективная конвекционная скорость, создаваемая возмущениями с $m' < m$; T_{0m} — средняя температура вблизи рассматриваемой ячейки [в уравнении (7.53) мы положили приближенно $l = 1/2$, так что $T_+ = -T_-$]. Кроме того, для простоты, мы пренебрегли теплопроводностью вдоль y, хотя она и вносит вклад того же порядка, что и теплопроводность вдоль x.

Рассмотрим сначала линейное приближение

$$\frac{AT_m}{x}\cdot\frac{dT_{0m}}{dx} = -\alpha m^2 x^2 T_m + \frac{d}{dx}\left(\chi_m\frac{dT_m}{dx} + \chi_m\frac{dT_{0m}}{dx}\right) - v_{0m}\frac{dT_m}{dx}. \qquad (7.54)$$

Тепловой поток q_T можно представить в виде

$$q_T = -\chi_\perp \frac{dT_0}{dx} + \sum_m \frac{1}{2} v_m T_m = -\chi_m \frac{dT_{0m}}{dx} + \\ + \sum_{m'<m} \frac{1}{2} v_{m'} T_{m'} + \frac{1}{2} v_m T_m, \qquad (7.55)$$

где χ_m — эффективная теплопроводность, которая определяется высшими ($m' > m$) конвективными ячейками. Величина χ_m, вообще говоря, является быстро меняющейся функцией x. Однако соотношения (7.54) и (7.55) можно усреднить по x (т. е. по быстрым флуктуациям). При этом войдут, в частности, средние значения $\left\langle \chi_m \frac{dT_m}{dx} \right\rangle$ и $\left\langle \chi_m \frac{dT_{0m}}{dx} \right\rangle$, но из соотношения (7.55) видно, что $\chi_m \frac{dT_{0m}}{dx}$ не содержит быстро осциллирующей по x части. Аналогичное утверждение относится к $\chi_m \frac{dT_m}{dx}$, что можно установить интегрированием уравнения (7.54) по x. Следовательно,

$$\frac{dT_m}{dx} = \chi_m^{-1} \left\langle \chi_m \frac{dT_m}{dx} \right\rangle; \quad \frac{dT_{0m}}{dx} = \chi_m^{-1} \left\langle \chi_m \frac{dT_{0m}}{dx} \right\rangle.$$

Усредняя эти соотношения, получаем $\left\langle \chi_m \frac{dT_m}{dx} \right\rangle = \langle \chi_m^{-1} \rangle^{-1} \left\langle \frac{dT_m}{dx} \right\rangle$ и аналогично для $\frac{dT_{0m}}{dx}$. Таким образом, в соотношениях (7.54) и (7.55) под всеми величинами можно понимать усредненные по мелкомасштабным флуктуациям ($m' \gg m$) значения, и при этом под χ_m можно подразумевать среднее значение в смысле $\langle \chi_m^{-1} \rangle^{-1}$.

В выражении (7.55) сумму по крупномасштабным пульсациям ($m' < m$) приближенно можно считать постоянной, а в уравнении (7.54) вместо $\chi_m \frac{dT_{0m}}{dx}$ подставить $\frac{AT_m^2}{2x}$. В линейном приближении это слагаемое следует опустить. Производя далее замену переменных

$$t = x/x_m; \qquad V_m(t) = A\chi_m^{-1} T_m = Z_m(t) \exp\left(\frac{v_{0m} x_m}{2\chi_m} t\right), \qquad (7.56)$$

приведем уравнение (7.54) к виду

$$\frac{d^2 Z_m}{dt^2} + g_m \left(\frac{1}{t} - t^2\right) Z_m - b_m Z_m = 0, \qquad (7.57)$$

где

$$g_m = A x_m \chi_m^{-1} \frac{dT_{0m}}{dx}; \quad b_m = v_{0m}^2 x_m^2 / 4\chi_m^2.$$

Пренебрегая флуктуациями, будем подразумевать под $\frac{dT_{0m}}{dx}$ и v_{0m}^2 усредненные по крупномасштабным ячейкам значения. Рассмотрим величины g_m и b_m. Эффективный коэффициент теплопроводности χ_m является, очевидно, монотонно убывающей функцией m, стремящейся к своему предельному значению $\chi_\perp$ при $m \to \infty$. Величина x_m также убывает с m, а v_{0m}^2, наоборот, растет с m.

Допустим теперь, что g_m велико. Тогда основной уровень уравнения (7.57) соответствует функции, локализованной в области $t < g_m^{-1}$, так что во втором слагаемом можно пренебречь t^2 по сравнению с t, и уравнение (7.57) примет вид уравнения Шредингера для атома водорода. Основной уровень появляется при $b_m = g_m^2/4$, и только при $\sqrt{b_m} < g_m/2$ имеет место неустойчивость. Подставляя приведенные выше значения для g_m и b_m, можно записать условие развития конвекции в виде

$$v_{0m} < A \frac{dT_{0m}}{dx} . \qquad (7.58)$$

Это условие не зависит ни от χ_m, ни от x_m.

Если условие (7.58) выполнено, то величина g_m еще не определена. Чтобы ее определить, нужно независимым от (7.57) соотношением установить связь между g_m и b_m. Заметим, что вклад в конвекционный поток ячеек индекса m пропорционален $\rho_m T_m^2 / x_m \sim m V_m^2 / \chi_m^2 x_m$, и так как он должен убывать с m, а величина $m\chi_m^{-2} x_m^{-1}$ растет с m, то V_m должно убывать с ростом m. Отсюда следует, что возмущения с высоким номером m являются лишь слегка надкритическими.

Заметим, далее, что при больших g_m собственное решение Z_m уравнения (7.57) ведет себя как $\exp\left(-\frac{|v_{0m}|x_m}{2\chi_m} t\right)$ при $\frac{1}{g_m} < t < 1$, и, следовательно, при $v_{0m} < 0$ функция V_m, согласно выражению (7.56), локализована в области $t \sim g_m^{-1}$, а при $v_{0m} > 0$ — в области $t \sim 1$. Соответственно, при $v_{0m} > 0$ амплитуда возмущений индекса m должна быть меньше, чем при $v_{0m} < 0$. Не вдаваясь в детали этого различия, для определенности положим $v_{0m} > 0$. При этом область локализации $t \sim 1$, и чтобы не загромождать выкладок, выберем в дальнейшем некоторый определенный профиль для V_m (главная задача состоит в нахождении амплитуд пульсаций, а не их профиля). Если считать, что g_m близко к критическому значению g_m^c, при котором только что начинает развиваться неустойчивость, то, так же как при переходе от уравнения (7.42) к уравнению (7.44), можно приближенно заменить в уравнении (7.53) линейную

часть на $(g_m - g_m^c) V_m \left(\frac{1}{t} - t^2\right)$, и тогда уравнение (7.53) приводится к точно такому же виду, как и (7.44), а именно

$$V_m^2 + V_m = 2(g_m - g_m^c)\, t\,(t - t^3), \tag{7.59}$$

где $g^c{}_m \neq a_0$ и связано с a_0 соотношением, которое аппроксимируется следующим образом: $b_m = \frac{1}{4} g_m^c (g_m^c - a_0)$. При $b_m \to 0$ получаем $g_m^c = a_0$, а при $g_m^c \gg a_0$ имеем $b_m = (g_m^c/2)^2$.

Выразим χ_m и v_{0m} через V_m:

$$v_{0m}^2 = \sum_{m'<m} \rho_{m'} \frac{\chi_{m'}^2}{2x_m'} \int_0^1 V_{m'}^2 \frac{dt}{t^2}; \tag{7.60}$$

$$\chi_m S_0 = \sum_{m'>m} \rho_{m'} \frac{\chi_{m'}^2}{2A} \int_0^1 V_{m'}^2 \frac{dt}{t}. \tag{7.61}$$

Если для $V_{m'}$ приближенно выбрать некоторый, не зависящий от m' профиль, то можно считать $\int_0^1 V_{m'}^2 \frac{dt}{t} = d_0 \int_0^1 V_{m'}^2 \frac{dt}{t^2}$, где d_0 — некоторая константа порядка единицы, и тогда

$$S_0 \frac{d\chi_m}{dm} = -\rho_m \frac{\chi_m^2}{2A} \int_0^1 V_m^2 \frac{dt}{t} = -\frac{x_m d_0}{A} \cdot \frac{dv_{0m}^2}{dm}. \tag{7.62}$$

При не очень больших m величина v_{0m}^2 мала, и, следовательно, можно воспользоваться прежним решением (7.44), согласно которому при $g_m \gg a_0$ приближенно $V_m^2 = 2g_m t(1 - t^3)$. Отсюда, учитывая, что $g_m = AS_0 x_m/\chi_m$, имеем

$$\frac{d\chi_m}{dm} = -\frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{q' r \xi^{1/3}}{q^2} m^{1/3} \chi_m. \tag{7.63}$$

Если учесть приближенно поперечную теплопроводность заменой g_m на $g_m - a_0$, то вместо уравнения (7.63) получим

$$\frac{d\chi_m}{dm} = -\frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{q' r \xi^{1/3}}{q^2} m^{1/3} \chi_m \left(1 - \frac{a_0 m^{2/3}}{AS_0 r \xi^{1/3} \chi_m}\right). \tag{7.64}$$

В переменных $u = 8a_0 q \chi_m/\pi \sqrt{6q' r\xi} AS_0 r$, $\tau = (m/m_0)^{4/3}$, где $m_0^{4/3} = 32q^2/3\pi^2 q' r \xi^{1/3}$, получаем уравнение

$$\frac{du}{d\tau} = -u(1 - u\sqrt{\tau}).$$

Подстановкой $u = we^{-\tau}$ приводим его к виду $\frac{dw}{d\tau} = \sqrt{\tau}\, e^{-\tau} w^2$, откуда находим

$$u = \frac{w_0 e^{-\tau}}{1 - w_0 \int\limits_0^\tau \sqrt{\tau}\, e^{-\tau} d\tau}. \qquad (7.65)$$

Единственное решение, которое при $\tau \to \infty$ стремится к $\tau^{-1/2}$, получается при $w_0 = \int\limits_0^\infty \sqrt{\tau}\, e^{-\tau} d\tau = \sqrt{\pi}/2$ и

$$u = e^{-\tau} \left\{ \int\limits_\tau^\infty \sqrt{\tau}\, e^{-\tau} d\tau \right\}^{-1}. \qquad (7.66)$$

Таким образом, $\chi_0 = \frac{\sqrt{6\pi\xi q' r}\, AS_0 r}{4a_0 q}$.

Подставляя сюда $a_0 = 2{,}9$; $\xi = AS_0/\alpha r^3$; $\alpha = \chi_\parallel \left(\frac{q' H_\phi}{qrH_0}\right)^2$; $A = \frac{3}{2} \frac{qcj_0}{q' H_\phi T_0 \sigma_0}$ и вспоминая, что $q = \frac{2\pi r H_z}{LH_\phi}$, получаем приближенно

$$\chi_0 = \frac{L}{3\pi} \cdot \frac{q^{5/2}}{q'^2 \sqrt{\chi_\parallel}} \left(\frac{cj_0}{T_0 H_\phi \sigma_0} \cdot \frac{dT_0}{dr} \right)^{3/2}. \qquad (7.67)$$

Это и есть искомое нами выражение для коэффициента турбулентной температуропроводности. Заметим, что выражение (7.67) можно переписать в виде

$$\chi_0 \cong \sqrt{\frac{2q}{3\xi}} \left(\frac{q}{q'r}\right)^{7/2} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^4 \frac{1}{\chi_\parallel} \left(\frac{cE_0}{H_z T_0} \frac{dT_0}{dr} \right)^2, \qquad (7.68)$$

сходным с предлагавшимся ранее оценочным соотношением [20]

$$\chi_0 \sim 10 \left(\frac{L}{2\pi}\right)^4 \frac{1}{\chi_\parallel} \left(\frac{cE_0}{H_z T_0} \cdot \frac{dT_0}{dr} \right)^2.$$

Как видно, оценка справедлива при $q \sim 1$; $q'r \sim 1$; $\xi \sim 10^{-2}$.

Оценим теперь величину v_{0m}, воспользовавшись для этой цели соотношением (7.62). Подставив в него найденное выше выражение для χ_m и проинтегрировав по m с учетом $v_{0m} = 0$ при $m = 0$, находим

$$v_{0m} = \frac{A^2 S_0^2}{d_0 a_0} \int\limits_0^\tau \frac{\sqrt{\pi}}{2} u(\tau) \sqrt{\tau}\, d\tau, \qquad (7.69)$$

где $\tau = (m/m_0)^{4/3}$.

Отсюда видно, что при $m \sim m_0$ величина v_{0m} становится порядка AS_0, т. е. того же порядка, что и конвекционная скорость внутри ячеек меньшего масштаба. Это значит, что со значения $m \sim m_0$ начинает играть роль эффект подавления мелкомасштабных ячеек за счет течения в крупномасштабных. Вследствие этого эффекта характер конвекции при $m > m_0$ сильно усложняется.

Однако это усложнение практически никак не сказывается на ячейках основного масштаба $m \sim m_0$; для этих ячеек, только что начинающих перекрываться, можно пренебречь эффектом подавления мелкомасштабных ячеек крупномасштабными из-за малости области перекрытия, а эффект от мелкомасштабных пульсаций можно учесть введением макроскопического коэффициента турбулентной теплопроводности χ_m. При этом коэффициент χ_{0m}, соответствующий значению $m = m_0$, не более чем вдвое отличается от χ_0.

Рассмотренная картина приводит нас к следующему простому методу приближенного расчета коэффициентов турбулентного переноса: с самого начала можно ввести в уравнения движения эффективные коэффициенты переноса, которые учитывают эффект от мелкомасштабных пульсаций, и подобрать затем их величину из условия обращения в нуль инкремента нарастания возмущений с максимальной областью локализации.

Полученные таким образом значения коэффициентов переноса близки к полным, поскольку они учитывают вклад от всех ячеек, кроме самых крупных. Этот метод положен в основу последующего рассмотрения.

Выше для простоты мы положили $n = \text{const}$. При наличии градиента плотности тепловая конвекция вместе с переносом тепла приводит и к диффузии. Более того, поскольку на градиенте плотности также может развиваться токово-конвективная неустойчивость, градиент плотности приводит к дополнительной конвекции с несколько большей локализацией ячеек (вспомним, что локализация возмущений плотности может быть порядка ρ_i/θ). Но поскольку при не очень малом θ и достаточно высокой температуре T соответствующий эффект диффузии невелик, то отложим его рассмотрение до § 10.

В заключение этого параграфа отметим еще, что всюду для плотности ячеек ρ_m мы брали ее среднее значение. Вблизи от особых точек, соответствующих малым значениям m, ячейки с более высокими m', как нетрудно установить, почти накладываются друг на друга. Вследствие этого эффективная плотность ρ_m вблизи таких точек может заметно отличаться от средней, что может приводить к регулярным изменениям χ_0 вблизи особых точек с малыми m, т. е. к эффекту типа «магических чисел» [41]. Мы не будем здесь останавливаться на этом вопросе.

§ 8. ПЕРЕНОС ТЕПЛА И ЧАСТИЦ ИЗ-ЗА ТЕМПЕРАТУРНОЙ ДРЕЙФОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

1. Турбулентная теплопроводность

Перейдем к исследованию аномальной теплопроводности, устанавливающейся за счет температурной дрейфовой неустойчивости. В линейном приближении эта неустойчивость была рассмотрена в § 3.

Для простоты разберем сначала случай, когда в равновесном состоянии плотность постоянна ($n_0 = \text{const}$) и имеется лишь градиент температуры. Будем считать, кроме того, что $\rho_i \ll \theta a$ и, следовательно, отдельные ячейки дрейфовых колебаний являются узко локализованными, так что в пределах ячейки градиент средней температуры можно считать постоянным. Представим плотность в виде $n = n_0 + n'$. При $\rho_i \ll \theta a$ возмущение плотности мало, $n' \ll n_0$, и поэтому в пренебрежении продольным сопротивлением и резонансными электронами можно считать

$$\varphi = \frac{T_e}{e} \cdot \frac{n'}{n_0}. \tag{8.1}$$

При $\theta \ll 1$ ширина конвекционных ячеек значительно превосходит ρ_i. В этом случае, которым мы здесь и ограничимся, эффектами конечного ларморовского радиуса можно пренебречь и для ионов воспользоваться кинетическим уравнением в дрейфовом приближении:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_\parallel \mathbf{h}\nabla f + \frac{cT_e[\mathbf{h}\nabla n']}{eHn_0}\nabla_\perp f - \frac{e}{m}\mathbf{h}\nabla\varphi\frac{\partial}{\partial v_\parallel} f = 0. \tag{8.2}$$

Здесь учитывается соотношение (8.1)

Представим функцию распределения f в виде

$$f = f_0 + f' \equiv f_0 + n'\psi, \tag{8.3}$$

где f_0 — максвелловская равновесная функция, а функция $\psi(\mathbf{v})$ — нормирована на единицу, $\int \psi d\mathbf{v} = 1$.

Задача заключается в исследовании нелинейных колебаний, развивающихся вследствие неустойчивости. При этом прежде всего следует обратить внимание на существенное различие рассматриваемого здесь процесса от конвекции, изучавшейся нами в § 7. Это различие имеет место и в линейном приближении: в то время как в токово-конвективной неустойчивости инкремент нарастания малых возмущений слабо зависел от волнового числа k (точнее, m, n), в температурной неустойчивости инкремент γ пропорционален k (и порядка частоты ω).

Другими словами, при температурной неустойчивости прежде всего должны развиваться мелкомасштабные колебания. Кроме того, поскольку характерное время $t_k \sim \gamma_k^{-1}$ заметного

изменения амплитуды возмущения масштаба k меньше времени искажения возмущений более крупного масштаба, эффект захвата мелкомасштабных возмущений крупномасштабными, который в случае токово-конвективной неустойчивости приводил к упорядоченной картине течения в каждой ячейке, в данном случае должен отсутствовать. Поэтому должно развиваться хаотическое турбулентное движение. Максимальный масштаб соответствующих турбулентных пульсаций определяется шириной локализации возмущений и по порядку величины равен $\lambda_{макс} = \lambda_0 \sim \rho_i/\theta$. Соответствующие этому масштабу возмущения температуры T' и плотности n' определяются, очевидно, величиной изменения T и n на длине λ_0, т. е. $T'_{\lambda_0} \sim T\lambda_0/a$, $n'_{\lambda_0} \sim n\lambda_0/a$. Что касается возмущений меньших масштабов λ, то они могут нарастать не только на основном градиенте средней температуры, но и на тех градиентах возмущений больших масштабов, которые возникают в результате неустойчивости.

Таким образом, для каждого данного масштаба λ возмущения с большей длиной волны играют роль источника их развития, а возмущения с меньшей длиной волны, развиваясь на возмущении λ, приводят к его затуханию. Другими словами, в рассматриваемой турбулентности, как и в обычной турбулентности несжимаемой жидкости, должен иметь место поток по спектру в область малых λ. Если бы движение плазмы было несжимаемым и затухание отсутствовало, то интеграл $\int T^2 d\mathbf{r}$ оставался бы постоянным, т. е. он был бы аналогичен полной энергии турбулентной жидкости, сохраняющейся в отсутствие вязкости. В этом случае величину пульсации T'_λ масштаб λ можно было бы найти из следующих соображений.

Так как T'^2_λ при движении по спектру в сторону меньших λ остается постоянным, то должен быть постоянным поток $\frac{1}{\tau_\lambda} T'^2_\lambda$, где τ_λ — характерное время деформации T_λ. Но величина τ_λ пропорциональна произведению волнового числа на градиент пульсаций несколько большего масштаба, т. е. она пропорциональна T_λ/λ^2. Отсюда находим

$$T_\lambda \sim \lambda^{2/3} \quad \text{или} \quad T'^2_k dk \sim \frac{dk}{k^{7/3}}, \tag{8.4}$$

т. е. быстро спадающий с k спектр.

В действительности колебания являются сжимаемыми. Однако поскольку систематическое сжатие или разрежение при движении по k отсутствует, то в среднем сжимаемость не оказывает влияния на спектр. Более существенным является затухание. Нелинейное взаимодействие колебаний приводит к потоку в область коротких вдоль магнитного поля волн, где имеет место затухание Ландау на ионах, из-за чего спектр должен убывать еще быстрее, чем дает соотношение (8.4).

Затухание на ионах является, по-видимому, и основным механизмом диссипации самых коротких возмущений масштаба $\lambda \lesssim \rho_i$.

Впрочем, наша задача состоит не столько в отыскании спектра пульсации, сколько в определении эффективного коэффициента температуропроводности χ. Для определения χ, пользуясь аналогией с токово-конвективной неустойчивостью, поступим следующим образом. Добавим в уравнение (8.2) слагаемое, учитывающее эффективное затухание, которое производится возмущениями меньшего масштаба:

$$\frac{\partial f'}{\partial t} + v_\parallel \mathbf{h}\nabla f' + \frac{cT_e[\mathbf{h}\nabla n']}{eHn_0}\nabla_\perp f - \frac{e}{m}\mathbf{h}\nabla\varphi\frac{\partial}{\partial v_\parallel}f = \operatorname{div}(\chi\nabla_\perp f'). \tag{8.5}$$

Величина χ должна быть различной для различных масштабов, увеличиваясь с увеличением длины волны. Подберем теперь χ таким образом, чтобы все возмущения, кроме одного-единственного возмущения с максимальным масштабом, были затухающими. Найденное таким образом χ можно приближенно считать макроскопическим коэффициентом температуропроводности. В самом деле, при этом учитывается эффект от всех возмущений, кроме возмущений максимального масштаба. Можно также учесть вклад от возмущений максимального масштаба, например, по квазилинейной теории. Но если χ выбрано таким, что инкремент этих возмущений обращается в нуль, то амплитуда их пренебрежимо мала, т. е. как бы учитываются все возмущения. В силу малости амплитуды возмущения максимального масштаба в третьем слагаемом уравнения (8.5) можно заменить f на f_0, в результате приходим к линейному уравнению, которое будем решать приближенно.

Следует отметить, что вид слагаемого в правой части уравнения (8.5) выбран нами, строго говоря, неверно. В самом деле, рассматриваемые колебания имеют продольную фазовую скорость $\omega/k_\parallel \sim v_i \ll v_e$. Поэтому электроны должны быть распределены вдоль силовых линий по Больцману. При наличии магнитных поверхностей распределение Больцмана должно иметь место на всей магнитной поверхности, и из уравнения равновесия для электронов

$$\nabla p_e = -en\nabla\varphi - \frac{en}{c}[\mathbf{vH}] \tag{8.6}$$

следует, что нормальная к магнитной поверхности компонента скорости электронов должна обращаться в нуль. Другими словами, без учета инерции электронов, или резонансного взаимодействия их с волнами, или трения о ионы диффузия поперек магнитного поля отсутствует. Поэтому нелинейные члены, действие которых учтено членом в левой части уравнения (8.5), в направлении оси x могут давать лишь потоки тепла (и других

высших моментов функции распределения), но не плотности. Поэтому более точно x-компоненту потока следовало написать в виде $-\chi n' \nabla\psi$, а не в виде $-\chi \nabla f'$.

Однако поскольку в колебаниях относительное изменение функции распределения по скоростям порядка относительного изменения плотности, мы пренебрежем этим эффектом анизотропии и будем лишь помнить, что в рассматриваемом нами приближении колебания не приводят к диффузии плазмы поперек магнитных поверхностей.

Подставим в уравнение (8.5) возмущение f' в виде $f' \exp(-i\omega t + ik_y y + ik_z z)$, заменим f на f_0, проинтегрируем все уравнение по переменной $v_\perp$, которая входит лишь как параметр, и получим

$$+ i(\omega - k_\parallel v_\parallel) f' + ik_y v_0 f_0 \left(\frac{mv_\parallel^2}{2T} - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{n_0} \int f' dv_z - \chi_\perp k_y^2 f' + \\ + ik_\parallel \frac{T_e}{m} \cdot \frac{n'}{n_0} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial v_\parallel} = -\chi_\perp \frac{d^2 f'}{dx^2}, \qquad (8.7)$$

где $v_0 = \frac{e}{cH} \cdot \frac{dT}{dx}$ — дрейфовая скорость.

Нам предстоит найти такое значение $\chi_\perp$, при котором только одно решение соответствовало бы условию $\mathrm{Im}\,\omega = 0$, а все остальные решения были бы затухающими. Чтобы упростить выкладки, воспользуемся приближенным методом, напоминающим метод разделения переменных. Добавим в левую и правую части уравнения (8.7) член $\chi_\perp u(x) f'$ и подберем его таким образом, чтобы правая часть была мала. Тогда в нулевом приближении имеем

$$i(\omega - k_\parallel v_\parallel) f' - ik_y v_0 f_0 \left(\frac{mv_\parallel^2}{2T} - \frac{1}{2}\right) \frac{n'}{n^0} - \chi_\perp k_y^2 f' + \\ + \chi_\perp u f' + ik_\parallel \frac{T_e}{m} \cdot \frac{n'}{n_0} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial v_\parallel} = 0. \qquad (8.8)$$

Если выразить отсюда f' через n' в виде $f' = \frac{A}{B} n'$, где $A = k_y v_0 f_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{mv_\parallel^2}{2T}\right)$, $B = \omega - k_\parallel v_\parallel + i\chi_\perp k_y^2 - i\chi_\perp u$, и воспользоваться затем соотношением $\int f' dv_\parallel = n'$, то получим фактически дисперсионное уравнение для определения ω в линейном приближении. Обозначив γ_0, ω_0 — «локальные» инкремент и частоту дрейфовых колебаний в квазиклассическом приближении (т. е. при $k_x \to 0$), получим

$$\omega + i\chi_\perp k_y^2 - i\chi_\perp u = \omega_0 + i\gamma_0. \qquad (8.9)$$

Величины $\omega_0(x)$, $\gamma_0(x)$ были найдены нами ранее (см. рис. 7).

Таким образом, соотношение (8.9) определяет функцию $u(x)$:

$$u(x) = k_y^2 - \frac{\gamma_0 + i\omega_0}{\chi_\perp} + \frac{i\omega}{\chi_\perp}. \tag{8.10}$$

Для нахождения следующего приближения $f'_{(1)}$ необходимо решить уравнение типа (8.8) с правой частью:

$$f'_1 - \frac{A}{B} n'_{(1)} = \frac{\chi_\perp}{B}\left\{uf' - \frac{d^2f'}{dx^2}\right\}, \tag{8.11}$$

где A и B — введенные выше функции. Если проинтегрировать уравнение (8.11) по $v_\parallel$, то с учетом дисперсионного соотношения (8.9) в левой части получится нуль. Это интегральное соотношение является условием разрешимости, обычным при использовании теории возмущений. Будем приближенно считать величину $B = \text{const}$ и вынесем ее из-под интеграла, что вполне соответствует принятой нами выше точности, когда мы пренебрегли анизотропией переноса вдоль и поперек магнитной поверхности. В этом приближении получаем

$$\frac{d^2n'}{dx^2} - u(x)\, n' = 0 \tag{8.12}$$

или в другой форме

$$\chi_\perp \frac{d^2n'}{dx^2} - k_y^2\chi_\perp n' + (\gamma_0 + i\omega_0) n' = i\omega n'. \tag{8.13}$$

Отсюда видно, что мы как бы добавляем к локальному инкременту величину $\chi_\perp \Delta_\perp$ и должны затем подобрать $\chi_\perp$ таким образом, чтобы результирующая частота ω стала действительной.

Перейдем в уравнении (8.13) к безразмерным переменным:

$$\xi = \frac{k_\parallel v_i}{\omega_T^*} = \frac{\theta v_i}{a v_0} x; \quad \nu = \frac{i\omega - k_y^2\chi_\perp}{k_y v_0}; \quad \nu_0 = (\gamma_0 + i\omega_0)/k_y v_0;$$

$\lambda = \chi_\perp \left(\frac{\theta v_i}{a v_0}\right)^2 / k_y v_0$. Тогда уравнение (8.13) запишется в виде

$$\lambda \frac{d^2n'}{d\xi^2} + \nu_0 n' = \nu n'. \tag{8.14}$$

Но из рассмотрения неустойчивости в линейном приближении следует, что ν_0 можно приближенно аппроксимировать функцией

$$\nu_0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}|\xi| + i|\xi| \tag{8.15}$$

(см. рис. 7). Подставляя это выражение в уравнение (8.14) и вводя новую переменную $t = \xi + \xi_0$, где $\xi_0 = \dfrac{-\nu + 1/4}{-\frac{1}{2} + i}$,

приводим его к виду (при $\xi > 0$)

$$\frac{d^2n'}{dt^2} + btn' = 0. \qquad (8.16)$$

Здесь $b = \left(-\frac{1}{2} + i\right)\lambda^{-1}$.

Решение уравнения (8.16), убывающее при $\xi \to \infty$, выражается через функцию Эйри $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \cos\left(ux + \frac{u^2}{3}\right) du$:

$$n' = \Phi\left(\sqrt[3]{b}\right). \qquad (8.17)$$

Так как функция v_0 является четной относительно ξ, то решение на всей оси ξ должно быть либо четным, либо нечетным относительно ξ. Это значит, что n' должно либо иметь максимум, либо обращаться в нуль при $\xi = 0$. Нас интересует решение, имеющее минимальное число узлов на оси ξ. Поэтому естественно выбрать решение, у которого в точку $\xi = 0$ попадает первый максимум функции (8.17). Как известно, первый максимум функции Эйри $\Phi(x)$ находится в точке $x = s = -1{,}02$.

Таким образом, $\sqrt[3]{b}\,\xi_0 = s$ и, следовательно,

$$\lambda = \frac{(1/4 - \nu)^3}{(i - 1/2)^2 s^3}. \qquad (8.18)$$

Переходя к обычным переменным, получаем отсюда

$$\chi_\perp = \left(\frac{av_0}{\theta v_i}\right)^2 k_y v_0 \frac{1}{s^3\left(i - \frac{1}{2}\right)^2}\left(\frac{1}{4} - k_y\frac{\chi_\perp}{v_0} - \frac{i\omega}{k_y v_0}\right)^3. \qquad (8.19)$$

Величина ω находится из условия действительности $\chi_\perp$ и оказывается равной $\omega = 0{,}86 k_y v_0\left(\frac{1}{4} - \frac{k_y\chi_\perp}{v_0}\right)$. Подставляя это значение для ω в выражение (8.19) и находя затем максимум $\chi_\perp$ по k_y, получаем

$$\chi \cong \frac{1}{40}\cdot\frac{av_0^2}{\theta v_i}. \qquad (8.20)$$

Это и есть искомая величина турбулентной температуропроводности при $n_0 = \text{const}$. Напомним, что здесь $v_0 = \frac{e}{cH}\cdot\frac{dT}{dx}$; $v_i = \sqrt{\frac{2T}{m_i}}$; $\theta = \frac{a}{L} r \frac{d\iota}{dr} = \frac{a}{Rq^2}\cdot\frac{dq}{dr}$. Соответствующее оптимальное значение $k_y = \frac{v_0}{16\chi_\perp} \sim \pi/\Delta x$, где $\Delta x \sim \rho_i/\theta$

— ширина локализации ячейки. При этом $\xi_0 = -\frac{3}{8}\cdot\frac{1-0{,}86i}{1-2i}$, и решение (8.17) принимает вид

$$n' = \Phi\left(s\frac{\xi}{\xi_0}+s\right) \simeq \Phi[s+4{,}25(1-0{,}4i)\xi]. \qquad (8.21)$$

При наличии градиента плотности инкремент, а следовательно, и эффективный коэффициент температуропроводности χ уменьшается: если $0<\eta\equiv\frac{d\ln T}{d\ln n}<0{,}95$, то инкремент вообще равен нулю, а при $-1<\eta<0$ он экспоненциально мал. Приближенно учтем этот факт введением дополнительного фактора F в выражении (8.20), равного

$$F(\eta)=\begin{cases}1 \text{ при } |\eta|>2,\\ |\eta|-1 \text{ при } 1<|\eta|<2,\\ 0 \text{ при } |\eta|<1.\end{cases}$$

2. Взаимодействие ячеек (квазимоды)

Всюду выше при рассмотрении теплопроводности в ячейках максимального масштаба мы изучали конвекцию в одной-единственной крупномасштабной ячейке. Такой подход оправдан только в том случае, если крупномасштабные ячейки статистически независимы, т. е. конвекция в одной из них никак не коррелирована с конвекцией в соседних ячейках. В действительности же при очень малых размерах ячеек может иметь место их резонансная связь, и в этом случае пренебрегать взаимодействием ячеек нельзя. На возможность такой связи обратили внимание Робертс и Тейлор [42], которые показали, что уже в линейном приближении имеется возможность получения возмущения с большой областью локализации по x, если выбрать в качестве решения квазимоду — суперпозицию узколокализованных решений с одним и тем же азимутальным числом m, но различными k_z. Такие решения имеют различные точки локализации, и поэтому их можно «выстроить в ряд» вдоль r, «приставляя» одно решение к другому. Пусть $\varphi_1=\varphi_1(r-r_0)\,e^{ik_z z+im\vartheta}$ одно из таких локализованных решений. Тогда квазимода — решение с большой областью локализации может быть построено как

$$\varphi(z)=\int A(r_0)\,\varphi_1(r-r_0)\,e^{-ik_z z+im\vartheta}dr_0, \qquad (8.22)$$

где $A(r_0)$ — некоторая, плавно меняющаяся функция r_0, например, $A(r_0)=A_0e^{-(r_0-r_{00})^2/l^2}$, где l — ширина локализации квазимоды, а r_{00} — центр ее локализации.

Так как точка r_0 определяется из условия $k_\parallel=0$, т. е. $\frac{m}{r_0}H_\vartheta-k_zH_0=0$, то r_0 связано с k_z соотношением $k_z=\frac{m}{R_0}\times$

$\times \frac{1}{q(r_0)}$, и поэтому выражение (8.17) можно представить как суперпозицию решений с различными k_z. Предполагая, что $l \ll a$, можно положить $k_z = k_z^0 - k_y \frac{\theta}{a}(r_0 - r_{00})$, где k_z^0 отвечает точке локализации r_{00}. Тогда выражение (8.22) принимает вид

$$\varphi(r) = \int \varphi_1(r - r_0) B_0 e^{-(k_z - k_z^0)^2 L^2} e^{-ik_z z + im\vartheta} dk_z, \qquad (8.23)$$

где $B_0 = \text{const}$; $L^2 = \frac{a^2}{l^2 k_y^2}$; $r_0 = r_{00} - \frac{R_0 q^2}{mq'}(k_z - k_z^0)$.

Отсюда видно, что при увеличении l возрастает ширина локализации квазимоды в точке $z = 0$, но зато уменьшается длина локализации L вдоль магнитного поля, на которой фазы локальных возмущений близки друг к другу.

В тороидальной геометрии $k_z = n/R_0$ принимает только дискретный ряд значений, и поэтому квазимоды можно было бы получить наложением ячеек с близкими номерами n. Поскольку $q = m/n$, то расстояние δx между соседними ($\delta n = 1$) ячейками с одним и тем же азимутальным числом m определяется соотношением

$$q'\delta x \approx \frac{m}{n^2}\delta n \approx \frac{1}{m} q^2, \quad \text{т. е.} \quad \delta x \approx \frac{q^2}{q'} m^{-1}.$$

Как видим, при $q'/q \approx \frac{1}{a}$, $\delta x \approx q \frac{a}{m} \approx q k_y^{-1}$, т. е. $\delta x > k_y^{-1} \sim$ $\sim \rho_i/\theta$. Другими словами, ячейки с одним и тем же азимутальным числом m находятся друг от друга на расстоянии δx, превышающем их локализацию $\sim \rho_i/\theta$.

Однако это не означает, что резонансное взаимодействие ячеек в тороидальной геометрии должно отсутствовать. Дело в том, что вопрос о взаимодействии ячеек это, в сущности, вопрос нелинейного взаимодействия, и в рамках линейной теории его решать нельзя.

Нелинейное течение представляет собой суперпозицию многих мод, и если поблизости окажутся две или несколько ячеек с немного различными m и n, то можно думать, что они будут усиливать друг друга (как бы продолжать одна другую) в области ϑ, ζ, где их фазы $\left(m\vartheta - \frac{n}{R_0}\zeta\right)$ близки.

Другими словами, каждая ячейка может иметь в себе примесь соседней моды, которая должна усиливаться соседней ячейкой. Разумеется, этот эффект захвата в резонанс одной ячейки другой может проявиться только в том случае, если в заметной области изменения переменных ϑ, ζ фазы течения $m\vartheta - \frac{n}{R_0}\zeta$ в ячейках близки между собой, т. е. разности их

азимутальных $m - m'$ и продольных чисел $n - n'$ значительно меньше m, n. Так как число ячеек с азимутальными числами, меньшими или порядка m (и соответственно $n \sim m/q$), пропорционально m^2, то среднее расстояние между ячейками любых m, n, не превышающих заданные числа, порядка $\delta x \sim q'/m^2$. Следовательно, расстояние между резонансными ячейками всегда много больше $\delta x \sim q'/m^2 \sim \frac{1}{ak_y^2}$. Отсюда следует, что резонансное взаимодействие может иметь место только при $\rho_i/\theta \gg a/k_y^2 a^2$ или $ak_y = m \gg \sqrt{\rho_i/a\theta}$.

Наличие резонансной связи приводит к тому, что наиболее эффективный перенос тепла будет осуществляться укрупненными (слившимися) ячейками с поперечным размером $x \sim \frac{1}{k_y} \ll a\sqrt{\rho_i/a\theta}$. Этот размер может быть значительно больше локализации отдельной уединенной ячейки ρ_i/θ, но как мы видим, не больше, чем на фактор $\sqrt{\frac{\theta a}{\rho}}$. Другими словами даже при $\frac{\theta a}{\rho} \sim 10^2$ эффект резонансной связи вряд ли может увеличить коэффициент (8.20) более чем в несколько раз.

3. Турбулентная диффузия

При рассмотрении турбулентной теплопроводности мы считали электроны распределенными по Больцману и пренебрегали их диффузией. Но на самом деле наряду с теплопроводностью колебания должны приводить и к диффузии. Чтобы найти соответствующий коэффициент диффузии, учтем, что при развитых колебаниях потенциал φ имеет порядок величины $\frac{T}{e} x/a \sim \frac{T}{e}\rho_i/\theta a$, где x — ширина локализации ячейки. Поэтому электроны с продольными скоростями $v_\parallel < \sqrt{\frac{2\varphi}{m_e}} \sim v_e\sqrt{\frac{\rho_i}{\theta a}}$ попадают в существенно нелинейную область, поскольку они могут быть захвачены потенциальными «ямами» дрейфовых колебаний. Наоборот, в области $v_\parallel > v_e\sqrt{\rho_i/\theta a}$ электроны свободно пролетают над «горбами» потенциала φ, и диффузия возникает лишь за счет резонансного взаимодействия электронов с волнами, фазовая скорость которых совпадает со скоростью электронов. Поскольку амплитуда колебаний $\varphi \sim \frac{T}{e} \cdot \frac{\rho_i}{\theta a}$ заведомо мала по сравнению с T/e, то для описания диффузии на резонансных электронах можно использовать квазилинейное

приближение. В квазилинейном приближении в выражение для потока частиц

$$q_n = -D\frac{dn_0}{dx} = -\langle n'v_x'\rangle = -\left\langle \int f'd\mathbf{v}\,\frac{cE_y}{H}\right\rangle \qquad (8.24)$$

вместо возмущения f' можно подставить его выражение в линейном приближении

$$f_{\mathbf{k}}' = \frac{\mathrm{i}}{\omega - k_\parallel v_\parallel + \mathrm{i}0}\left\{\frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{eH}{cT}\cdot\frac{v_\parallel k_\parallel}{k_y}f_0\right\}\frac{cE_{y\mathbf{k}}'}{H}, \qquad (8.25)$$

где $f_{\mathbf{k}}'$ — фурье-компонента f', $E_{\mathbf{k}}$ — фурье-компонента электрического поля. Из выражений (8.24) (8.25) получаем по порядку величины

$$D \sim \int v_{\mathbf{k}}^2 \pi\delta(\omega - k_\parallel v_\parallel) f_0/n_0 d\mathbf{v}d\mathbf{k}, \qquad (8.26)$$

где $v_{\mathbf{k}}^2 = \left(\frac{cE_y}{H_0}\right)_{\mathbf{k}}^2$ — спектральная функция скорости v_x.

Учтем теперь, что $\chi \sim v_x^2/\omega \sim \int \frac{v_{\mathbf{k}}^2}{\omega_{\mathbf{k}}}d\mathbf{k}$ и что колебания сосредоточены в области фазовых скоростей $\omega/k_\parallel \sim v_i$. Тогда из выражения (8.26) получим

$$D \sim \int \frac{v_{\mathbf{k}}^2 d\mathbf{k}}{v_e k_\parallel} \sim \chi\frac{v_i}{v_e}\ln\frac{k_{\parallel\,\text{макс}}}{k_{\parallel\,\text{мин}}}, \qquad (8.27)$$

где v_e — средняя тепловая скорость электронов, а v_i — ионов, $k_{\parallel\,\text{мин}} \sim \omega/v_e$ — соответствует продольной фазовой скорости порядка v_e, а $k_{\parallel\,\text{макс}}$ соответствует фазовой скорости $v_e\sqrt{\rho_i/\theta a}$, ниже которой находится нелинейная область. Таким образом, вклад в диффузию от резонансных электронов не превышает величины

$$D \sim \chi\sqrt{\frac{m_e}{m_i}}\ln\sqrt{\frac{\theta a}{\rho_i}}. \qquad (8.28)$$

Что касается захваченных потенциальными ямами электронов, то, поскольку их доля от полного числа не превышает $\sqrt{\rho_i/\theta a}$ соответствующий вклад в коэффициент диффузии не превышает величины $\chi\sqrt{\rho_i/\theta a}$, а с учетом столкновений, которые стремятся восстановить максвелловское распределение электронов по скоростям, этот вклад еще меньше [на фактор $S\left(S + \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}\right)^{-1}$, где $S = \frac{\lambda_e\rho_i}{a^2}$]. Суммарный коэффициент

D по порядку величины равен

$$D \sim \left\{ \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \ln \sqrt{\frac{a\theta}{\rho_i}} + \frac{S}{S + \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}} \sqrt{\frac{\rho_i}{\theta a}} \right\} \chi. \quad (8.29)$$

Таким образом, коэффициент диффузии из-за температурной дрейфовой неустойчивости значительно меньше (примерно на порядок) коэффициента температуропроводности, подобно тому, как это имеет место при обычных кулоновских столкновениях. Малость D связана с тем, что электроны стремятся быть распределенными по Больцману, и их довольно трудно сдвинуть с магнитных поверхностей. Но если магнитные поверхности разрушены, то диффузия частиц будет идти одновременно с переносом тепла, и коэффициент D будет порядка χ.

§ 9. АНОМАЛЬНАЯ ДИФФУЗИЯ НА ЗАПЕРТЫХ ЧАСТИЦАХ

При повышении температуры плазмы или при понижении ее плотности уменьшается частота ион-ионных столкновений, и в игру вступает неустойчивость на запертых частицах. При этом вначале она выступает как диссипативная неустойчивость, связанная с электронными столкновениями. При рассмотрении нелинейных колебаний, развивающихся за счет неустойчивости на запертых частицах, естественно упростить задачу и, производя усреднение вдоль силовых линий, воспользоваться упрощенными двумерными уравнениями:

$$\frac{\partial n_+}{\partial t} + \frac{c\,[\mathbf{h}\nabla\varphi]}{H} \nabla n_+ = 0; \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial n_-}{\partial t} + \frac{c\,[\mathbf{h}\nabla\varphi]}{H} \nabla n_- = -\nu_{ef}(n_- - \delta n_0). \quad (9.2)$$

Здесь n_+ — плотность захваченных ионов; n_- — плотность захваченных электронов; δ — доля захваченных частиц в равновесном состоянии (в осесимметричном торе она равна $\sqrt{\varepsilon} = \sqrt{r/R_0}$). Правая часть в уравнении (9.2) учитывает переход захваченных электронов в пролетные из-за столкновений, $\nu_{эфф} = \frac{\nu_e}{\delta^2}$ — эффективная частота столкновений. Предположим, что n_+, n_-, φ являются функциями только двух переменных r и ϑ, так что уравнения (9.1) и (9.2) описывают нелинейные колебания захваченных частиц. Входящий в уравнение (9.1) и (9.2) потенциал определяется из условия квазинейтральности

$$n_+ - \frac{e\varphi}{T} n_0 = n_- + \frac{e\varphi}{T} n_0, \quad (9.3)$$

в котором учтены как захваченные, так и распределенные по Больцману пролетные частицы. Заметим, что в уравнениях (9.1)

и (9.2) мы пренебрегли членами вида $\mathbf{v}_m \nabla n$, связанными с магнитным дрейфом.

В рассматриваемом здесь случае диссипативной неустойчивости частота ν_e предполагается большой, так что в уравнении (9.2) можно пренебречь производной от n_- по времени и, кроме того, в левую часть уравнения (9.2) можно вместо n_- подставить ее равновесное значение δn_0. Таким образом,

$$n_- = \delta n_0 - \frac{\delta^2}{\nu_e} \frac{c\,[\mathbf{h}\nabla\varphi]}{H} \nabla \delta n_0. \tag{9.4}$$

Если подставить это выражение в соотношение (9.3) и выразить φ через n_+ и n_-, используя снова разложение по $1/\nu_e$, то с помощью полученного выражения для φ и уравнения (9.1) находим следующее нелинейное уравнение для $n'_+ = n_+ - \delta n_0$:

$$\frac{\partial n'_+}{\partial t} - v_* \frac{\partial n'_+}{\partial y} = -\frac{v_*^2 \delta^2}{\nu_e} \cdot \frac{\partial^2 n'_+}{\partial y^2} + N\left(\frac{\partial n'_+}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 n'_+}{\partial y^2} - \frac{\partial n'_+}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 n'_+}{\partial x \partial y}\right), \tag{9.5}$$

где

$$v_* = \frac{cT}{2eHn_0} \cdot \frac{d}{dr} \delta n_0; \quad N = \frac{cTv_* \delta^2}{2eHn_0^2 \nu_e}.$$

Уравнение (9.5) написано в приближении плоского слоя, что справедливо для мелкомасштабных возмущений, а именно введены координаты x, y вместо r, ϑ и пренебрежено членами, содержащими $\frac{\partial^2 n_0}{\partial x^2}$ и $\left(\frac{\partial n_0}{\partial x}\right)^2$.

В линейном приближении, как видно из уравнения (9.5), мы имеем дело с уравнением типа диффузии, но с отрицательным коэффициентом диффузии. Так как инкремент $\gamma \sim k_y^2$, то в первую очередь нарастают возмущения с короткими длинами волн, которые приводят к эффекту типа диффузии по отношению к длинноволновым возмущениям.

В свою очередь, длинноволновые возмущения являются дополнительной причиной для неустойчивости коротковолновых возмущений. Это хорошо видно из структуры нелинейного члена: если рассмотреть длинноволновое возмущение n'_{+1}, у которого вторыми производными можно пренебречь, а первые производные можно считать постоянными, то для коротковолнового возмущения n'_{+2} типа плоской волны нелинейный член принимает вид: $k_y\left(k_y \frac{\partial n'_{+1}}{\partial x} - k_x \frac{\partial n'_{+1}}{\partial y}\right) n'_{+2}$. При $\frac{\partial n'_{+1}}{\partial y} \neq 0$ знак этого выражения не определен, так что всегда можно найти нарастающие за счет $\nabla n'_{+1}$ возмущения n'_{+2}.

Такая подпитка коротковолновых возмущений за счет длинноволновых должна приводить к хаотическому турбулентному движению. При этом мелкомасштабные возмущения играют роль диффузии по отношению к крупномасштабным, и их эффект можно учесть дополнительным членом типа $D_t \Delta n'_+$ в правой части уравнения (9.5). Величину D_t — коэффициента турбулентной диффузии захваченных частиц определим из условия стационарности крупномасштабных возмущений. Учитывая, что из-за сильной хаотичности движение является изотропным, т. е. $k_y^2 \approx k_x^2$, находим сопоставлением с уравнением (9.5)

$$D_t = \frac{v_*^2 \delta^2}{2\nu_e}. \tag{9.6}$$

Как видно, D_t не зависит от k^2. Но, с другой стороны, ясно, что D_t должно возрастать при уменьшении k^2, так как при этом в эффективный перенос вещества включаются колебания все большего и большего масштаба. Согласованная картина может быть получена лишь в предположении, что D_t определяется возмущениями минимального масштаба, при котором происходит переход от диссипативной к бесстолкновительной неустойчивости на захваченных частицах, т. е. при k_y, определяемом соотношением $\nu_e/\delta^2 = \omega = \omega_* \delta^{3/2}$.

Все возмущения более крупного масштаба не возбуждаются: эффективный коэффициент D_t оказывается для них несколько больше критического значения (9.6), и, следовательно, они затухают со временем. Приближенно в качестве эффективного значения D_t можно принять величину (9.6). Учитывая, что D_t относится лишь к захваченным частицам, находим эффективный коэффициент диффузии, отнесенный ко всей плазме:

$$D = \delta D_t = \frac{c^2 T^2 \delta^3}{8e^2 H^2 n_0^2 \nu_e} \left(\frac{d}{dr} \delta n_0 \right)^2. \tag{9.7}$$

Для круглого тора с осевой симметрией здесь следует положить $\delta = \sqrt{r/R_0}$, и вынося приближенно δ из-под знака дифференцирования, находим

$$D = \frac{c^2 T^2 r^{5/2}}{8e^2 H^2 \nu_e R_0^{5/2}} \left(\frac{1}{n_0} \cdot \frac{dn_0}{dr} \right)^2. \tag{9.8}$$

Наряду с переносом плотности колебания запертых частиц приводят к переносу тепла. Так как эти колебания имеют характер перестановок «трубок» запертых частиц, т. е. они представляют собой конвекцию практически несжимаемых трубок с плазмой, то коэффициент температуропроводности как для

электронов χ_e, так и для ионов χ_i должны быть приближенно равны D:

$$\chi_e = \chi_i = \frac{c^2 T^2 r^{5/2}}{8e^2 H^2 \nu_e R_0^{5/2}} \left(\frac{1}{n_0} \cdot \frac{dn_0}{dr} \right)^2. \qquad (9.9)$$

Так как $\nu_e \sim T^{3/2}$, то коэффициенты (9.8) и (9.9) очень быстро возрастают с температурой. При достаточно высокой температуре, когда ν_e/δ^2 становится меньше частоты колебаний $\omega = \omega^* \delta^{3/2}$, отвечающих возмущениям с максимально возможной локализацией $m \approx q$, т. е. при

$$S \equiv \frac{\lambda_e \rho_i}{a^2} > \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}\, q^{-1} \delta^{-5/2} \approx 10^2 \qquad (9.10)$$

диссипативная неустойчивость на запертых частицах переходит в бесстолкновительную, и в уравнениях (9.1) и (9.2) следует учесть магнитный дрейф. При этом возмущения перестают быть локальными, и, следовательно, введение локального коэффициента диффузии теряет смысл. Можно лишь в виде оценки использовать некоторый усредненный по всему объему эффективный коэффициент D, описывающий конвекцию запертых частиц. Так как инкремент $\gamma \approx \varepsilon q \rho_i v_i / a^2$, а ширина локализации конвекционных ячеек порядка a, то

$$D \approx \delta \gamma a^2 \approx \left(\frac{a}{R_0} \right)^{3/2} q \rho_i v_i, \qquad (9.11)$$

т. е. он по порядку величины равен бомовскому коэффициенту диффузии $D_B = \frac{1}{16} \cdot \frac{cT}{eH}$. Конвекция на захваченных частицах приводит к выбросу именно захваченных частиц. Однако даже кулоновскими столкновениями конус захваченных частиц довольно быстро заполняется за счет пролетных, а при сильном «выедании» функции распределения естественно ожидать быстрого его заполнения в результате развития высокочастотных продольных колебаний *.

Выражения (9.8) и (9.9) получены нами в предположении изотермичности $T_i = T_e = T$. Если вернуться к соотношениям (9.3) — (9.5), то нетрудно видеть, что в случае $T_i \neq T_e$ в соотношении (9.5), а следовательно, и в выражениях (9.8) и (9.9) достаточно заменить $\frac{1}{T}$ на $\frac{1}{T_i} + \frac{1}{T_e}$. Другими словами,

$$D = \chi_e = \chi_i = \frac{c^2 T_i^2 T_e^2 r^{5/2}}{2e^2 H^2 \nu_e (T_i + T_e)^2 R_0^{5/2}} \left(\frac{1}{n_0} \cdot \frac{dn_0}{dr} \right)^2. \qquad (9.12)$$

---

* Кроме того, при пульсациях масштаба $\lambda \sim a$ флуктуации потенциала φ становятся достаточными, чтобы «перебрасывать» захваченные частицы в пролетные и обратно.

Здесь множитель $(r/R_0)^{5/2}$ представляет собой δ^5, где δ — доля захваченных частиц. В ловушках с неоднородным магнитным полем (например, при наличии винтовых обмоток) величина δ может быть порядка единицы.

Заметим, что в сильно неизотермичной разреженной плазме, когда столкновения несущественны, неустойчивость на захваченных частицах, согласно условию (4.30), стабилизируется.

§ 10. ДИФФУЗИЯ В СИСТЕМАХ С МАЛЫМ ШИРОМ

1. Дрейфово-диссипативная неустойчивость

Выше предполагалось, что шир $\theta \sim 10^{-1} \gg \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$. При уменьшении шира макроскопические эффекты от всех неустойчивостей возрастают, в частности возрастает теплопроводность за счет дрейфово-температурной неустойчивости при $\eta \gg 1$, и поэтому в не слишком плотной плазме можно считать $\eta \leqslant 1$, когда дрейфово-температурная неустойчивость не развивается. Кроме того, при очень малом θ становятся существенными неустойчивости, которые при $\theta \sim 10^{-1}$ либо стабилизированы, либо имеют слишком узкую область локализации. Сюда относятся дрейфовая бесстолкновительная неустойчивость, дрейфово-диссипативная и тесно связанная с ней неустойчивость с конечными орбитами, для которой важна своеобразная «вязкость размешивания», возникающая из-за конечной величины отклонения ионов от силовой линии при дрейфовом движении. Начнем наше рассмотрение с дрейфово-диссипативной неустойчивости.

Поскольку при локализации возмущений меньше или порядка ларморовского радиуса ионов эффект от неустойчивости очень мал, то нам достаточно рассмотреть случай $\rho_i \ll x$, когда можно пользоваться уравнениями магнитной гидродинамики. Для простоты предположим, кроме того, что температура ионов равна нулю (согласно линейной теории, при переходе от $T_i = 0$ к $T_i = T_e$ инкремент возрастает не более чем в два раза). В качестве исходных уравнений принимаем уравнение непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n\mathbf{v} = 0, \tag{10.1}$$

сумму уравнений движения для электронов и ионов

$$m_i n \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = \frac{1}{c}[\mathbf{jH}] \tag{10.2}$$

и продольную компоненту уравнения движения для электронов, в котором пренебрегаем инерционным членом

$$\mathbf{h}\nabla p_e = en\mathbf{h}\nabla\varphi + \frac{en}{\sigma} j_{\parallel}. \tag{10.3}$$

Для рассматриваемой неустойчивости эффект неоднородности магнитного поля не играет роли, так что можно положить $H = H_0 = \text{const}$. При этом из поперечной компоненты уравнения движения для ионов следует, что в пренебрежении инерцией поперечная скорость $\mathbf{v}_\perp$ равна

$$\mathbf{v}_\perp = \frac{c[\mathbf{h}\nabla\varphi]}{H}, \tag{10.4}$$

так что поперечное движение несжимаемо.

Применив к уравнению (10.2) операцию rot_z и считая $n = \text{const}$ при инерционном члене, получаем

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{\partial\Gamma}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\Gamma = -\frac{H_0}{cm_in_0}\operatorname{div}\mathbf{j}_\perp = \frac{H_0}{cm_in_0}\operatorname{div}\mathbf{j}_\parallel =$$

$$= \frac{H_0}{cm_in_0}\mathbf{h}\nabla j_\parallel, \tag{10.5}$$

где $\Gamma = \text{rot}_z\mathbf{v} = \frac{c}{H_0}\Delta_\perp\varphi$.

Вспоминая, что $\mathbf{h}\nabla = -\theta\frac{x}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}$, записываем уравнение (10.5) с учетом соотношения (10.3) в виде

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{H_0\theta^2x^2\sigma}{cr^4m_in_0}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\frac{1}{en}\cdot\frac{\partial p_e}{\partial\vartheta} - \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right]. \tag{10.6}$$

Рассмотрим сначала колебания в предположении, что температура электронов остается постоянной вдоль силовых линий. Тогда T_e и σ можно считать не зависящими от ϑ. Кроме того, поскольку $\frac{\partial p_0}{\partial\vartheta} = 0$, а в силу малости области локализации возмущение $p' = n'T_0$ мало, множитель $\frac{1}{en}$ перед $\frac{\partial p_e}{\partial\vartheta}$ в квадратных скобках уравнения (10.6) также можно считать постоянным. Таким образом, уравнение (10.6) для возмущений типа $\exp(im\vartheta)$ можно записать в виде

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{\partial\Gamma}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\Gamma = -Bx^2\left(\frac{T_0n'}{en_0} - \varphi\right), \tag{10.7}$$

где величина $B = \frac{m^2H_0\theta^2\sigma}{cr^4}$ считается постоянной в пределах ячейки.

В линейном приближении уравнения (10.1) — (10.3) описывают дрейфово-диссипативную неустойчивость, причем инкремент пропорционален волновому числу $k_y = m/r$. Это значит, что в первую очередь развиваются коротковолновые возмущения, и развитая неустойчивость должна иметь характер хаотического турбулентного движения. Для определения коэффициента турбулентной диффузии D опять воспользуемся приближенным способом, заранее вводя в уравнение непрерыв-

ности (10.1) для крупномасштабных ячеек член с диффузией, который учитывал бы эффект от мелкомасштабных возмущений:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla n = D\Delta_\perp n. \qquad (10.8)$$

Здесь член $D\Delta_\perp n$ представляет собой усредненное по мелкомасштабным возмущениям значение от нелинейного члена $\mathbf{v}\nabla n$. Точно такого же вида нелинейный член $\mathbf{v}\nabla\Gamma$ содержится в уравнении (10.7) для вихря Γ, поскольку те же самые мелкомасштабные флуктуации, которые приводят к эффективной диффузии, должны приводить к перемешиванию областей с различными значениями Γ, т. е. должны приводить к диффузии Γ, что эквивалентно появлению члена с вязкостью $\nu\Delta_\perp\Gamma$ в правой части уравнения (10.7):

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\Gamma = Bx^2\left(\frac{T_0 n'}{en_0} - \varphi\right) + \nu\Delta_\perp\Gamma. \qquad (10.9)$$

Поскольку нелинейные члены, приводящие к вязкости и диффузии, совершенно одинаковы, то можно считать $\nu = D$. Величину эффективной диффузии D опять найдем из условия того, что возмущение с максимальным масштабом находится на границе устойчивости. Учитывая, что $\Gamma = \frac{c}{H_0}\Delta_\perp\varphi$, получаем в линейном приближении

$$-i\omega n' + i\omega^* n_0\psi = D\Delta_\perp n'; \qquad (10.10)$$

$$-i\omega\Delta_\perp\psi - B_0x^2\left(\frac{n'}{n_0} - \psi\right) = D\Delta_\perp\Delta_\perp\psi, \qquad (10.11)$$

где ω^* — дрейфовая частота; $\psi = \frac{e\varphi}{T_0}$; $B_0 = \frac{H_0^2\theta^2 m^2\sigma}{c^2r^2n_0m_i} = \frac{\theta^2m^2}{r^4} \times \Omega_i\Omega_e\tau_e$. Заметим, что $B_0x^2 = -\omega_s\Delta_\perp$, где $\omega_s = \frac{k_\parallel^2}{k_\perp^2}\Omega_i\Omega_e\tau_e$.

В уравнении (10.11) подставим вместо ν равную ей величину D.

Заметим, что при $D = 0$ система уравнений (10.10), (10.11) не имеет локализованных решений. Локализация создается членами в правой части, т. е. нелинейными эффектами, учтенными при введении вязкости и диффузии.

Эффективный коэффициент диффузии находится из условия отсутствия мнимой части у собственной частоты ω системы (10.10), (10.11). Перейдем к фурье-представлению, заменяя $\Delta_\perp \to -k_y^2 - k^2$; $x^2 \to -\frac{d^2}{dk^2}$. Тогда для новой переменной $\chi = (\omega - iD\Delta - \omega^*)n$ получим уравнение второго порядка

$$\frac{d^2\chi}{dk^2} = -\frac{i\left(k_y^2+k^2\right)\left[\omega + iD\left(k_y^2+k^2\right)\right]^2}{B_0\left[\omega + iD\left(k_y^2+k^2\right) - \omega^*\right]}\chi. \qquad (10.12)$$

В этом уравнении удобно перейти к безразмерным переменным

$$\xi = k/k_y;\ \lambda = \omega/Dk_y^2;\ \lambda_* = \omega^*/Dk_y^2.$$

Тогда

$$\frac{d^2\chi}{d\xi^2} = U\chi = \mu\frac{(1+\xi^2)[-i\lambda+(1+\xi^2)]}{(1+\xi^2)-i(\lambda-\lambda_*)}\chi, \qquad (10.13)$$

где $\mu = \dfrac{Dk_y^6}{B_0} = \dfrac{Dm^4}{r^2\theta^2\Omega_i\Omega_e\tau_e}$.

Уравнение второго порядка с «комплексной ямой» (10.13) содержит два действительных параметра λ, μ. Эти параметры должны быть выбраны таким образом, чтобы χ представляло собой собственную функцию, убывающую при $x \to \pm\infty$.

Заметим, что величина $\lambda_*^4\,\mu$ не зависит от $k_y = m/r$ и пропорциональна D^{-3}. Так как нас интересует решение с максимально возможным D, то свободный параметр λ_* в уравнении (10.13) следует выбрать таким образом, чтобы $\mu\lambda_*^4$ достигало минимума.

Разделим потенциал U в правой части уравнения (10.13) на действительную и мнимую части: $U = U_1 + iU_2$, где

$$U_1 = \mu\frac{(1+\xi^2)^2}{(1+\xi^2)^2+\alpha^2}[(1+\xi^2)^2+\alpha^2-\lambda_*^2]; \qquad (10.14)$$

$$U_2 = -\mu\frac{(1+\xi^2)^2}{(1+\xi^2)^2+\alpha^2}[(2\lambda_*-\alpha)(1+\xi^2)^2-\alpha(\lambda_*-\alpha)^2], \qquad (10.15)$$

а $\alpha = \lambda_* - \lambda$.

Умножая уравнение (10.13) на сопряженную функцию χ^* и интегрируя по ξ, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_1|\chi|^2 d\xi = -\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{d\chi}{d\xi}\right|^2 d\xi; \qquad (10.16)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_2|\chi|^2 d\xi = 0. \qquad (10.17)$$

Из соотношений (10.14) и (10.16) следует, что λ_* не может быть малой величиной, т. е. $\lambda_*^2 \geqslant 1+\alpha^2$. Так как нас интересует минимально возможное λ_*, то следует считать $\lambda_* \sim 1$. Из выражения (10.15) и соотношения (10.17) видно, что $\alpha \sim 1$ и, следовательно, $\mu \sim 1$. Таким образом, минимальное значение параметра $\lambda_*^4\,\mu$, которое обозначим s, порядка единицы: $s = \min\lambda_*^4\mu \sim 1$. Отсюда, вспоминая выражения для λ_* и μ через D и ω^*, находим

$$D = \frac{cT}{eH}\cdot\frac{1}{(\Omega_e\tau_e)^{1/3}}\left[\frac{\rho_{ie}^2 r^2}{\theta^2 s^2}\left(\frac{1}{n_0}\cdot\frac{dn_0}{dr}\right)^4\right]^{1/3}, \qquad (10.18)$$

где $\rho_{ie}^2 = \dfrac{T_e}{m_i\Omega_i^2}$, $s \sim 1$. По порядку величины

$$D \sim \frac{cT}{eH}\left(\frac{\rho_{ie}}{a\theta}\right)^{2/3}(\Omega_e\tau_e)^{-1/3}. \qquad (10.19)$$

Поскольку даже при существующих параметрах в тороидальных установках $\Omega_e\tau_e$ является огромной величиной порядка 10^6, то даже при $\theta \sim 10^{-3} \div 10^{-2}$ коэффициент диффузии (10.19) сравнительно невелик, и его можно не учитывать.

Выше предполагалось, что возмущение температуры электронов отсутствует. Но, как было показано в п. 9 § 3, при $k_\parallel\lambda_e < \sqrt{\dfrac{m_e}{m_i}}$ имеет место неустойчивость, связанная с возмущением температуры электронов. Так как инкремент этой неустойчивости не превышает величины $\dfrac{m_e}{m_e}\nu_e$, а ширина локализации $x < \rho_i/\theta\sqrt{\dfrac{m_e}{m_i}}\cdot\dfrac{1}{S}$, то эффективный коэффициент диффузии $D \sim \gamma x^2$ не превышает величины $D_c\dfrac{m_e}{m_i\theta^2S^2}$, где $D_c \approx \dfrac{m_e\nu_e}{m_i}\rho_i^2$ — классический коэффициент диффузии. При не слишком малых S коэффициент D, обязанный данной неустойчивости, также пренебрежимо мал.

2. Неустойчивость, связанная с конечными орбитами

Коэффициент диффузии (10.19) из-за дрейфово-диссипативной неустойчивости можно было бы найти из следующих простых оценок. Как следует из дисперсионного уравнения в квазиклассическом приближении (3.38а), максимальный инкремент $\gamma \simeq \omega^*$ достигается при $\omega^* \sim \omega_s = \dfrac{k_\parallel^2}{k_\perp^2}\Omega_i\Omega_e\tau_e$. Полагая $k_y \sim k_x \sim k_\perp \sim x^{-1}$, находим ширину области локализации $x \sim (a\rho_i/\theta^2\Omega_e\tau_e)^{1/3}$, а затем и $D \sim \gamma x^2 \sim \omega^* x^2 \sim \rho_i v\,(\rho_i^2/a^2\theta^2\Omega_e\tau_e)^{1/3}$.

При наличии дрейфового движения в неоднородном магнитном поле, как мы установили в п. 3 § 4, возникает эффект усиленной вязкости из-за «перемешивания», т. е. отклонения ионов от силовых линий из-за магнитного дрейфа. Этот эффект грубо можно учесть, если уменьшить ω_s на фактор ρ_i^2/Λ^2, где Λ — среднеквадратичная величина отклонения ионов от магнитной поверхности при дрейфовом движении. Соответственно увеличивается коэффициент диффузии и по порядку величины оказывается равным

$$D \simeq \rho_i v_i\,(\Lambda^2/a^2\theta^2\Omega_e\tau_e)^{1/3}. \qquad (10.20)$$

В стелларатore C, например, величина Λ может достигать значений $\sim a$, и коэффициент диффузии (10.20) может доходить до бомовского $D_B \sim 10^{-1}\rho_i v_i$. Оценка (10.20), разумеется, становится неверной, если дает величину больше D_B, это значит, что ширина локализации возмущений становится порядка a.

3. Дрейфовая неустойчивость

Дрейфовая неустойчивость тесно связана с дрейфово-диссипативной; по существу, это проявление одной и той же неустойчивости, в одном случае в бесстолкновительном, а в другом в столкновительном режимах. Поэтому, ограничиваясь опять более простым, но качественно не отличающимся от общего случаем $T_i = 0$, снова воспользуемся уравнением (10.5) и уравнением непрерывности для ионов и лишь вместо закона Ома используем соотношение, которое можно получить из бесстолкновительного кинетического уравнения для электронов в дрейфовом приближении:

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + v_\parallel \mathbf{h}\nabla f + \frac{c\,[\mathbf{EH}]}{H^2}\nabla f - \frac{e}{m_e} E_\parallel \frac{\partial f}{\partial v_\parallel} = 0. \quad (10.21)$$

Рассматривая возмущение, соответствующее ячейкам максимального масштаба, опять учтем эффект от мелкомасштабных возмущений заменой ω на $\omega - iD\Delta_\perp$. При этом для простоты в уравнении (10.21) будем считать, что усредненная функция f_0 близка к максвелловской, сдвинутой на величину токовой скорости u. В действительности дрейфовые колебания несколько искажают функцию распределения по продольной скорости, но для случая не очень разреженной плазмы, т. е. $S = \frac{\lambda_e \rho_i}{a} \sim 1$, это искажение до некоторой степени устраняется столкновениями. Пренебрежение квазилинейным искажением f_0 только завышает эффективный коэффициент D.

Определяя с помощью линеаризованного уравнения (10.21) продольную компоненту электронного тока $j_{\parallel e}$ и учитывая также ионный продольный ток, получаем вместо системы уравнений (10.10) и (10.11)

$$(\omega - iD\Delta_\perp)\, n' = \omega^* n_0 \psi; \quad (10.22)$$

$$(\omega - iD\Delta_\perp)\,\rho_{ie}^2 \Delta_\perp \psi = \left(\omega - iD\Delta_\perp - \omega^* + i\sqrt{\pi}\omega \frac{\omega - \omega^* + k_\parallel u}{v_e |k_\parallel|} - \right.$$
$$\left. - \frac{k_\parallel^2 T_e}{m_i \omega}\right)\psi. \quad (10.23)$$

Как видим, в такой записи уравнение (10.23) для ψ оказывается независимым от уравнения для плотности (10.22) и,

следовательно, величина D находится из условия действительности собственного значения ω уравнения (10.23).

При $\theta \ll \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$, $\theta \ll \rho_i/a$ можно считать магнитное поле однородным и $k_\parallel$ произвольной, не зависящей от x величиной $\left(\text{но } k_\parallel^{-1} \ll \min \frac{v_e}{\omega}, \frac{c_A}{\omega}\right)$. При этом в случае $u = 0$ и $\beta > \frac{m_e}{m_i}$ из уравнения (10.23) следует тот же самый результат, что и из приближения слабой турбулентности [16], а именно

$$D \sim \frac{m_e}{m_i \beta} \cdot \frac{\rho_i^2 v_i}{a}. \qquad (10.24)$$

При наличии продольного тока $u > v_i$ возможна раскачка дрейфовых колебаний с поперечной длиной волны порядка a и коэффициент диффузии может достигать значения порядка $D \sim \frac{u}{v_e} D_Б \sim \frac{u}{v_e} \rho_i v_i$ [43].

При достаточно большой величине токовой скорости u может иметь место раскачка дрейфовых колебаний и при не очень малых θ. В таких колебаниях инерция ионов не играет роли, т. е. можно пренебречь левой частью уравнения (10.23). Учитывая, кроме того, что частота колебаний близка к ω^*, и полагая $\omega = \omega^* + \lambda$, где $\lambda \ll \omega^*$, получаем уравнение

$$D\Delta_\perp \psi + \left(i\lambda - \sqrt{\pi}\omega^* \frac{k_\parallel u}{|k_\parallel| v_e} - i \frac{k_\parallel^2 T_e}{m_i \omega^*}\right)\psi = 0. \qquad (10.25)$$

Отсюда по порядку величины имеем $D/x^2 \sim \lambda \sim \omega^* \frac{u}{v_e} \sim \frac{k_y^2 T_e \theta^2}{m_i \omega^* a^2} x^2$, что приводит к следующей оценке для коэффициента диффузии

$$D \sim \left(\frac{u}{v_e}\right)^{3/2} \frac{\rho_i^2 v_i}{\theta a}. \qquad (10.26)$$

При $\frac{u}{v_e} \sim 10^{-1}$ этот коэффициент диффузии может достигать величины порядка коэффициента температуропроводности из-за дрейфовой температурной неустойчивости (8.20). Следует, однако, иметь в виду, что при $\frac{u}{v_e} < \theta$ данная неустойчивость стабилизируется.

§ 11. СВОДКА ФОРМУЛ

Результаты проведенного выше рассмотрения макроскопических эффектов типа усиленной диффузии и теплопроводности позволяют составить систему уравнений, описывающих поведение турбулентной плазмы в тороидальных установках. Выше разбирались отдельные неустойчивости независимо друг от дру-

га. В реальных условиях должно иметь место некоторое взаимодействие колебаний различных типов, например колебания одного вида могут подавлять колебания другого вида. Но поскольку макроскопические эффекты определяются возмущениями с наибольшей локализацией, то совершенно невероятно ожидать стабилизации наиболее опасных возмущений из-за менее опасных колебаний. Другими словами, при любой комбинации неустойчивостей наиболее опасная из них должна превалировать над другими. Поэтому в уравнениях, описывающих макроскопическое, крупномасштабное движение плазмы, можно просто просуммировать все найденные выше коэффициенты теплопроводности и диффузии, предоставляя, таким образом, самим уравнениям выбирать наибольшие из них.

Коэффициент аномальной теплопроводности входит в уравнение переноса тепла точно так же, как и обычный коэффициент, и поэтому обобщение соответствующего уравнения не представляет труда. Что же касается коэффициента диффузии, то его можно было бы учесть в уравнениях движения для ионов и электронов в виде некоторой дополнительной поперечной силы трения, т. е. как эффект уменьшения поперечной проводимости. А поскольку при несжимаемом конвекционном течении диффузионный поток пропорционален градиенту плотности, а не градиенту давлений, как при обычной диффузии, то следовало бы внести соответствующее изменение в поперечную термосилу. Однако в таком сложном способе учета эффективной диффузии нет никакой надобности. Дело в том, что уравнения с усредненным эффектом от неустойчивостей справедливы только для медленных течений, когда успевает устанавливаться стационарный спектр турбулентных пульсаций. Поскольку время установления определяется инкрементом γ, который в случае дрейфовых неустойчивостей не превышает пролетного времени v_i/a, то уравнения для усредненного течения применимы только для безынерционных движений, а в этом случае достаточно иметь уравнение непрерывности и уравнение теплопроводности.

Поскольку найденные выше выражения для D и χ содержат некоторые численные множители и довольно сложные зависимости от температуры, плотности и т. п., то для практического их применения удобно сразу перейти к определенной системе единиц. Ниже мы будем выражать температуру в электронвольтах, за единицу измерения плотности примем 10^{13} *част/см*^{3}, время будем измерять в миллисекундах, длину — в сантиметрах. Кроме того, вместо радиуса r введем безразмерный параметр $x = r/a$, где a — радиус шнура. Продольное магнитное поле H_0 будем измерять в килогауссах, а вместо азимутального поля H_ϑ введем величину $\mu = \dfrac{Rq_0H_\vartheta}{rH_0} = q_0/q$, где $q_0 = \text{const}$ — некоторый максимальный коэффициент запаса, к которому удобно отно-

сить q. Учтем далее, что в принятых нами единицах, согласно работе [3], продольная проводимость равна $\sigma_{\parallel} = 1{,}18 \cdot 10^{13} T_e^{3/2}$, продольная температуропроводность $\chi_{\parallel} = \frac{2}{3}\frac{\varkappa_{\parallel}^e}{n} = 8{,}5 \cdot 10^6 \frac{T_e^{5/2}}{n}$, и поперечная ионная температуропроводность $\chi_{\perp} = \frac{2}{3}\frac{\varkappa_{\perp}^i}{n} =$

$$= 9{,}4 \cdot 10^5 \frac{n}{H_0^2} T_e^{-1/2}.$$

Учитывая возможность изменения продольного поля H_0 со временем с целью «поджатия» плазменного шнура, запишем систему уравнений, описывающих поведение плазмы с учетом турбулентных эффектов, в виде

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{1}{2H_0} \cdot \frac{dH_0}{dt} \mathrm{x} \frac{\partial \mu}{\partial \mathrm{x}} + \frac{A_0}{\mathrm{x}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \left(\frac{\alpha}{T_e^{3/2}} \right), \quad \alpha = \frac{1}{\mathrm{x}} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} (\mathrm{x}^2 \mu); \quad (11.1)$$

$$n \frac{dT_e}{dt} - D \frac{\partial n}{\partial \mathrm{x}} \cdot \frac{\partial T_e}{\partial \mathrm{x}} - \frac{n}{2H_0} \cdot \frac{dH_0}{dt} \mathrm{x} \frac{\partial T_e}{\partial \mathrm{x}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{H_0} \times$$
$$\times \frac{dH_0}{dt} nT_e = \frac{1}{\mathrm{x}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \left(\mathrm{x} n \chi_e \frac{\partial T_e}{\partial \mathrm{x}} \right) + B_0 \frac{1}{T_e^{3/2}} \left[\frac{1}{\mathrm{x}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} (\mathrm{x}^2 \mu) \right]^2 +$$
$$+ Q_e + C_0 \frac{n^2}{T_e^{3/2}} (T_i - T_e) - gnT_e; \quad (11.2)$$

$$n \frac{\partial T_i}{\partial t} - D \frac{\partial n}{\partial \mathrm{x}} \cdot \frac{\partial T_i}{\partial \mathrm{x}} - \frac{n}{2H_0} \cdot \frac{dH_0}{dt} \mathrm{x} \frac{\partial T_i}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{1}{H_0} \times$$
$$\times \frac{dH_0}{dt} nT_i = \frac{1}{\mathrm{x}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \left(\mathrm{x} n \chi_e \frac{\partial T_i}{\partial \mathrm{x}} \right) + \delta_0 B_0 \frac{1}{T_e^{3/2}} \left[\frac{1}{\mathrm{x}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} (x^2 \mu) \right]^2 +$$
$$+ Q_i - C_0 \frac{n^2}{T_e^{3/2}} (T_i - T_e) - gnT_i; \quad (11.3)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{1}{2H_0} \cdot \frac{dH_0}{dt} \mathrm{x} \frac{\partial n}{\partial \mathrm{x}} - \frac{1}{H_0} \cdot \frac{dH_0}{dt} n =$$
$$= \frac{1}{\mathrm{x}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \left(\mathrm{x} D \frac{\partial n}{\partial \mathrm{x}} \right) + gn, \quad (11.4)$$

где константы $A_0 = 6 \cdot 10^3/a^2$; $B_0 = 2 \cdot 10^7 H_0^2/R^2 q_0^2$; $C_0 = 2{,}3 \cdot 10^2$.

Уравнение (11.1) описывает диффузию магнитного поля: первый член справа соответствует переносу по радиусу вмороженных силовых линий, а второй описывает собственно диффузию за счет конечной проводимости. Мы предполагаем, что продольный ток нарастает достаточно медленно и плотность тока $j \sim \alpha$ нигде не испытывает сильных изменений, которые могли бы повлечь за собой винтовую неустойчивость и связанную с ней аномальную диффузию магнитного поля из-за развития винтовых ячеек. При решении уравнений (11.1) — (11.4) на электронной машине отсутствие винтовой неустойчивости мож-

но контролировать с помощью уравнения (2.25), которое в обозначениях данного параграфа имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{m^2}{x^2}\psi = \frac{\psi}{x(\mu - q_0 n/m)} \cdot \frac{d\alpha}{dx}. \qquad (11.5)$$

Уравнения (11.2), (11.3) представляют собой уравнения теплового баланса соответственно для электронов и ионов. В левой части этих уравнений второй член описывает перенос тепла с диффузионной скоростью; третий — перенос тепла за счет магнитного сжатия; четвертый — адиабатический нагрев при сжатии. В правой части первый член учитывает турбулентную теплопроводность; второй: в (11.2) — джоулево тепло, а в (11.3) — выделение джоулева тепла непосредственно ионом при наличии ионно-звуковой неустойчивости; Q_e — потери на излучение; Q_i — энерговыделение от внешних источников или от термоядерных реакций; четвертый член описывает теплообмен в результате электрон-ионных столкновений, и, наконец, последнее слагаемое возникает при наличии потока холодного газа, где g — количество «нейтралов», попадающих в плазму в единицу времени. Этот же эффект учитывается в уравнении (11.4) последним членом, а предпоследний член в уравнении (11.4) описывает аномальную диффузию. Таким образом, все турбулентные эффекты учитываются в коэффициентах χ_i, χ_e и D.

Каждый из коэффициентов (χ_i, χ_e и D) состоит из суммы членов, отвечающих той или иной неустойчивости: $\chi_i = \chi_c + \chi_T + \chi_s + \chi_t$, $\chi_e = \chi_s + \chi_t$, $D = D_T + D_s + D_t + D_d + D_f$. Здесь χ_c — классический коэффициент теплопроводности, равный при $q^2 \gg 1$

$$\chi_c = \frac{10^2 q_0^2}{a^2} \cdot \frac{n}{H^2 \mu^2 \sqrt{T_i}}, \qquad (11.6)$$

χ_T — коэффициент турбулентной теплопроводности за счет температурной дрейфовой неустойчивости, который, согласно выражению (8.20), в обозначениях настоящего параграфа равен

$$\chi_T = \frac{Rq_0}{2a^4} \cdot \frac{F(\eta)}{H^2 x \left|\frac{d\mu}{dx}\right| \sqrt{T_i}} \left(\frac{dT_i}{dx}\right)^2, \qquad (11.7)$$

здесь

$$\eta = \left|\frac{d \ln T}{d \ln n}\right|; \quad F(\eta) = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 < \eta < 1, \\ 1 - \eta \text{ при } 1 < \eta < 2, \\ 1 \text{ при } \eta > 2. \end{cases}$$

Коэффициент χ_T, вообще говоря, довольно сложным образом зависит от T_e, но поскольку его основная зависимость определяется T_i, а изменение T_e не меняет порядка величины χ_T, то примем для χ_T его значение при $T_i = T_e$ и экстраполируем это выражение на случай $T_i \neq T_e$.

Величина χ_s соответствует теплопроводности из-за токово-конвективной неустойчивости. В условиях, когда эта величина существенна, конвекционные ячейки имеют область локализации значительно больше ρ_i, и при этом вклад в ионную и электронную теплопроводности, а также в коэффициент диффузии примерно одинаков. Пользуясь выражением (7.67), получаем

$$\chi_s = D_s = 3{,}5 \cdot 10^3 \frac{R\sqrt{q_0}}{a^3} \cdot \frac{\sqrt{n}\,|\alpha|^{3/2}}{T_e^5 \varkappa^{3/2} \mu^2} \left(\frac{dT_e}{dx}\right)^2 \left(\frac{d\mu}{dx}\right)^{-2}. \qquad (11.8)$$

Коэффициент $\chi_t = D_t$ связан с неустойчивостью на запертых частицах. Кроме учтенных нами эффектов коэффициент температуропроводности содержит пренебрежимо малый член, соответствующий температурной электронной неустойчивости, и при наличии магнитных ячеек возникает дополнительный перенос тепла в результате расщепления магнитных поверхностей.

В коэффициенте диффузии D, кроме упомянутого слагаемого (11.8), содержится слагаемое D_T, отвечающее дрейфовой температурной неустойчивости, которое приближенно примем равным

$$D_T = 0{,}1\chi_T, \qquad (11.9)$$

и слагаемое D_t, соответствующее неустойчивости на запертых частицах и равное, согласно выражению (9.12),

$$D_t = \chi_t = 4 \cdot 10^2 H^2 \frac{T_e^{7/2} T_i^2 \varkappa^{5/2}}{(T_e + T_i)^2 a^{3/2} R^{5/2}} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{dn}{dx}\right)^2. \qquad (11.10)$$

Кроме того, учитываются члены: D_d — соответствующий дрейфовой неустойчивости, и D_f — связанный с неустойчивостью из-за конечных орбит дрейфового движения. Эти слагаемые играют роль только в системах с малым широм. Согласно § 10:

$$D_d \sim \begin{cases} 0 \text{ при } u/v_e < \theta, \\ \sim 10 \left(\dfrac{u}{v_e}\right)^{3/2} \dfrac{Rq_0}{a^4} \cdot \dfrac{T_e^{3/2}}{H^2 \varkappa \left|\dfrac{d\mu}{dx}\right|}, \quad \dfrac{u}{v_e} > \theta \end{cases} \qquad (11.11)$$

где

$$u/v_e = 12\alpha H_0 / Rq_0 n \sqrt{T_e};$$

$$\theta = \frac{a}{Rq_0} \varkappa \left|\frac{d\mu}{dx}\right|;$$

$$D_f \sim \frac{10^2 T_e}{a^2 H} \left(\frac{\Lambda^2}{a^2 \theta^2 \Omega_e \tau_e}\right)^{1/3}; \qquad (11.12)$$

где Λ — среднеквадратичное смещение ионов при дрейфовом движении.

Величина Q_e учитывает потери на излучение, которые складываются из тормозного излучения Q_B, магнитно-тормозного излучения Q_m и излучения на примесях Q_r.
В принятых нами единицах

$$Q_B = -7{,}2 \cdot 10^{-4} n^2 \sqrt{T_e}. \qquad (11.13)$$

Что касается Q_m, то, согласно работе [44], он приближенно может быть аппроксимирован функцией

$$Q_m = 6 \cdot 10^{-14} n T_e^{5/3} H_0^2 \sqrt{\frac{H_0}{na}}. \qquad (11.14)$$

Величина Q_r, согласно [45], аппроксимируется выражением

$$Q_r = \xi Z^4 1{,}4 \cdot 10^{-2} n^2 T_e^{-1/2} + \xi Z^6 1{,}9 \cdot 10^{-1} n^2 T_e^{-3/2}, \qquad (11.15)$$

где ξ — концентрация примесей; Z — их эффективное зарядовое число.

Величина Q_i — энерговыделение из-за ядерных реакций в равнокомпонентной смеси дейтерия и трития равна

$$Q_i = 1{,}8 \cdot 10^7 \frac{n^2}{T_i^{3/2}} \exp(-200/T_i^{1/3}). \qquad (11.16)$$

Величина δ_0 учитывает возможность передачи энергии ионам из-за развития ионно-звуковой неустойчивости. Как было аргументировано в § 5, развитая неустойчивость может приводить к передаче энергии ионам порядка джоулева тепловыделения в электронной компоненте, причем соответствующий эффект отличен от нуля только при $T_i < T_e/3$. Так как неизотермичность ($T_i \ll T_e$) имеет место только при $u \gg c_s = \sqrt{\frac{T_e}{m_i}}$, т. е. когда выполнено условие развития ионно-звуковой неустойчивости, то δ_0 можно аппроксимировать соотношением

$$\delta_0 = \frac{T_e^2}{T_e^2 + 10 T_i^2}, \qquad (11.17)$$

а именно $\delta \sim 10^{-1} \ll 1$ при $T_e = T_i$ и $\delta_0 = 1$ при $T_i \ll T_e$. Величина g — поток нейтрального газа в плазму определяется условиями на стенке.

Заметим еще, что из условия равновесия плазмы величина β

$$\beta = \frac{8\pi p}{H_0^2} = \frac{10^{-4}}{H_0^2} \int_0^1 n(T_e + T_i)\, 2x dx \qquad (11.18)$$

должна быть малой, порядка $\frac{a}{Rq^2}$.

Уравнения (11.1) — (11.17) и являются уравнениями движения турбулентной плазмы в тороидальных системах. Эти урав-

нения относятся, строго говоря, к круглому тору типа «Токамак». Чтобы их распространить на системы типа «Стелларатор» в выражениях (11.7), (11.8), (11.11), (11.12) величину $d\mu/dx$, пропорциональную ширу θ, следует заменить на $\frac{q_0}{2\pi} \cdot \frac{d_\iota}{dx}$, где ι — полный угол вращательного преобразования.

Оценки показывают, что утечка плазмы, описываемая турбулентными коэффициентами χ, D, имеет порядок величины, наблюдаемой экспериментально.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе, как нам кажется, учтены все основные виды неустойчивости плазмы в тороидальной геометрии и их макроскопические эффекты, сводка которых дана в § 11. Не исключено, впрочем, что часть из полученных здесь результатов претерпит в дальнейшем значительные изменения. Во всяком случае, предстоит еще большая работа по установлению соответствия между развитыми здесь теоретическими представлениями и экспериментальными данными. Грубое качественное соответствие уже имеется, но для более полного сравнения теории с экспериментом следует, по-видимому, проводить численные расчеты, так как система макроскопических уравнений весьма чувствительна к распределнию тока, плотности и температуры плазмы по радиусу. Но, даже независимо от результатов этих расчетов и сравнения теории с экспериментальными данными, небезынтересно рассмотреть вопрос о возможности получения самоподдерживаемой термоядерной реакции в рамках предложенной здесь модели турбулентной плазмы.

Так как увеличение размеров установки приводит к уменьшению потерь, то поставленный вопрос можно сформулировать таким образом: при каких размерах установки термоядерная реакция будет самоподдерживающейся даже при наличии аномальной диффузии?

Как известно [46], в равнокомпонентной смеси дейтерия и трития для самоподдержания реакции должно быть удовлетворено соотношение

$$H^2\tau > 6 \cdot 10^7/\beta, \tag{1}$$

где τ — время удержания; $\beta = 8\pi p/H^2$; H — магнитное поле (в данном случае продольное).

Время удержания τ удобно отнести к бомовскому, полагая

$$\tau = \pi a^2 \frac{eH}{cT} \cdot \frac{1}{\alpha}, \tag{2}$$

где множитель $\alpha < 1$ учитывает возможность уменьшения эффективного коэффициента диффузии (или теплопроводности) по сравнению с бомовским [36].

Из выражений (1) и (2) получаем следующее условие самоподдержания реакции:

$$\alpha^2 H^3 > \frac{\alpha}{\beta} 2 \cdot 10^7 \frac{cT}{eH} . \qquad (3)$$

Отсюда видно, что для самоподдерживающегося реактора необходимо использовать максимально возможное магнитное поле.

В настоящее время имеется принципиальная возможность получения магнитного поля $H = 10^5$ *э* при помощи сверхпроводящих обмоток. Полагая в условии (3) $H = 10^5$ *э*, $T = 10^4$ *эв*, получаем

$$a > 140 \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} . \qquad (4)$$

Отсюда видно, что при $\beta \approx 10^{-2}$ и бомовском коэффициенте диффузии ($\alpha = 1$) малый радиус тора a оказывается равным 14 *м*, что представляется фантастически большим. Однако при $\alpha = 10^{-2}$ размер $a = 140$ *см* выглядит вполне разумным, и вопрос о достижении управляемого синтеза сводится, таким образом, к вопросу о возможности снижения турбулентного коэффициента диффузии до величины, на два порядка меньшей бомовской. Из результатов настоящей работы следует, что это вполне возможно.

В самом деле, как было установлено выше, в разреженной плазме одной из грозных неустойчивостей является неустойчивость на запертых частицах. Однако при $\lambda_e/a < \frac{1}{\theta} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \sim 10^3$ эта неустойчивость приводит к утечке, не превышающей утечку из-за дрейфовых неустойчивостей. При $T = 10^4$ *эв*, $n = 10^{15}$ *част/см*$^{-3}$ и $H = (1 \div 2) 10^5$ *э*, что как раз соответствует $\beta \approx 10^{-2} \approx \theta^2$, длина пробега равна $\lambda_e \approx 10^5$ *см*, т. е. она порядка $10^3 a$, и, следовательно, неустойчивость на запертых частицах не является непреодолимым препятствием. Что касается дрейфовых неустойчивостей, то все они приводят к развитию сильно локализованных ячеек с шириной локализации, не превышающей ρ_i/θ. Поэтому соответствующие коэффициенты теплопроводности и диффузии не превышают значения порядка $\rho_i/\theta a$ от бомовского (здесь учитывается наличие малого множителя порядка γ^2/ω^2 в выражениях для D и χ). При $T = 10^4$ *эв*, $H = 10^5$ *э* средний ларморовский радиус ионов равен $\rho_i \sim 10^{-1}$ *см*, таким образом, при $a \sim 10^2$ *см* и $\theta \sim 10^{-1}$ множитель α составляет $\rho^i/\theta a \approx 10^{-2}$. Следовательно, при указанных параметрах возможность достижения $\alpha \sim 10^{-2}$ представляется вполне реальной. Более того, из результатов настоящей работы следует, что при меньших температурах, когда неустойчивость на запертых частицах стабилизирована, приведенная

выше оценка относится лишь к температуропроводности, а коэффициент диффузии может быть значительно меньше.

Рассмотрим теперь вопрос о нагреве. Поскольку в высокотемпературной плазме при наличии не слишком малого шира θ продольный ток не приводит к дополнительным неустойчивостям и, кроме того, служит удобным средством создания перекрещенности силовых линий — шира, то, казалось бы, наиболее удобным методом нагрева плазмы является джоулев нагрев. В 1 $см^3$ в единицу времени выделяется энергия

$$j^2/\sigma = \frac{c^2 H_\vartheta^2}{4\pi^2 a^2 \sigma}, \tag{5}$$

где H_ϑ — значение азимутального магнитного поля на краю разряда (ток считается распределенным равномерно). Приравнивая это выражение потерям $\frac{1}{\tau}\, 3nT$ и учитывая, что $2nT = \beta H^2/8\pi$, получаем приближенно

$$H \gtrsim \alpha\beta \frac{H^2}{H_\theta^2} \cdot \frac{T\sigma}{ec}. \tag{6}$$

Подставляя сюда $T = 5$ *кэв* ($\sigma = 4 \cdot 10^{18}$), что соответствует температуре «зажигания реакции», при которой ядерное энерговыделение сравнивается с тормозными потерями, находим

$$H \gtrsim 10^9 \alpha\beta \frac{H^2}{H_\vartheta^2}\, э. \tag{7}$$

Величину H^2/H_ϑ^2 в очень крутых торах можно, казалось бы, довести до значения порядка 10. Тогда при $\beta \sim 10^{-2}$ и $H \sim 10^5$ э можно было бы удовлетворить неравенству (7), если бы на некоторое время, порядка времени нагрева, удалось снизить α до 10^{-3}. Из теоретических соображений следует, что возможность временного снижения величины α существует. Для этого можно использовать эффект малости коэффициента диффузии по сравнению с коэффициентом температуропроводности и на время нагрева производить «отрыв» плазмы от стенок либо изменением магнитного поля, либо перемещением диафрагмы. Кроме того, на периферии шнура можно добавить примеси, чтобы уменьшить проводимость и увеличить джоулево тепловыделение в этой области. Таким образом, не исключена возможность обойтись одним лишь джоулевым нагревом, но для этого нужно перейти к очень крутым торам, чтобы при $q > 1$ достигнуть возможно большего значения H_ϑ/H.

Итак, результаты настоящей работы приводят скорее к оптимистическим, чем к пессимистическим, выводам: даже при наличии турбулентной диффузии и теплопроводности можно получить управляемую термоядерную реакцию, но при довольно напряженных условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шафранов В. Д. В сб. «Вопросы теории плазмы». Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 2. М., Госатомиздат, 1963, стр. 111.
2. Шафранов В. Д. «Ядерный синтез», **3**, 183 (1963).
3. Брагинский С. И. В сб. «Вопросы теории плазмы». Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 1. М., Госатомиздат, 1962, стр. 183.
4. Шафранов В. Д. «Атомная энергия», **19**, 120 (1965).
5. Будкер Г. И. В кн. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Т. I. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 66.
6. Кадомцев Б. Б., Шафранов В. Д. «Докл. АН СССР», **167**, 65 (1966).
7. Knorr G. Phys. Fluids, **8**, 1334 (1965).
8. Морозов А. И., Соловьев Л. С. В сб. «Вопросы теории плазмы». Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 2. М., Госатомиздат, 1963, стр. 177.
9. Кадомцев Б. Б. В сб. «Вопросы теории плазмы». Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 2. М., Госатомиздат, 1963, стр. 156.
10. Suydam B. Proc. of 2nd UN Intern. Conference PUAE, Geneva, **31**, 157 (1958).
11. Furth H. et al. Proc. of 2nd Conf. Plasma Phys., paper CN 21/106, Culham (1965).
12. Kulsrud P. Ibid., CN 21/113, Culham (1965).
13. Ware A. A. Phys. Fluids, **7**, 2066 (1964).
14. Шафранов В. Д., Соловьев Л. С. В сб. «Вопросы теории плазмы». Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 5. М., Атомиздат, 1966.
15. Кадомцев Б. Б. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **45**, 1231 (1963).
16. Михайловский А. Б., Пашицкий Э. А. «Докл. АН СССР», **161**, 81 (1965).
17. Рудаков Л. И., Сагдеев Р. З. «Докл. АН СССР», **138**, 531 (1961).
18. Брагинский С. И. В сб. «Вопросы теории плазмы». Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 1. М., Госатомиздат, 1962, стр. 151.
19. Furth H. et al. Phys. Fluids, **6**, 459 (1963).
20. Кадомцев Б. Б. «Ж. техн. физ.», 10, 1209 (1961).
21. Coppi B. Phys. Fluids, **7**, 1501 (1964).
22. Погуце О. П. «Докл. АН СССР», **170**, (1967).
23. Михайловский А. Б., Погуце О. П. «Докл. АН СССР», **156**, 14 (1964).
24. Питаевский Л. П. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **44**, 969 (1963).
25. Михайловский А. Б., Михайловская Л. В. «Ядерный синтез», **5**, 234 (1965).
26. Coppi B., Rosenbluth M. Proc. of 2nd Conf. Plasma Phys. paper CN 21/105, Culham (1965).
27. Кадомцев Б. Б., Погуце О. П. Доклад на 2-й Международной конференции по управляемым термоядерным реакциям CN 21/127 Калэм (Англия), 1965.
28. Михайловский А. Б. «Ж. техн. физ.», **37**, (1967).
29. Михайловский А. Б. В сб. «Вопросы теории плазмы». Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 3. М., Госатомиздат, 1963, стр. 141.
30. Галеев А. А., Ораевский В. Н., Сагдеев Р. З. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **44**, 903 (1963).
31. Кадомцев Б. Б. В сб. «Вопросы теории плазмы». Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 4. М., Атомиздат, 1964, стр. 188.
32. Jukes Phys. Fluids, **7**, 1468 (1964).
33. Байков И. С. Письма в «Ж. эксперим. и теор. физ.», т. IV, 8, 299 (1966).
34. Моисеев С. С. «Ж. Пробл. приклад. матем. и техн. физ.», **10** (1966).
35. Bishop A. S., Smith C. G. Princeton Plasma Physics laboratory, Rep. Matt-403 (1966).

36. Bishop A. S., Hinnow E. Proc. of 2nd Conf. Plasma Phys., paper CN 21/119, Culham (1965).
37. Погуце О. П. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **52**, вып. 6 (1967).
38. Силин В. П., Рухадзе А. А. «Докл. АН СССР», **169**, 558 (1966).
39. Johnson J. et al. Phys. Fluids, **1**, 281 (1958).
40. Newcomb W. Phys. Fluids, **4**, 391 (1961).
41. Rusbridge M. G. et al. Nucl. Fusion, Suppl., 1962, p. 895.
42. Roberts K. V., Tayler J. B. Phys. Fluids, **8**, 315 (1965).
43. Кадомцев Б. Б. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **43**, 1688 (1962).
44. Шафранов В. Д., Брагинский С. И. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958». Доклады советских ученых. Т. 2. М., Атомиздат, 1959.
45. Васильев А. П., Долгов-Савельев Г. Г., Коган В. И. «Ядерный синтез». Приложение ч. 2, 655 (1962).
46. Арцимович Л. А. Управляемые термоядерные реакции. М., Физматгиз, 1963.

ЦИКЛОТРОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЫ

А. В. Тимофеев, В. И. Пистунович

§ 1. ВВЕДЕНИЕ. КЛАССИФИКАЦИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ

В настоящем обзоре обобщены и систематизированы результаты, полученные при исследовании устойчивости плазмы в магнитном поле с анизотропным распределением частиц по скоростям. Начало таким исследованиям положил Харрис [1], который показал, что плазма с анизотропным распределением электронов по скоростям неустойчива по отношению к раскачке электронных циклотронных колебаний. Позднее основное внимание было привлечено к вопросу устойчивости плазмы с анизотропным распределением ионов по скоростям (А. В. Тимофеев [2]; А. Б. Киценко и К. Н. Степанов [3]; Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров и В. И. Пистунович [4]; Дори, Гест и Харрис [5]; Холл, Хекротт и Каммаш [6]; Пост, Розенблют [7] и др.). Такая плазма характерна для адиабатических ловушек, поскольку эффективное удержание плазмы в таких системах возможно лишь при условии, что энерия движения ионов вдоль магнитного поля много меньше поперечной энергии. В этом случае теоретический анализ приводит к возможности возбуждения колебаний с частотами, близкими к ионным циклотронным, что подтверждается многочисленными экспериментами, в которых зарегистрированы шумы на циклотронных частотах. Поскольку интенсивность этих шумов на много порядков превышает тепловой уровень, то их возникновение естественно связывают с раскачкой неустойчивых колебаний [8], [9].

В большинстве теоретических работ, посвященных циклотронной неустойчивости, исследуется плазма низкого давления $\beta = \frac{8\pi p}{H^2} \ll 1$. Это обстоятельство связано с тем, что в настоящее время в экспериментах удается удерживать только такую разреженную плазму. (Устойчивость плотной плазмы с $\beta = \frac{8\pi p}{H^2} \approx 1$ исследовалась в более ранних работах А. А. Ве-

денова и Р. З. Сагдеева [10] и Р. З. Сагдеева и В. Д. Шафранова [11]). Рассмотрим также плазму низкого давления, предполагая ее однородной, и кроме того, ограничимся линейным приближением.

Последнее ограничение вызвано тем, что теоретическое изучение влияния нелинейных процессов на развитие колебаний только начинается (см., например, работу А. А. Галеева [12]), и еще далеко до создания полной картины. Что касается эффектов, связанных с неоднородностью плазмы, то они оказывают обычно более слабое воздействие на устойчивость плазмы, чем ее анизотропия, поэтому, за исключением некоторых частных случаев, ими можно пренебречь. Довольно подробное рассмотрение этих эффектов можно найти в работе А. Б. Михайловского [13] и в работах [14], [26].

Оставаясь в рамках линейной теории однородной анизотропной плазмы низкого давления, мы имеем достаточно большое количество теоретических работ. В них устойчивость плазмы рассматривается, как правило, при довольно специальных предположениях относительно функции распределения частиц по скоростям и интервала волновых чисел исследуемых колебаний. К настоящему времени получено удручающе большое количество на первый взгляд независимых неустойчивостей анизотропной плазмы. В то же время физические механизмы, приводящие к раскачке колебаний, отнюдь не отличаются таким разнообразием. Поэтому, для того чтобы ориентироваться во всем этом множестве неустойчивых колебаний, представляется естественным разделить их на группы в соответствии с механизмом раскачки. Как увидим ниже, сам механизм раскачки колебаний, в свою очередь, определяется знаком энергии колебаний. Практически основные типы неустойчивых колебаний могут быть изучены на примере двух простейших распределений: анизотропного максвелловского

$$f_0 = \left(\frac{m}{2\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{T_\perp T_\parallel^{1/2}} e^{-\frac{mv_\perp^2}{2T_\perp} - \frac{mv_\parallel^2}{2T_\parallel}} \tag{1}$$

и распределения в виде δ-функции

$$f_0 = \frac{1}{2\pi v_\perp} \delta(v_\perp - v_{\perp 0})\, \delta(v_\parallel). \tag{2}$$

Здесь значки $\parallel$ и $\perp$ (параллельно и перпендикулярно) отмечают направление относительно магнитного поля, которое предполагается однородным.

Обычно в экспериментах по удержанию плазмы, в том числе в адиабатических ловушках, распределение ионов или электронов по скоростям имеет более сложный вид, промежуточный по отношению к этим простейшим предельным случаям. Здесь ограничимся рассмотрением лишь предельных распределений

(1) и (2), поскольку в промежуточном случае, несмотря на существенное усложнение расчетов, мы не приходим к качественно новым результатам.

а) общие соотношения

Если давление плазмы мало ($\beta \ll 1$), то магнитное поле при колебаниях плазмы остается невозмущенным и, следовательно, сами колебания являются потенциальными. Основные свойства потенциальных колебаний определяются величиной

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{p, q} \frac{k_p k_q}{k^2} \varepsilon_{pq}(\mathbf{k}, \omega), \tag{3}$$

где ε_{pq} — тензор диэлектрической проницаемости плазмы; здесь и в дальнейшем возмущения стационарных величин выбираются в виде $e^{-i\omega t + i\mathbf{kr}}$ и считаются малыми.

Дисперсионное уравнение для определения собственных частот потенциальных колебаний имеет вид [15]

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 0. \tag{4}$$

При $\operatorname{Jm}\varepsilon \ll \operatorname{Re}\varepsilon$, когда $\gamma = \operatorname{Jm}\omega \ll \operatorname{Re}\omega$, из уравнения (4) находим

$$\gamma = -\operatorname{Jm}\varepsilon / \frac{\partial \operatorname{Re}\varepsilon}{\partial \omega}. \tag{5}$$

(Заметим, что условие $\operatorname{Jm}\varepsilon \ll \operatorname{Re}\varepsilon$ для циклотронных колебаний почти всегда выполняется.)

Таким образом, изменение амплитуды колебаний со временем $|E|^2 \sim e^{2\gamma t}$ зависит от величин $\operatorname{Jm}\varepsilon$, $\partial \operatorname{Re}\varepsilon/\partial\omega$, что имеет простой физический смысл. Действительно, знак $\operatorname{Jm}\varepsilon$ определяет, поступает энергия в волну ($\omega \operatorname{Jm}\varepsilon < 0$) или ее энергия поглощается ($\omega \operatorname{Jm}\varepsilon > 0$) $\frac{dW}{dt} = -\frac{\omega \operatorname{Jm}\varepsilon}{8\pi} |\mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}|^2$, в то время как величина $\omega \frac{\partial \operatorname{Re}\varepsilon}{\partial \omega}$ выражает энергию колебаний [15]:

$$W_{\mathbf{k}} = \frac{1}{16\pi} \omega \frac{\partial \operatorname{Re}\varepsilon}{\partial \omega} |\mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}|^2. \tag{6}$$

Следовательно, в соответствии с уравнением (5), если $W_k > 0$, то для раскачки необходимо увеличение энергии колебаний ($\omega \operatorname{Jm}\varepsilon < 0$), в обратном случае, когда $W_k < 0$, для увеличения амплитуды колебаний требуется поглощение энергии ($\omega \operatorname{Jm}\varepsilon > 0$). На возможность раскачки колебаний последнего типа в термодинамически неравновесной плазме было обращено внимание в работе [16].

б) раскачка циклотронных колебаний с нормальной дисперсией $\left(\omega \frac{\partial \operatorname{Re} \varepsilon}{\partial \omega} > 0\right)$

Как известно (см., например, работу [17]), в термодинамически равновесной плазме, т. е. однородной, изотропной и изотермической ($T_e = T_i$), все собственные колебания обладают положительной энергией. Если плазма неизотермична ($T_e \neq T_i$), но однородна и изотропна, то и в этом случае энергия собственных колебаний положительна.

В неизотермической плазме с горячими электронами ($T_e > T_i$) имеются две ветви потенциальных колебаний: высокочастотная — электронных ленгмюровских колебаний и низкочастотная — ионных ленгмюровских. Последние с увеличением плотности переходят в ионно-звуковые. Если электроны холодные ($T_e \ll T_i$), то остается лишь ветвь электронных ленгмюровских колебаний. Интересно отметить, что при определенных условиях (см. п. 13 § 3) эти колебания переходят в электронно-звуковые с частотой $\omega \approx k_\parallel \sqrt{\frac{T_i}{m}}$.

Как будет видно из дальнейшего, в неустойчивых режимах частота колебаний близка к ионной циклотронной частоте при анизотропном распределении ионов по скоростям и к электронной циклотронной частоте при анизотропном распределении электронов.

Поэтому в плазме в магнитном поле отдельные ветви следует различать не по абсолютному значению частоты, а по закону дисперсии, т. е. по зависимости ω от $\mathbf{k}$. Различие в законе дисперсии приводит, в частности, к различным значениям фазовой скорости вдоль магнитного поля для отдельных ветвей колебаний. Так, для высокочастотных колебаний $v_{\Phi\parallel} = \frac{\omega}{k_\parallel} \gg v_{Te}$, а для низкочастотных $v_{\Phi\parallel} < v_{Te}$.

В анизотропной плазме, помещенной в магнитное поле, закон дисперсии этих колебаний меняется по сравнению со случаем изотропной плазмы без магнитного поля. Однако величина $\omega \frac{\partial \operatorname{Re} \varepsilon}{\partial \omega}$, а с нею и энергия колебаний остаются положительными [см. уравнение (6)]. Поэтому для их раскачки требуется поступление энергии в колебания. В анизотропной плазме в магнитном поле энергия может поступать за счет циклотронного излучения резонансных ионов или электронов, т. е. частиц, для которых выполняется условие $v_{\parallel j} = \frac{\omega - n\omega_j}{k_\parallel}$. Заметим, что в случае распределений (1) и (2) раскачка за счет черенковского излучения (резонанс на нулевой гармонике, $n = 0$) невозможна, так как функция распределения по продольным скоростям $f_0(V_\parallel)$ является монотонно убывающей (пучки отсутствуют).

Раскачка колебаний происходит особенно интенсивно, если частота колебаний близка к циклотронной, так как в этом случае условие циклотронного резонанса выполняется для большого числа частиц. Это объясняет близость частот неустойчивых колебаний к циклотронным. Нетрудно видеть также, что в реальных системах раскачка колебаний с положительной энергией при распределении частиц по скоростям в виде δ-функции практически невозможна.

Действительно, во всякой ограниченной системе значения **k** определяются ее геометрией и, следовательно, точный резонанс

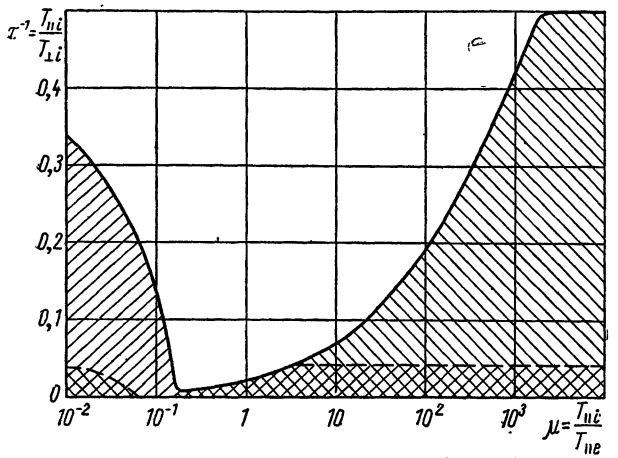


Рис. 1. Область неустойчивости анизотропной максвелловской плазмы. Двойной штриховкой выделены области неустойчивости колебаний с аномальной дисперсией.

$\omega(\mathbf{k}) = n\omega_i$ неосуществим. Но именно такой резонанс необходим для раскачки при отсутствии теплового разброса, $v_{\parallel j} = 0$. Разумеется, распределение в виде δ-функции является идеализированным. Оно выбрано нами потому, что на этом примере наиболее просто могут быть изучены некоторые типы колебаний с аномальной дисперсией.

Для плазмы с анизотропным максвелловским распределением ионов по скоростям оказалось удобным изобразить области неустойчивости колебаний с положительной энергией на $\mu - \tau$-диаграмме, $\mu = \frac{T_{\parallel i}}{T_{\parallel e}}$, $\tau^{-1} = \frac{T_{\parallel i}}{T_{\perp i}}$. Ее левую часть занимает область неустойчивости «медленных», ионно-звуковых колебаний, а правую — «быстрых», электронных ленгмюровских. Границы области неустойчивости этих колебаний очерчены сплошной линией (рис. 1).

в) раскачка циклотронных колебаний с аномальной дисперсией $\left(\omega \frac{\partial \operatorname{Re} \varepsilon}{\partial \omega} \leqslant 0\right)$

Если анизотропия плазмы достаточно велика, то в этом случае могут появиться новые ветви колебаний, дисперсия которых аномальна $\omega \frac{\partial \operatorname{Re} \varepsilon}{\partial \omega} \leqslant 0$. В соответствии с уравнением (6) их энергия должна быть равна нулю или отрицательна.

Из общих термодинамических соотношений следует, что такие колебания возможны только в неравновесных системах, когда невозмущенное движение частиц в достаточной степени упорядоченно [16]. В этом случае движение частиц в поле волны, накладываясь на их невозмущенное движение, может приводить к уменьшению энергии последнего. По отношению к таким колебаниям и употребляется термин «колебания с отрицательной энергией».

В плазме в магнитном поле с анизотропным распределением ионов частота колебаний с отрицательной энергией близка к ионной циклотронной, так как в этом случае взаимодействие между волной и начальным движением ионов (вращение по ларморовской окружности) особенно сильно.

При раскачке колебаний с отрицательной энергией энергия неравновесной системы, в данном случае ионов, уменьшается. Освобождаемая при этом энергия должна быть отведена из системы. Вообще говоря, она может выводиться наружу из плазмы, например, в результате излучения, но может диссипироваться и внутри плазмы. Оказывается, что в бесстолкновительной плазме наиболее эффективным механизмом диссипации является поглощение энергии колебаний резонансными электронами. Такое поглощение в случае колебаний с положительной энергией приводит к затуханию колебаний (затухание Ландау на электронах).

Таким образом, следует ожидать, что раскачка колебаний с отрицательной энергией будет сопровождаться увеличением энергии электронов, т. е. их нагревом. Возможно, что именно этот процесс и вызывает нагрев электронов, которым нередко сопровождается раскачка колебаний в адиабатических ловушках [18].

Рассмотрим теперь раскачку колебаний с нулевой энергией, для которых $\omega \frac{\partial \operatorname{Re} \varepsilon}{\partial \omega} = 0$. В этом случае вблизи границы неустойчивости дисперсионное уравнение (4) можно записать в виде

$$\frac{(\delta\omega)^2}{2!} \varepsilon''_{\omega^2}(\omega_c, \tau_c) + \delta\tau \varepsilon'_{\tau}(\omega_c, \tau_c) = 0. \qquad (7)$$

Здесь критические значения частоты ω_c и анизотропии $\tau_c = \left(\frac{T_\perp}{T_\parallel}\right)_c$ определяются из условий $\varepsilon(\omega_c, \tau_c) = \varepsilon'_\omega(\omega_c, \tau_c) = 0$. Из уравнения (7) следует, что при изменении τ мнимая часть одного из корней должна стать положительной, что соответствует неустойчивым колебаниям. При раскачке колебаний с нулевой энергией энергия упорядоченного движения не меняется ($\mathrm{Jm}\,\varepsilon = 0$). Это означает, что хотя энергия ионов в поле волны уменьшается, но настолько же возрастает колебательная энергия электронов и энергия электрического поля, так что полная сумма этих изменений равняется нулю.

В плазме с анизотропным распределением электронов по скоростям уменьшение их энергии при раскачке колебаний подобного типа компенсируется увеличением энергии электрического поля.

На рис. 1 область неустойчивости колебаний с аномальной дисперсией в плазме с анизотропной максвелловской функцией распределения ионов занимает нижнюю часть рисунка (двойная штриховка). Причем внутри области неустойчивости ионно-звуковых колебаний расположена область неустойчивости колебаний с отрицательной энергией (диссипативная неустойчивость), а внутри области неустойчивости электронных ленгмюровских колебаний — область неустойчивости гидродинамического типа (энергия этих колебаний равна нулю). Эти термины для неустойчивостей приняты нами в силу того, что при раскачке диссипативной неустойчивости имеет место необратимое поглощение энергии резонансными электронами, а для колебаний с нулевой энергией, как и в гидродинамическом случае, эффекты взаимодействия резонансных частиц с волной оказываются несущественными. (Заметим, что неустойчивость гидродинамического типа возможна и в плазме с горячими электронами, см. § 3.)

Если распределение ионов по скоростям определяется δ-функцией, то эффективное значение τ, которое характеризует отношение поперечной энергии частиц к продольной, оказывается равным бесконечности. В этом случае (см. предыдущий раздел) раскачиваются только колебания с аномальной дисперсией. Причем, как и в случае анизотропного максвелловского распределения, при малых μ (горячие электроны) более существенна диссипативная неустойчивость, а для больших μ (холодные электроны) — неустойчивость гидродинамического типа. В то же время при достаточно большой плотности плазмы, а именно когда дебаевский радиус ионов r_{di} становится меньше ларморовского r_i, начинают раскачиваться колебания с малыми значениями $k_\parallel$, в развитии которых электроны вообще не участвуют и которые поэтому неустойчивы при любых значениях μ [5]. Одновременно с этим появляется неустойчивость, частота и

инкремент которой существенно превышают циклотронную частоту (см. п. г § 1).

В реальных системах обычно приходится иметь дело с распределениями промежуточного типа, когда значителен разброс по скоростям, как в анизотропном максвелловском распределении, и отсутствуют частицы с малой энергией, как в распределении вида δ-функции. Подобные распределения, например, должны устанавливаться в адиабатических ловушках под действием соударений при большой плотности плазмы. В этом случае неустойчивыми являются как колебания с нормальной, так и с аномальной дисперсией. Причем обычно инкремент последних оказывается больше.

г) колебания с частотой $\omega \gg \omega_i$

Плазма с распределением частиц по скоростям в виде δ-функции обладает худшей устойчивостью, чем плазма с максвелловским распределением при $T_{\parallel i} = 0$. Так, в плазме с распределением частиц в виде δ-функции становятся неустойчивыми колебания, распространяющиеся поперек магнитного поля [5], а также появляется неустойчивость на «нулевой гармонике» (энергия этих колебаний равна нулю) [13]. Однако наиболее важное свойство такой плазмы, обнаруженное в работе [7], заключается в том, что в ней в результате черенковского излучения ионов могут раскачиваться электронные ленгмюровские колебания с частотой, много большей циклотронной ионной, распространяющиеся под углом к магнитному полю. Как известно, черенковское излучение возможно в том случае, если производная от функции распределения по направлению распространения волны положительна. Нетрудно показать, что при распределении частиц по поперечным скоростям в виде δ-функции это действительно имеет место.

Пусть волновой вектор колебаний содержит компоненту, перпендикулярную к магнитному полю, обозначим ее k_y. Тогда для $f_0(v_y) = \int f_0(v_\perp)\, dv_x$ при $f_0(v_\perp) = \frac{1}{2\pi v_\perp}\,\delta(v_\perp - v_{\perp 0})$ получаем $f_0(v_y) = \frac{1}{2\pi}\,(v_{\perp 0}^2 - v_y^2)^{-1/2}$ для $v_{\perp 0} > v_y$ и $f_0(v_y) = 0$ для $v_y > v_{\perp 0}$. Несложно найти, что производная будет положительна также в случае размытого распределения по энергиям при условии отсутствия частиц с малой энергией. Такие распределения, как известно, характерны для адиабатических ловушек. По мнению авторов работы [7], в результате черенковской раскачки ленгмюровских колебаний в адиабатических ловушках должны иметь метод дополнительно значительные потери частиц.

Итак, рассмотрены основные типы неустойчивости анизотропной плазмы в магнитном поле. Наша задача состоит теперь

в определении границ области неустойчивости и характерных инкрементов раскачки колебаний. Основные результаты этого исследования приведены в заключении.

§ 2. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ

Для исследования вопроса об устойчивости плазмы низкого давления необходимо разрешить уравнение (4) $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 0$ относительно ω. Плазму следует считать неустойчивой, если по крайней мере одна из найденных таким образом собственных частот будет иметь положительную мнимую часть. В случае однородной плазмы вычисление ε производится сравнительно просто (см., например, работы [11], [19]). Не повторяя вывода, приведем лишь окончательный результат:

$$\varepsilon = 1 + \sum \varepsilon_j = 1 + \frac{2\pi}{k^2} \sum_{j=e,i} \omega_{pj}^2 \int_0^\infty v_\perp dv_\perp \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_j}\right) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_\parallel \left(\frac{n\omega_j}{v_\perp} \cdot \frac{\partial}{\partial v_\perp} + k_\parallel \frac{\partial}{\partial v_\parallel}\right) f_{0j}}{\omega - n\omega_j - k_\parallel v_\parallel} = 0. \qquad (8)$$

Здесь ω_{pj} — плазменная частота частиц сорта j; ω_j — циклотронная частота; f_{0j} — начальная функция распределения; J_n — функция Бесселя индекса n, значки $\parallel$ и $\perp$ (параллельно и перпендикулярно) отмечают направление относительно магнитного поля.

Ограничимся рассмотрением простейших типов распределений ионов или электронов по скоростям: анизотропного максвелловского (1) и распределения в виде δ-функции (2).

В этих случаях интегралы в выражении для ε_j могут быть вычислены в явном виде. Так, например, в случае анизотропного максвелловского распределения получаем

$$\varepsilon_j = \frac{\omega_{pj}^2 m_j}{k^2 T_{\parallel j}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-p_j^2} I_n(p_j^2) \left\{1 + i\sqrt{\pi}(z_{nj} + nh\tau_j^{-1}) W(z_{nj})\right\}. \qquad (9)$$

Здесь I_n — функция Бесселя от мнимого аргумента; $W(z_{nj})$ интеграл вероятности от комплексного аргумента $z_{nj} = \frac{\omega - n\omega_j}{k_\parallel v_{\parallel j}}$;

$$h = \frac{\omega_j}{k_\parallel v_{\parallel j}}; \quad p_j = k_\perp r_j; \quad r_j = \sqrt{\frac{2T_{\perp j}}{m_j}} \cdot \frac{1}{\omega_j}.$$

Для распределения по скоростям в виде δ-функции легко найти

$$\varepsilon_j = -\omega_{pj}^2 \frac{k_\parallel^2}{k^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{\frac{1}{(\omega - n\omega_j)^2} + \frac{nk_\perp}{k_\parallel^2 v_{\perp 0j}(\omega - n\omega_j)} \frac{\partial}{\partial p_j}\right\} J_n^2(p_j). \qquad (10)$$

При рассмотрении плазмы с анизотропной функцией распределения ионов по скоростям будем считать распределение электронов по продольным скоростям максвелловским:

$$f_{0e} = \left(\frac{m}{2\pi T_{\parallel e}}\right)^{1/2} e^{-\frac{mv_\parallel^2}{2T_{\parallel e}}}.$$

Конкретный вид распределения электронов по поперечным скоростям, когда $\omega \ll \omega_e$ и $k_\perp v_{\perp e}/\omega_e \ll 1$, оказывается несущественным. В этом случае в ε_e можно оставить только нулевой член

$$\varepsilon_e = \frac{\omega_{pe}^2 m}{k^2 T_{\parallel e}}[1 + i\sqrt{\pi}\, z_e W(z_e)]. \tag{11}$$

Как видно, выражения для ε_j достаточно сложны, причем в них входит большое число параметров, характеризующих колебания (ω, $k_\parallel$, $k_\perp$) и состояние плазмы (n_0, $T_{\perp j}$, $T_{\parallel j}$). При отыскании максимального инкремента или определении «абсолютной» границы области неустойчивости, т. е. минимального значения анизотропии, при котором плазма неустойчива, приходится при заданных параметрах плазмы искать экстремальные по $k_\parallel$, $k_\perp$ значения $\gamma = \mathrm{Im}\,\omega$ или τ соответственно. Действительная часть частоты определяется дисперсионным уравнением. Такая задача точно может быть решена лишь численными методами, что и сделано при определении границы области неустойчивости.

В то же время значительная часть информации будет получена нами приближенными методами, основанными на использовании упрощенных выражений для сложных функций, входящих в уравнения (9)—(11). Так, например, для интеграла вероятности от комплексного аргумента имеем

$$W(z) \approx 1 + i\frac{2}{\sqrt{\pi}} z + \ldots \text{ при } z \ll 1; \tag{12}$$

$$W(z) \approx e^{-z^2} + \frac{i}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{2z^3} + \ldots\right) \text{ при } z \gg 1. \tag{13}$$

Аналогично для функций Бесселя от действительного и мнимого аргумента, входящих в эти уравнения, используем следующие выражения:

$$J_n(p) \approx \frac{1}{n!}\left(\frac{p}{2}\right)^n + \ldots (p \ll n);\ I_n(p^2) \approx$$

$$\approx \left(\frac{p^2}{2}\right)^n \frac{1}{n!} + \ldots \text{ при } p^2 \ll n; \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} J_n(p) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi p}} \cos\left[p - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] + \ldots \text{ при } p \gg n; \\ I_n(p^2) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi p^2}} e^{p^2} + \ldots \text{ при } p^2 \gg n. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

В работе введены обозначения:

$$\omega_j = \frac{eH}{m_j c}, \quad \omega_{pj}^2 = \frac{4\pi e^2 n_{0j}}{m_j}, \quad m_e = m, \quad m_i = M,$$

$$s = (k r_{d\parallel i})^{-1}, \quad p_j = k_\perp r_j, \quad r_{dj} = \left(\frac{T_j}{4\pi e^2 n_j}\right)^{1/2}; \tag{16}$$

$$\tau_j = \frac{T_{\perp j}}{T_{\parallel j}}, \quad \mu = \frac{T_{\parallel i}}{T_{\parallel e}}, \quad z_{nj} = \frac{\omega - n\omega_j}{k_\parallel V_{\parallel j}}, \quad h_j = \frac{\omega_j}{k_\parallel V_{\parallel j}},$$

$$x_{nj} = \frac{\omega - n\omega_j}{\omega_j}, \quad \zeta_n(p^2) = I_n(p^2)\, e^{-p^2}.$$

В случае плазмы с анизотропным распределением ионов по скоростям (см. § 3 и 4) величины, стоящие без индекса j, характеризуют ионную компоненту плазмы.

§ 3. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ С АНИЗОТРОПНЫМ МАКСВЕЛЛОВСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ИОНОВ

а) ионно-звуковые колебания ($\mu < 1$)

Как известно, фазовая скорость ионно-звуковых колебаний лежит в следующих пределах: $v_{\parallel e} \gg v_{\Phi\parallel} = \frac{\omega}{k_\parallel} \gg v_{\parallel i} (z_e \ll 1, z_{0i} \gg 1)$. Это означает, что электроны в поле волны успевают распределиться по Больцману, а ионы движутся гидродинамически. Поскольку мы рассматриваем колебания с частотой, близкой к циклотронной, то величина $z_{1i} = \frac{\omega - \omega_i}{k_\parallel v_{\parallel i}}$ при этом может быть как больше, так и меньше единицы. Для определения границы области неустойчивости нам понадобится дисперсионное уравнение при $z_{1i} \gg 1$.

В случае колебаний с частотой, лежащей между нулем и первой циклотронной, в ионной части дисперсионного уравнения можно оставить только нулевое и первое слагаемое, при этом само уравнение приобретает следующий простой вид:

$$s^{-2} + \mu - \frac{\zeta_0(p^2)}{2z_0^2} - \frac{\zeta_1(p^2)}{x_1\tau} - \frac{\zeta_1(p^2)}{2z_1^2} =$$

$$= -i\sqrt{\pi} h \left\{ \mu^{3/2} \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \frac{\omega}{\omega_i} + \zeta_0 x_0 e^{-z_0^2} + \zeta_1 (x_1 + \tau^{-1})\, e^{-z_1^2} \right\}. \tag{17}$$

Мнимая часть уравнения (17) мала, поэтому частоты собственных колебаний в этом уравнении в первом приближении можно считать действительными.

Если величина p мала, а частота колебаний не слишком близка к циклотронной, то в левой части уравнения (17) можно опус-

тить два последних члена. При этом уравнение (17) принимает простой вид: $1 + (kr_{d\parallel e})^{-2} - k_\parallel^2\omega_{pi}^2/k^2\omega^2 = 0$. Откуда для плазмы высокой плотности $k^2r_{d\parallel e}^2 \ll 1$ ($\mu s^2 \gg 1$) имеем $\omega^2 = k_\parallel^2 T_e/M$. С уменьшением плотности, когда начинает выполняться обратное условие $k^2r_{d\parallel e}^2 \gg 1$ ($\mu s^2 \ll 1$), ионно-звуковые колебания переходят в ионные ленгмюровские с частотой $\omega^2 = \omega_{pi}^2 k_\parallel^2/k^2$.

Поскольку энергия ионно-звуковых колебаний положительна $\left(\omega\dfrac{\partial \operatorname{Re}\varepsilon}{\partial\omega} \approx \dfrac{s^2}{z_0^2} > 0\right)$, эти колебания неустойчивы, если циклотронное излучение ионов, учитываемое последним членом в правой части уравнения (17), преобладает над черенковским поглощением энергии колебаний электронами и ионами [первый и второй члены в правой части уравнения (17)]. При этом правая часть уравнения (17), равная $-s^{-2}\operatorname{Im}\varepsilon$, положительна.

В общем случае для определения величины минимальной анизотропии в распределении ионов $\tau_{\text{мин}}$, при которой возможна неустойчивость, оказываются необходимыми численные расчеты. Результаты приведены на рис. 1 (см. его левую часть). Как следует из этого рисунка, с увеличением μ растет и $\tau_{\text{мин}}(\mu)$. Причем при типичном значении $\mu \approx 0{,}1$, $\tau_{\text{мин}} \approx 1$, $x_1 \approx 1$, $k_\parallel \approx k_\perp \approx r_i^{-1}$. Однако для квазинейтральной плазмы $\mu s^2 \gg 1$ при $\mu \to 0$ зависимость $\tau_{\text{мин}}(\mu)$ может быть выражена в аналитическом виде. Для ее определения сделаем следующие предположения:

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \alpha;\ \tau^{-1} = \frac{1}{2} - \beta;\ p^2 \ll 1;\ 0 < \alpha;\ \beta \ll 1.$$

Приравнивая третий и четвертый члены из левой части уравнения (17), находим $h_1^2x_1^2 \approx z_0^2 \approx p^{-2}$ ($h^2 \approx 4/p^2$ при $x \approx 1/2$). Минимальное значение β, а следовательно, и минимальное значение анизотропии в распределении ионов определяется правой частью уравнения (17). Из условия отрицательности последнего члена в правой части следует $\beta \gtrsim \alpha$. Поскольку предэкспоненциальный множитель в последнем члене мал, то, для того чтобы сумма двух последних членов была отрицательной, необходимо, чтобы показатели экспонент различались по порядку величины на число, большее единицы ($h^2\alpha \gtrsim 1$, $\alpha \gtrsim h^{-2}$). Наконец, сравнивая по порядку величины первый и последний члены в правой части уравнения (17), находим $\mu^{3/2}(m/M)^{1/2} \approx h^{-4}e^{-h^2}$.

Откуда следует

$$\frac{1}{2} - \tau_{\text{мин}}^{-1} = \beta_{\text{мин}} \gtrsim h^{-2} \approx \left|\ln \mu^{3/2}\left(\frac{m}{M}\right)^{1/2}\right|^{-1} \ll 1. \qquad (18)$$

При этом экстремальное, т. е. соответствующее наибольшему инкременту, значение частоты близко к половине циклотронной, а экстремальные значения компонент волновых векторов определяются из условий $p^2 = k_\perp^2 r_i^2 \approx h^{-2}(k_\parallel v_{\parallel i}/\omega_i)^2 \approx \left|\ln \mu^{3/2}\left(\dfrac{m}{M}\right)^{1/2}\right|^{-1} \ll$

$\ll 1$. Очевидно, что условия $p^2 \ll 1$, $h \gg 1$, при которых справедливы наши оценки, выполняются лишь для очень малых μ и для систем, обладающих очень большими размерами ($L_\perp \gg r_i$; $L_\parallel \gg r_i$). В реальных системах, размеры которых ограничены, область неустойчивости должна уменьшаться. Однако из уравнения (17) нетрудно видеть, что даже для систем с $L_\parallel \approx L_\perp \approx r_i$ при $\mu \to 0$ на границе области неустойчивости имеем $\tau_{\text{мин}}^{-1}(0) \approx 1$.

Не прибегая к численным расчетам, можно также показать, что область неустойчивости ионно-звуковых колебаний должна быть ограничена со стороны больших μ. Этот результат легко получить непосредственно из уравнения $\varepsilon = 0$. Действительно, для ионно-звуковых колебаний, при которых $z_e \ll 1$, электронный вклад в уравнение по порядку величины равен μ, в то время как ионный по порядку величины не может превысить единицы. Следовательно, уравнение (17) при $\mu \gtrsim 1$, $z_e \lesssim 1$ не может быть удовлетворено. В этом случае для электронов необходимо потребовать $z_e \gtrsim 1$ (см. п. в § 3), что соответствует гидродинамическому движению электронов в поле волны. При этом ионно-звуковые колебания переходят в электронные ленгмюровские (см. рис. 1).

Рассмотрим теперь вопрос об инкрементах ионно-звуковой неустойчивости. Если нас интересуют существенные (не экспоненциально малые) инкременты, то величину z_{1i} следует считать малой, $z_{1i} \ll 1$. (В обратном случае, когда $z_{1i} \gg 1$, вклад резонансных ионов, который пропорционален множителю $e^{-z_{1i}^2}$ экспоненциально мал.) Считая также $z_e \ll 1$ и $z_{0i} \gg 1$, получаем [ср. с уравнением (17)]

$$s^{-2} + \mu + \zeta_1 - \frac{\zeta_0}{2z_0^2} = -i\sqrt{\pi}h\left\{\zeta_1(x_1 + \tau^{-1}) + \mu^{3/2}\left(\frac{m}{M}\right)^{1/2}\right\}. \quad (19)$$

Частоту колебаний по-прежнему считаем в первом приближении действительной. Колебания становятся неустойчивыми, если $\operatorname{Im}\varepsilon < 0$, т. е. при $x_1 \gtrsim \tau^{-1}$; $\zeta_1 x_1 \gtrsim \mu^{3/2}(m/M)^{1/2}$. Этим условиям, а также условиям $z_{0i} \gg 1$; $z_e \ll 1$; $z_{1i} \ll 1$ можно удовлетворить, если соответствующим образом подобрать величину $h = \omega_i/k_\parallel v_{\parallel i}$. Поэтому удобно выразить h через остальные параметры, приравнивая нулю левую часть уравнения (19), и привести все эти условия к виду

$$\left\{\tau^2;\ \tau\left(\frac{L_\parallel}{r_i}\right)^2;\ \frac{M}{m}\frac{\zeta_1^2}{\mu^3};\ \frac{M}{m}\frac{1}{\mu}\right\} \gtrsim h^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\zeta_0}{k^2 r_{d\parallel i}^2 + \mu + \zeta_1} \gtrsim \text{макс}\left\{1;\ \frac{\tau}{k^2 r_i^2}\right\}. \quad (20)$$

Здесь учтено также, что $k_\parallel$ может изменяться в пределах $L_\parallel^{-1} \lesssim k_\parallel \lesssim k$ ($L_\parallel$ — длина установки вдоль магнитного поля).

Условия (20) по существу определяют $k_\perp$ для неустойчивых колебаний. При выполнении этих условий из (19) нетрудно найти порядок величины инкремента

$$\gamma/\omega_i \approx \left(1 + \frac{\mu + k^2 r_{d\parallel i}^2}{\zeta_1}\right)^{-1}. \qquad (21)$$

Из последнего неравенства в выражении (20) следует, что неустойчивость развивается лишь в достаточно плотной плазме, когда $r_i^2 \gtrsim r_{di}^2$ (рис. 2). При этом должны выполняться условия $\mu \lesssim 1$, $\tau \gtrsim 1$ (точные значения μ, τ получены при численном подсчете), а длина установки не должна быть слишком малой $L_\parallel \gtrsim r_i$. Инкремент ионно-звуковой неустойчивости может быть весьма велик, достигая в квазинейтральной плазме значений порядка ω_i.

Ионно-звуковая неустойчивость на примере плазмы с анизотропным максвелловским распределением ионов по скоростям была рассмотрена в работе [2], где определены ее границы для квазинейтральной плазмы на плоскости $\mu - \tau$ (см. левую часть рис. 1).

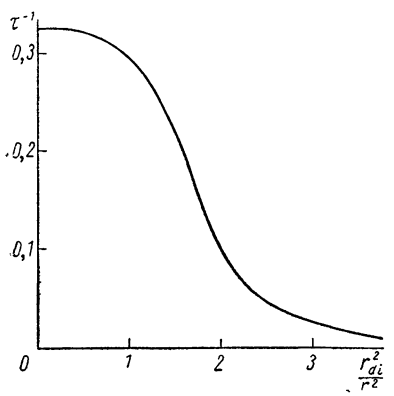


Рис. 2. Зависимость величины анизотропии $\tau^{-1} = T_{\parallel i}/T_{\perp i}$ от плотности плазмы $r_{di}^2/r_i^2 \approx \omega_i^2/\omega_{pi}^2$ при $\mu = T_{\text{II}\ i}/T_{\text{II}\ e} = 10^{-2}$.

Ионно-звуковая неустойчивость в плазме с распределением ионов по продольным скоростям в виде $(a^2 + v_{\parallel i}^2)^{-1}$ исследовалась в работе [6]. (По классификации, принятой в этой работе, тип В ион-ионных колебаний.) Спектр неустойчивых колебаний в такой плазме должен быть особенно широк. Действительно, ионно-звуковая неустойчивость раскачивается в результате излучения резонансных ионов, т. е. ионов, для которых выполняется условие $\omega - n\omega_i = k_\parallel V_{\parallel i}$. В случае максвелловского распределения по $V_{\parallel i}$ ионы с $V_{\parallel i} \gg V_{T\parallel i}$ практически отсутствуют. В то же время для распределения в виде $(a^2 + V_{\parallel i}^2)^{-1}$ число таких частиц довольно значительно. В работе [6] определена также граница неустойчивости по плотности $(r_i^2 \approx r_{di}^2)$.

б) диссипативная неустойчивость $(\mu \lesssim 1,\ \tau \ll 1)$

В п. в § 1 отмечено, что если анизотропия в распределении ионов достаточно велика ($\tau \gg 1$), то может появиться ветвь колебаний с отрицательной энергией ($\omega \partial \operatorname{Re} \varepsilon/\partial\omega < 0$). Такие коле-

бания раскачиваются при условии поглощения их энергии, поэтому соответствующая неустойчивость названа нами диссипативной [16].

Для изучения подобной неустойчивости можно воспользоваться уравнением (17), в котором положим $|x_1| \ll 1$; $z_{0i}^2 \gg z_{1i}^2 \gg 1$; $\tau \gg z_{1i}^2/x_1 \gg 1$. При этом действительная часть уравнения (17) принимает следующий вид:

$$s^{-2} + \mu - \frac{\zeta_1(p^2)}{2z_{1i}^2} = 0 \qquad (22)$$

или в обычных обозначениях: $1 + (kr_{d\parallel e})^{-2} - \frac{k_\parallel^2}{k^2} \cdot \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega - \omega_i)^2} \zeta_1 = 0$.

Из уравнения (22) следует, что ионно-звуковые и ленгмюровские колебания, упоминавшиеся во введении, имеют свои аналоги вблизи ионной циклотронной частоты, а именно

$$(\omega - \omega_i)^2 \approx k_\parallel^2 \frac{T_e}{M} \zeta_1 \text{ при } k_\parallel^2 r_{d\parallel e}^2 \ll 1;$$

$$(\omega - \omega_i)^2 \approx \frac{k_\parallel^2}{k^2} \omega_{pi}^2 \zeta_1 \text{ при } k_\parallel^2 r_{d\parallel e}^2 \gg 1.$$

Нетрудно видеть, что энергия колебаний, соответствующих меньшему корню ($\omega < \omega_i$), отрицательна:

$$\omega \frac{\partial \operatorname{Re} \varepsilon}{\partial \omega} = s^2 \frac{\zeta_1}{z_{1i}^2} \cdot \frac{\omega}{\omega - \omega_i} < 0.$$

При определении границы области диссипативной неустойчивости можно использовать упрощенное уравнение (17). Причем, если ищут «абсолютную» границу — минимальное значение анизотропии τ, при котором еще возможна диссипативная неустойчивость, то значения характеристик колебаний необходимо взять такими, чтобы отношение последнего члена в левой части уравнения (17) к предыдущим было наибольшим, так как только последний член дает отрицательный вклад в величину $\omega \partial \operatorname{Re} \varepsilon/\partial\omega$. В частности, оптимальное значение p^2 равно $p^2 \approx 1{,}2$, при этом $\zeta_1(p^2)$ максимально $\zeta_1 \approx 0{,}2$.

Отметим также, что в области диссипативной неустойчивости $|x_1| < 1/2$, так как только в этом случае $z_0 > |z_1|$ и величина $\omega \partial \operatorname{Re} \varepsilon/\partial\omega$ может быть отрицательной.

Рассмотрим сначала случай малых $\mu (\mu\tau \lesssim \zeta_1)$, когда электронным вкладом в действительную часть уравнения (17) можно пренебречь. Плазму полагаем квазинейтральной $\mu s^2 \lesssim 1$. На границе области неустойчивости, приравнивая нулю действительную часть (17), получаем $2z_1^2 \approx -x_1\tau$. Поскольку полагали $z_{1i}^2 \gtrsim 1$, то $|x_1| \approx z_1^2/\tau \gtrsim \tau^{-1}$ и, следовательно, вклад первой гар-

моники в мнимую часть (17) отрицателен, т. е. способствует затуханию колебаний (энергия излучается резонансными ионами на циклотронной частоте). Для того чтобы уменьшить этот член, показатель экспоненты, т. е. $z_1^2 \approx |x_1|\tau$, нужно увеличить. Однако значения $|x_1|$ ограничены τ^{-1}, и, следовательно, по порядку величины имеем $z_{1\text{макс}}^2 \lesssim \tau\,(k_\parallel^2 r_i^2 \gtrsim 1)$. Нулевой ионный резонанс (ионное затухание Ландау) хотя и входит с положительным знаком, но мал по величине $z_0 \gtrsim z_1$. Таким образом, неустойчивость возможна лишь при учете затухания Ландау на электронах [первый член в правой части (17)]. Причем на границе области неустойчивости по порядку величины получаем

$$\tau \approx \ln\left[\frac{\zeta_1}{\mu^{3/2}}\left(\frac{M}{m}\right)^{1/2}\right]. \tag{23}$$

Рассмотрим теперь область больших значений $\mu(\mu\tau \gtrsim \zeta_1)$, когда необходимо учитывать электронный вклад в действительную часть уравнения (17). В этом случае, как следует из дальнейшего, $|x| \ll 1$, поэтому $z_0 \gg z_1$ и нулевую гармонику также можно не учитывать. Нетрудно видеть, что наиболее неустойчивы колебания с $|x_1| \approx \zeta_1/\mu\tau \ll 1$; $z_1^2 \approx \zeta_1/\mu$ $(k_\parallel^2 r_i^2 \approx \zeta_1/\mu\tau)$. Граница области неустойчивости опять может быть получена из сопоставления электронного и ионного членов в правой части уравнения (17):

$$\tau \approx \frac{\zeta_1^2}{\mu^{5/2}}\left(\frac{M}{m}\right)^{1/2} e^{-\zeta_1/\mu}. \tag{24}$$

Участки границы, определяемые формулами (23) и (24), сопрягаются при $\mu\tau \approx \zeta_1$, когда $\mu^{3/2}\zeta_1^{-1}\,(m/M)^{1/2}\, e^{\zeta_1/\mu} \approx 1$; $\mu/\zeta_1 \approx 0{,}15$; $\zeta_1 \approx 0{,}2$.

При еще больших значениях $\mu(\mu \gg \zeta_1)$ диссипативная неустойчивость, так же как и неустойчивость на ионно-звуковой ветви колебаний, становится невозможной.

Если плотность плазмы мала, $r_{di}^2/r_i^2 \gg \zeta_1;\ \mu\tau$, то в уравнении (17) необходимо учитывать вклад тока смещения $(s \lesssim 1)$. В этом случае граница области неустойчивости определяется колебаниями с $z_1^2 \approx \zeta_1\tau \cdot r_i^2/r_{di}^2$; $|x_1| \gtrsim (r_i/r_{di})^2$; $k_\perp \approx r_i^{-1}$; $k_\parallel \approx r_{di}^{-1}$, для которых имеем

$$\tau_{\text{мин}} \approx \frac{r_{di}^2}{r_i^2}\,\zeta_1^{-1} \ln\left[\frac{r_i^2}{r_{di}^2}\left(\frac{M}{m}\right)^{1/2} \mu^{-3/2}\right]. \tag{25}$$

Граница неустойчивости для колебаний с меньшей длиной волны вдоль магнитного поля $r_i^{-1} \gtrsim k_\parallel \gtrsim r_{di}^{-1}$ несущественно

отличается от определяемой критерием (25), в котором под знаком логарифма отношение r_i^2/r_{di}^2 необходимо заменить на $k_\parallel^2 r_i^2/r_{di}$.

Как следует из критерия (25), с уменьшением плотности плазма стабилизируется (при том же значении μ для неустойчивости требуются большие значения $\tau = T_{\perp i}/T_{\parallel i}$). При $\mu \gtrsim \tau^{-1} r_{di}^2/r_i^2$ граница неустойчивости совпадает с границей области неустойчивости квазинейтральной плазмы [см. уравнение (24)].

Приведенные оценки претендуют лишь на определение характера зависимости и порядка величины $\tau_{\text{мин}}(\mu)$. Результаты оценок подтверждаются более точным численным расчетом, где область диссипативной неустойчивости занимает нижнюю левую часть (двойная штриховка, см. рис. 1).

Изучим теперь вопрос об инкременте диссипативной неустойчивости. Нами было показано, что для наиболее неустойчивых колебаний $z_1^2 \approx \tau \gg 1$, поэтому уже при небольшом увеличении τ по сравнению с граничным значением появляются колебания, для которых ионным вкладом в мнимую часть дисперсионного уравнения можно пренебречь. (Этот вклад пропорционален $e^{-z_{1i}^2}$ и на границе области неустойчивости компенсируется электронным вкладом.) Опуская также вклад от нулевой гармоники в действительную часть уравнения (8); перепишем его в следующем виде:

$$x_1^2\left[k^2 r_{di}^2 + \frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel e}}\left(1 + i\sqrt{\pi} z_e w(z_e)\right)\right] - x_1\zeta_1 - \\ - \frac{1}{2} k_\parallel^2 r_i^2 \zeta_1 = 0. \qquad (26)$$

При рассмотрении колебаний вблизи n-й циклотронной частоты индекс «1» необходимо заменить на n и ввести дополнительный множитель n в член, линейный по x_n. Уравнение (26) можно получить и из упрощенного выражения (17), записав электронный вклад в общем виде:

$$\tau\mu\left(1 + i\sqrt{\pi}\,\mu^{1/2}\left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} h \frac{\omega}{\omega_i}\right) \to \mu\tau(1 + i\sqrt{\pi} z_e w).$$

Из уравнения (26) нетрудно найти, что в случае квазинейтральной плазмы $k^2 r_{de\parallel}^2 \ll 1$ максимальный инкремент достигается для колебаний с $k_\perp r_i \approx 1{,}5$; $k_\parallel r_i \gtrsim (T_{\parallel e}/T_{\perp i}\zeta_1)^{1/2}$ и равен $\gamma \approx \approx \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2}\omega_i$. При этом $(\omega - \omega_i)^2 = (\omega_i x)^2 \approx k_\parallel^2 T_{\parallel e}/M$. Отметим, что в квазинейтральной плазме область неустойчивости ионно-звуковых колебаний шире области диссипативной неустойчивости (см. рис. 1) и инкремент ионно-звуковых колебаний, вообще говоря, больше $\gamma \approx \omega_i$.

С уменьшением плотности плазмы при $k^2 r_{d\parallel e}^2 \gtrsim 1$, $k^2 \approx r_i^{-2}$ инкремент падает: $\gamma \approx \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} (T_{\perp i}/T_{\parallel e})^{3/2} (r_i/r_{di})^3 \zeta_1$. При этом частота колебаний равна $(\omega - \omega_i)^2 \approx (k_\parallel / k\omega_{pi})^2$.

Как видно, в случае диссипативной неустойчивости наибольший интерес представляют коротковолновые колебания с $k_\parallel \approx$ $\approx k_\perp \approx r_i^{-1}$, поэтому эффекты, связанные с ограниченными размерами реальных установок, на диссипативную неустойчивость не оказывают существенного влияния.

Впервые диссипативная неустойчивость была рассмотрена в работе [20]. В работе [18] были проанализированы физические процессы, приводящие к неустойчивости. В этой работе указано, что нагрев электронов, который часто наблюдается в адиабатических ловушках, может возникать в результате поглощения энергии колебаний резонансными электронами при раскачке диссипативной неустойчивости. Отмечено также, что диссипативная неустойчивость может раскачиваться при наличии любого механизма поглощения энергии. Рассматривается случай диссипации при электрон-электронных соударениях. Наконец, в этой работе были определены границы неустойчивости при анизотропном максвелловском распределении ионов по скоростям (см. рис. 1).

В работе [6] диссипативная неустойчивость фигурирует под названием электрон-ионных колебаний (тип А и В). Причем в колебаниях типа А продольное движение ионов несущественно. Энергия таких колебаний может быть отрицательной (основная предпосылка для раскачки диссипативной неустойчивости) лишь при немонотонном распределении ионов по поперечным скоростям. В настоящем обзоре этот случай рассмотрен в п. в §4.

в) электронные ленгмюровские [электронно-звуковые колебания ($\mu \gtrsim 1$)]

Неустойчивость электронных ленгмюровских колебаний близка по физической природе к ионно-звуковой неустойчивости. Действительно, энергия обеих ветвей положительна, и поэтому раскачиваются они за счет циклотронного излучения резонансных ионов. Различие состоит лишь в том, что фазовая скорость электронных ленгмюровских колебаний много больше тепловой скорости электронов, $z_e \gg 1$, в то время как для ионно-звуковых колебаний имеет место обратное соотношение, $z_e \ll 1$. Полагая также $z_{0i} \gg 1$, $z_{1i} \ll 1$, запишем основное дисперсионное уравнение электронных ленгмюровских колебаний в виде [ср. с выражением (19)]

$$s^{-2} + \zeta_1 - \frac{M}{m} \cdot \frac{1}{2z_{0i}^2} = -i\sqrt{\pi} h \zeta_1 (x_1 + \tau^{-1}). \qquad (27)$$

Действительная часть этого уравнения может быть представлена как

$$1 + \zeta_1/k^2 r_{d\parallel i}^2 - k_\parallel^2/k^2 \cdot \omega_{pi}^2/\omega^2 = 0.$$

Уравнение (27) удобно изучать тем же методом, что и уравнение (20). Это дает следующие условия неустойчивости [ср. с выражением (20)]:

$$\text{мин}\left\{\tau^2;\ \tau\left(\frac{L_\parallel}{r_i}\right)^2\right\} \gtrsim h^2 = \frac{M}{2m}\,\frac{1}{k^2 r_{d\parallel i}^2 + \zeta_1} \gtrsim$$

$$\gtrsim \text{макс}\left\{1;\ \frac{M}{m}\,\frac{1}{\mu};\ \frac{\tau}{k^2 r_i^2}\right\} \qquad (28)$$

и выражение для инкремента колебаний [ср. с формулой (21)]:

$$\frac{\gamma}{\omega_i} \approx \left(1 + \frac{k^2 r_{d\parallel i}^2}{\zeta_1\left(k_\perp^2 r_i^2\right)}\right)^{-1}. \qquad (29)$$

Из последнего неравенства в формуле (28) следует, что электронные ленгмюровские колебания неустойчивы лишь при плотности выше критической, которая по порядку величины определяется условием $r_i^2/r_{di}^2 \approx m/M$ ($\omega_{pe} \approx \omega_i$). При малой плотности плазмы раскачиваются преимущественно колебания с большой длиной волны поперек магнитного поля, для которых выполняется условие $k^2 r_{d\parallel i}^2 \gtrsim \mu$. Ими определяется минимальное значение μ, при котором возможна неустойчивость $\mu_{\text{мин}} \approx r_{d\parallel i}^2/L^2$, здесь $L^{-1} \approx (L_\perp^{-2} + L_\parallel^{-2})^{1/2}$. Выражение (29) определяет инкремент раскачки колебаний $\gamma/\omega_i \approx \zeta_1/k^2 r_{d\parallel i}^2$. Он растет при увеличении плотности и максимален для колебаний с $L_\perp^{-1} \lesssim k_\perp \lesssim r_i^{-1}$ $\gamma_{\text{макс}}/\omega_i \approx$ $\approx r_i^2/r_{d\parallel i}^2$.

С возрастанием плотности плазмы ее свойства могут меняться по-разному, в зависимости от величины анизотропии. Предположим сначала, что анизотропия плазмы мала: $\tau_{\text{мин}}\{\tau; (L_\parallel/r_i)^2\} \times \zeta_1(r_i^2/L_\perp^2) < M/m$. При повышении плотности плазмы, когда $r_{d\parallel i}^2/L_\perp^2 \cdot m/M \cdot \tau \cdot \text{мин}\{\tau; (L_\parallel/r_i)^2\} \gtrsim 1$, остаются неустойчивыми лишь колебания с достаточно малой длиной волны, для которых выполняется условие $k^2 r_{d\parallel i}^2 \tau$ мин $\{\tau; (L_\parallel/r_i)^2\} \gtrsim M/m$. В этом случае $k^2 r_{d\parallel i}^2 \gtrsim \zeta_1(k_\perp^2 r_i^2)$, и поэтому, как следует из уравнений (28) и (29), значения $k_\parallel$ при произвольной плотности плазмы определяются условием $\omega \approx k_\parallel/k\,\omega_{pe} \approx \omega_i$, а $\gamma_{\text{макс}}$ падает с ростом плотности $\gamma/\omega_i \approx k^{-2} r_{d\parallel i}^{-2} k_\perp^{-1} r_i^{-1} \lesssim r_{d\parallel i}/r_i\,(m/M\tau)^{3/2}$ мин $\{\tau^{3/2}; L_\parallel/r_i)^3\}$. Своего наибольшего значения $\gamma \approx m/M \cdot \tau_{\text{мин}}$ $\{\tau;$

$(L_\parallel/r_i)^2\}$ инкремент достигает в интервале плотности, определяемом условием

$$1 \lesssim r_{d\parallel i}/r_i\,(m/M\tau)^{1/2} \text{ мин } \{\tau^{1/2}L_\parallel/r_i\} \lesssim L_\perp/r_i.$$

Пусть теперь анизотропия плазмы велика: τ мин $\{\tau;\ (L_\parallel/r_i)^2\} \times$ $\times\ \zeta_1 \gtrsim M/m$, где $1 \gtrsim \zeta_1(k_\perp^2 r_i^2)$. Тогда колебания, для которых выполняется приведенное выше условие, при плотности выше критической, определяемой равенством $k^2 r_{d\parallel i}^2 \approx \zeta_1(k_\perp^2 r_i^2)$, переходят в электронно-звуковые. При этом величина $k_\parallel$ перестает зависеть от плотности $\omega^2 \approx k_\parallel^2 T_{\parallel i}/m\zeta_1 \approx \omega_i^2$, а инкремент может быть весьма велик, приближаясь по порядку величины к ионной циклотронной частоте.

Уравнение (28) позволяет определить границы области неустойчивости в параметрах μ, τ. Легко видеть, что неустойчивость возможна, если $\tau^2 >$ макс $\{1;\ M/m\ 1/\mu\}$. Эта граница близка к найденной численно (см. правую часть рис. 1).

Если размеры системы вдоль магнитного поля не очень велики $\tau \gtrsim L_\parallel^2/r_i^2$, то тогда область неустойчивости сокращается $\tau_{\text{мин}} \approx r_i^2/L_\parallel^2$ макс $\left\{1;\ \frac{M}{m} \cdot \frac{1}{\mu}\right\}$.

Полученные нами условия неустойчивости имеют простой физический смысл. Так, например, условие $\tau \cdot$ мин $\{\tau;\ L_\parallel^2/r_i^2\} \gtrsim 1$ означает, что колебания с $h^2 \approx z_{0i}^2 \gtrsim 1$ допустимы. В обратном случае вклад в мнимую часть от нулевого резонанса (затухание Ландау на ионах) превысит вклад от первого резонанса (циклотронное излучение), что приведет к затуханию колебаний. В свою очередь условие $\tau \cdot$ мин $\{\tau;\ L_\parallel^2/r_i^2\} \gtrsim M/m \cdot 1/\mu$ допускает колебания с $z_e \gtrsim 1$. Оно является необходимым, так как если такие колебания невозможны, то сама ветвь электронных колебаний исчезает.

Раскачка электронных ленгмюровских колебаний в плазме с анизотропными ионами была рассмотрена в работе [4]. В этой работе, в частности, была определена граница области неустойчивости для случая анизотропного максвелловского распределения ионов по скоростям. На рис. 1 она соответствует правой части кривой ($\mu \gtrsim 10$). Позднее аналогичные результаты были получены в работе [21].

г) неустойчивость гидродинамического типа ($\mu \gtrsim 1$, $\tau \gg 1$)

Если анизотропия в распределении ионов достаточно велика, то при $\mu \gtrsim 1$, так же как и в случае горячих электронов ($\mu \lesssim 1$),

возможно появление колебаний с аномальной дисперсией. Однако в случае холодных электронов поглощение энергии резонансными частицами экспоненциально мало, и поэтому инкремент неустойчивости диссипативного типа был бы также экспоненциально мал. При этом более существенна раскачка колебаний с нулевой энергией $\left(\frac{\partial \operatorname{Re}\varepsilon}{\partial\omega}=0,\ \text{см. Введение}\right)$, в процессе которой энергия от термодинамически неравновесных ионов переходит в колебательную энергию электронов. Фазовая скорость таких колебаний велика $v_{\Phi\parallel} \gg v_{\parallel e}$, поэтому резонансные частицы в этом случае отсутствуют, и все электроны в поле волны движутся гидродинамически.

Для рассмотрения такой неустойчивости дисперсионное уравнение запишем в следующем виде:

$$x_n^2\left[\tau s^{-2}-(k_\parallel r_i)^2\frac{M}{m}\cdot\frac{\omega_i^2}{\omega_{pi}^2}\right]-nx_n\zeta_n(p^2)- \\ -k_\parallel^2 r_i^2\zeta_n(p^2)=0. \qquad (30)$$

Пусть выполняется условие $k_\parallel^2 r_i^2 \gg x_n$, тогда в уравнении (30) можно опустить член, линейный по x_n, и представить в следующем простом виде:

$$1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\cdot\frac{k_\parallel^2}{k^2}-\frac{\omega_{pi}^2}{(\omega-n\omega_i)^2}\cdot\frac{k_\parallel^2}{k^2}\zeta_n=0.$$

Нетрудно заметить, что неустойчивые колебания существуют в том случае, когда вклад от тока смещения мал: $1 \lesssim \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\cdot\frac{k_\parallel^2}{k^2}$. Это условие, а также условия $k_\parallel^2 r_i^2 \gtrsim x_n$; $z_e \gtrsim 1$; $z_{ni} \gtrsim 1$, при которых было получено уравнение (30), выполняются, если плотность плазмы, а также анизотропия в распределении ионов достаточно велики: $\tau \gtrsim (M/m)^{1/2}\zeta_n^{-1/2}$; $r_i/r_{di} \gtrsim (m/M)^{1/2}$. Первое из этих условий определяет границу области неустойчивости в достаточно плотной плазме. На рис. 1 область неустойчивости гидродинамического типа занимает правую нижнюю часть (двойная штриховка). Инкремент неустойчивых колебаний по порядку величины равен $\gamma \approx (m/M)^{1/2}\omega_i$, а их длины волн определяются из условий $k_\perp \approx r_i^{-1}$

$$\left(\frac{m}{M}\tau\zeta_n\right)^{1/2} \gtrsim k_\parallel r_i \gtrsim \left(\frac{m}{M}\zeta_n\right)^{1/4};\ kr_{d\perp i}\left(\frac{m}{M}\right)^{1/2}.$$

Поскольку неустойчивыми являются коротковолновые колебания с $k_\perp \approx k_\parallel \gtrsim r_i^{-1}$, то учет ограниченности реальных систем оказывается несущественным.

Резонансные колебания с $\omega \approx \omega_{pe} \frac{k_\parallel}{k} \approx n\omega_i$, для которых первый член в выражении (30) оказывается близким к нулю, обладают несколько большим инкрементом [4], [22]. Действительно, пренебрегая в уравнении (30) членом, линейным по x_n, для таких колебаний находим $\gamma \approx \left(\frac{m}{M}\zeta_n\right)^{1/3}\omega_i$. Нетрудно найти, что раскачка колебаний с таким инкрементом возможна при достаточно большой анизотропии в распределении ионов $\tau \gtrsim \left(\frac{M}{m}\cdot\frac{1}{\zeta_n}\right)^{1/3}$; $\tau\mu \gtrsim \left(\frac{M}{m}\zeta_n\right)^{1/3}$, если плотность плазмы не слишком велика $r_{d\perp i}^2/r_i^2 \gtrsim \left(\frac{M}{m}\right)^{2/3}\zeta_n^{1/3}$ или в другом виде $\omega_{pe} \lesssim \omega_i\left(\frac{M}{m}\right)^{1/6}$, причем длины волн неустойчивых колебаний определяются условиями $k_\perp r_i \approx 1$.

$$\text{мин}\left\{\left(\frac{m}{M}\tau\mu\right)^{1/2};\ \tau^{1/2}\left(\frac{m}{M}\zeta_n\right)^{1/3}\right\} \gtrsim k_\parallel r_i \approx \frac{r_{di}}{r_i}\left(\frac{m}{M}\right)^{1/2}.$$

Неустойчивость гидродинамического типа ранее была рассмотрена в работах [3], [4], [20], [22], [23]. Причем оказалось, что при малой плотности плазмы $\omega_{pi}^2 \lesssim \left(\frac{m}{M}\right)^{2/3}\omega_i^2$ (см. п. 4 § 4) характеристики неустойчивых колебаний слабо зависят от конкретного вида функции распределения ионов по скоростям. Более того, подобные результаты были получены для модели, в которой однородное распределение ионов в пространстве заменено кольцевым цилиндром, вращающимся с постоянной угловой скоростью ω_i [23].

Неустойчивость гидродинамического типа, в раскачке которой не принимают участия резонансные частицы, возможна также в плазме с горячими электронами, когда $\mu \ll 1$. (На эту возможность указал А. Б. Михайловский.)

Для анализа этой неустойчивости обратимся к уравнению (17), в котором, предполагая $z_e \ll 1$; z_{0i}; $z_{1i} \gg 1$, пренебрежем мнимыми частями функций $W(z_{nj})$.

$$s^{-2} + \mu + \tau^{-1}\left(1 - \zeta_0 - \zeta_1\frac{z_0}{z_1}\right) - \zeta_0/2z_0^2 - \zeta_1/2z_1^2 = 0. \quad (31)$$

Здесь учтено дополнительное слагаемое τ^{-1}, получающееся при суммировании членов $\frac{n}{\tau}W(z_{ni})$ в уравнении (9).

В настоящем случае наибольший интерес представляют колебания с $kr_i \gg 1$. Такие колебания неустойчивы, если плотность плазмы, ее анизотропия и температура электронов достаточно велики ($r_{di}^2 \ll r_i\tau \gg 1$, $\mu \ll 1$). При выполнении этих условий для колебаний с $\tau \gg (k_\parallel r_i)^2 \gg (k_\perp r_i)(1 + \mu\tau + \tau s^{-2})$ в уравне-

нии (31) можно оставить лишь два последних слагаемых. Нетрудно видеть, что инкремент таких колебаний по порядку величины равен циклотронной частоте.

На рис. 1 эта неустойчивость должна занимать левый нижний угол, располагаясь внутри области ионно-звуковой неустойчивости. Более точное определение границы области неустойчивости гидродинамического типа невозможно, поскольку на границе нарушаются условия $z_{ni} \gg 1$, в результате становится необходимым учет мнимых частей $W(z_{ni})$ в дисперсионном уравнении, и неустойчивость переходит в ионно-звуковую. По этой же причине граница области неустойчивости гидродинамического типа в случае холодных электронов ($\mu \gg 1$, правая нижняя часть рис. 1) определена нами с точностью до порядка величины.

§ 4. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ИОНОВ ПО СКОРОСТЯМ В ВИДЕ δ-ФУНКЦИИ

Если распределение частиц по поперечным скоростям отличается от максвелловского, то в поведении плазмы могут появиться существенные отличия. Особенно интересен в этом отношении случай, когда в распределении отсутствуют частицы с малой поперечной энергией. Такие распределения, как известно, свойственны для адиабатических ловушек с пробками. Характерные особенности выявляются наиболее четко, если распределение по энергиям взять в виде δ-функции. Устойчивость такого распределения рассматривается в настоящем разделе.

а) циклотронные колебания плазмы с холодными электронами (неустойчивость гидродинамического типа)

В рассматриваемом случае в электронной части дисперсионного уравнения можно положить $z_e = \omega/k_\parallel v_{\parallel e} \gg 1$ [см. уравнение (1.1)]. Используя также формулу (10), запишем основное дисперсионное уравнение в виде

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_e^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\cdot\frac{k_\parallel^2}{k^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_i^2}\left\{\frac{\omega_i^2 J_n^2(p)}{(\omega - n\omega_i)^2}\cdot\frac{k_\parallel^2}{k^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega k_\perp^2}{(\omega - n\omega_i)k^2 p}\cdot\frac{d}{dp}J_n^2(p)\right\} = 0. \qquad (32)$$

Если в уравнении (32) заменить $J_n^2(p)$, $p\frac{d}{dp}J_n^2(p)$ на $I_n(p^2)e^{-p^2}$, оно становится аналогичным уже рассмотренным нами уравнениям (30) и (31) (см. п. 2 § 3). В этом случае наибольшим инкрементом $\gamma \approx \left(\frac{m}{M}\right)^{1/3}\omega_i$ обладают электронные ленгмю-

ровские колебания, угол распространения которых по отношению к магнитному полю определяется равенством

$$\omega_{pe}\frac{k_\parallel}{k}\approx n\omega_i\approx\omega. \tag{33}$$

В анизотропной максвелловской плазме такие колебания неустойчивы лишь в определенном интервале изменения плотности $\omega_i \lesssim \omega_{pe} \lesssim \omega_i\left(\frac{M}{m}\right)^{1/6}$. Наличие в данном случае верхней границы по плотности связано с тем обстоятельством, что при возрастании плотности, как следует из равенства (33), длина волны рассматриваемых колебаний вдоль магнитного поля также возрастает. При этом предпоследнее слагаемое в формуле (32) уменьшается. Однако эффекты анизотропии в распределении ионов учитываются именно посредством этого члена. Действительно, хотя в уравнения (31) и (32) величина $\tau=\frac{\langle\varepsilon_{\perp i}\rangle}{\langle\varepsilon_{\parallel i}\rangle}$ явно не входит, необходимо помнить, что сами уравнения были получены в предположении $r_{ni}=\frac{x_n\sqrt{\tau}}{k_\parallel r_i}\gg 1$. Следовательно, при заданных z_{ni} и $x_n\approx\left(\frac{m}{M}\right)^{1/3}$ уменьшение $k_\parallel$ эквивалентно уменьшению τ.

Поэтому, если $k_\parallel$, а с ним и отношение предпоследнего слагаемого к последнему в формуле (32) стремятся к нулю, это означает, что эффектами анизотропии в распределении ионов можно пренебречь. Естественно, что при этом плазма с анизотропным максвелловским распределением ионов по скоростям стабилизируется.

Положение может измениться, если распределение ионов по поперечным энергиям имеет максимум при $\varepsilon_{\perp i}\neq 0$. Опустим в этом случае предпоследнее слагаемое в формуле (32) и представим его в следующем виде [13]:

$$\left(\omega^2-\omega_{pe}^2\frac{k_\parallel^2}{k^2}\right)(\omega-n\omega_i)=\omega^3\frac{\omega_{pi}^2}{\omega_i^2}\cdot\frac{(J_n^2)'}{p}. \tag{34}$$

Будем считать $\omega\approx n\omega_i+i\gamma$, где $\gamma\ll\omega_i$. Тогда вблизи точки пересечения циклотронной и ленгмюровской ветвей колебаний, определяемой условием (33), имеем

$$\gamma\approx n\omega_i\frac{\omega_{pi}}{\omega_i}\left[-\frac{(J_n^2)'}{2p}\right]^{1/2}. \tag{35}$$

Таким образом, при распределении в виде δ-функции колебания с малыми $k_\parallel$ оказываются неустойчивыми, если величина $(J_n^2)'$ отрицательна. Заметим, что если в распределении по $\varepsilon_\perp$

отсутствует максимум при $\varepsilon_{\perp 0} \neq 0$, то $p\left(J_n^2\right)'$ нужно заменить на существенно положительную величину. В случае максвелловского распределения она равна $I_n(p^2)\,e^{-p^2}$.

Предельный угол по отношению к направлению магнитного поля, под которым могут распространяться рассматриваемые колебания, находим из отношения предпоследнего слагаемого к последнему в уравнении (32):

$$\left(\frac{k_\parallel}{k}\right)^2 \lesssim \left|\frac{\omega - n\omega_i}{\omega_i}\right| \left(\frac{k_\perp}{k}\right)^2 \frac{1}{p} \cdot \frac{\left(J_n^2\right)'}{J_n^2} \lesssim n^2 \frac{\omega_{pi}}{\omega_i}. \qquad (36)$$

Используя выражения (33) и (35), получаем, что такие колебания возможны лишь при не слишком малой плотности плазмы, когда выполняется условие

$$\frac{\omega_{pi}}{\omega_i} \gtrsim \left(\frac{m}{M}\right)^{1/3} n$$

или в другом виде

$$\frac{\omega_{pe}}{\omega_i} \gtrsim \left(\frac{M}{m}\right)^{1/6} n. \qquad (37)$$

При $\frac{\omega_{pe}}{\omega_i} \approx \left(\frac{M}{m}\right)^{1/6} n - \gamma \approx \left(\frac{m}{M}\right)^{1/3} \omega_i n$ и исследуемая неустойчивость сопрягается с неустойчивостью гидродинамического типа (см. п. г § 3). Заметим, что в соответствии с нашей классификацией рассматриваемая неустойчивость должна быть отнесена к неустойчивостям с нулевой энергией.

Как следует из формулы (35), инкремент γ растет с увеличением плотности плазмы, так что при $\omega_{pi} \gtrsim \omega_i - \gamma \gtrsim \omega_i$. В этом случае необходимо учитывать все члены суммы в выражении [8], [7], [13], [20]. Такие колебания рассмотрены нами в п. б § 4.

Отклонение функции распределения ионов по поперечным энергиям от максвелловской может привести к неустойчивости на нулевой гармонике ($n = 0$) [13]. В этом случае, используя равенство $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2 = 1$, для распределения в виде δ-функции вместо уравнения (32) получаем:

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cdot \frac{k_\parallel^2}{k^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_i^2} \cdot \frac{\left(J_0^2\right)'}{p} = 0, \qquad (38)$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{M}{m} \cdot \frac{k_\parallel^2}{k^2}\, \omega_i^2 \left[\frac{\omega_i^2}{\omega_{pi}^2} - \frac{\left(J_0^2\right)'}{p}\right]^{-1}. \qquad (39)$$

Из равенства (39) следует, что неустойчивость начинается при сравнительно больших плотностях плазмы:

$$\frac{\omega_i^2}{\omega_{pi}^2} < \frac{1}{p_1} \cdot \frac{d}{dp} J_0^2(p) \,|\, p = p_1 \approx 0{,}06. \tag{40}$$

Здесь учтено, что функция $\dfrac{(J_0^2)'}{p}$ имеет максимум, равный 0,06 при $p \approx p_1 = 3$.

Приведенное выше рассмотрение справедливо, если температура электронов достаточно мала, когда выполняется условие $z_e = \dfrac{\omega}{k_\parallel v_{\parallel e}} \gg 1$. Подставляя в это неравенство $k_\parallel$ из уравнения (33) и учитывая, что $k_\perp \approx r_i^{-1}$, получаем следующее условие на величину температуры электронов:

$$\frac{T_{\parallel e}}{\varepsilon_{\perp i}} \ll \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_i^2}. \tag{41}$$

Как указывалось выше, при большой плотности плазмы частота наиболее неустойчивых колебаний смещается в сторону больших значений $\omega \approx \omega_{pe} \dfrac{k_\parallel}{k} \approx \omega_{pi} \gg \omega_i$. С другой стороны, как нетрудно видеть из равенства (31), возможна неустойчивость вблизи циклотронной частоты и ее гармоник, $|\omega - n\omega_i| \ll \omega_i$. Неустойчивость коротковолновых колебаний с $k_\parallel \approx k_\perp \approx r_i^{-1}$ вполне аналогична соответствующей неустойчивости в анизотропной максвелловской плазме. Ее инкремент равен $\gamma \approx \left(\dfrac{m}{M}\right)^{1/2} \times$ $\times J_n(p) \cdot n\omega_i$. Более длинные волны неустойчивы, если $\dfrac{d}{dp} J_n^2(p) < 0$ и $\dfrac{k_\parallel}{k} < n \sqrt{\dfrac{4m}{M} \left| \dfrac{(J_n^2)'}{p} \right|}$. Первое условие означает, что неустойчивы волны с $J_{n,\alpha} < k_\perp r_i < \varkappa_{n,\alpha+1}$, где $j_{n,\alpha}$ — α нуль производной $\dfrac{d}{dp} J_n, \varkappa_{n,\alpha+1}$ — $(\alpha+1)$ нуль функции Бесселя $J_n(p)$. Из второго условия можно получить значение длины ловушки $L_\parallel$, в которой развивается неустойчивость. Например, для $n = 1$ и $p = k_\perp r_i = 2{,}6$ $\dfrac{(J_n^2)'}{p} \approx -0{,}1$ получаем

$$L_\parallel > r_i \left(2{,}5 \frac{M}{m}\right)^{1/2}. \tag{42}$$

Циклотронные колебания немаксвелловской плазмы с холодными электронами рассматривались во многих работах: [6], [20],

[22], [24], [25]. Так, влияние вида функции распределения ионов на устойчивость плазмы исследовано в работах [6], [24], [25]. Показано, что «сглаживание» функции распределения по сравнению с δ-функцией заметно улучшает устойчивость плазмы.

б) колебания с частотой $\omega \gg \omega_i$

Рассмотрим возбуждение электронных ленгмюровских колебаний при большой плотности плазмы, когда $\gamma \gtrsim \omega_i$. Для этого в выражении (8) необходимо учесть все члены суммы по n, каждый из которых соответствует отдельной циклотронной гармонике. Впервые такое исследование было проведено В. Б. Красовицким и К. Н. Степановым [20] и А. Б. Михайловским [13]. Но большой интерес к колебаниям с $\omega \gg \omega_i$ связан с появлением работы Розенблюта и Поста [7], в которой показано, что развитие неустойчивости такого вида должно существенно увеличить потери частиц из ловушек с пробками. К такому же выводу приводит нелинейное рассмотрение, проведенное А. А. Галеевым [12].

Дисперсионное уравнение в работах [7] и [20] выводится суммированием циклотронных гармоник с последующим переходом к высоким частотам $\omega \gg \omega_i$. Нам представляется более простым получить дисперсионное уравнение, сразу считая $\omega \gg \omega_i$. Такие вычисления приведены в Приложении.

Ввиду важности рассматриваемого типа неустойчивых колебаний для анализа возможности удержания плазмы в адиабатических ловушках, следуя в основном работам [7, 26], разберем случай произвольного распределения ионов по поперечным энергиям.

Дисперсионное уравнение для колебаний с частотой, лежащей в интервале $\omega_i \ll \omega \ll \omega_e$, приведено в Приложении (П. 3). В случае холодных электронов, когда $z_e = \dfrac{\omega}{k_\parallel v_{\parallel e}} \gg 1$, оно сводится к уравнению (П. 4). Из этого уравнения нетрудно найти, что действительная часть частоты определяется электронами, вклад которых, вообще говоря, превосходит вклад ионов:

$$\omega \approx \frac{k_\parallel}{k}\omega_{pe}\left[1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_e^2}\right]^{-1/2}. \qquad (43)$$

Однако в отличие от электронного ионный вклад может быть комплексным. Его мнимая часть учитывает взаимодействие с волной резонансных ионов, движение которых для колебаний с $\omega \gg \omega_i$ можно считать свободным (незамагниченным). Следовательно (см. Введение, п. г), если функция распределения по поперечным скоростям немонотонна, то рассматриваемые колебания могут раскачиваться за счет черенковского излучения резонансных ионов. Если $f_0(\varepsilon_\perp)$ в точке максимума значительно

превышает $f_0(0)$, то максимальный инкремент по порядку величины равен $\gamma \approx \omega_{pi}(1 + \omega_{pe}^2/\omega_e^2)^{-1/2}$. Он достигается для колебаний с $k_\parallel/k \approx (m/M)^{1/2}$.

При рассмотрении поведения плазмы в системе конечных размеров необходимо иметь в виду, что на краях плазмы $\omega_{pe} \to 0$. Из уравнения (П.4) следует, что при $\omega_{pe} \to 0$ оно может быть удовлетворено, если $k_\parallel \to \infty$, поэтому для фиксированной частоты условие $\omega \gg k_\parallel v_{\parallel e}$ перестает выполняться. В этом случае при рассмотрении колебаний на краях плазмы нужно учитывать их затухание вследствие поглощения энергии волны резонансными электронами (затухание Ландау на электронах). Этот эффект преобладает над черенковским излучением резонансных ионов, что приводит к затуханию собственных колебаний на частотах, выше циклотронных [7]. Поэтому следует перейти к рассмотрению волновых пакетов, локализованных в области, характерный размер которой много меньше длины установки. Такой пакет будет изменять свою амплитуду в соответствии со знаком $\mathrm{Im}\, k_\parallel = \dfrac{\mathrm{Im}\,\omega}{v_{\text{гр.}\parallel}}$, где $v_{\text{гр.}\parallel} = \dfrac{d\omega}{dk_\parallel}$. Возрастание пакета при его движении между границами плазмы определяется величиной $\mathrm{Im}\, k_\parallel L_\parallel$. Для определения $k_\parallel$ нужно разрешить уравнение (П.4) относительно $k_\parallel$ при заданной частоте. Следуя работам [7, 26], будем считать, что при возрастании амплитуды волны в $e^{10} \div e^{20}$ раз неустойчивость может сильно влиять на распределение ионов по скоростям в ловушке, увеличивая число ионов с малой поперечной энергией и тем самым вызывая дополнительный уход через пробки. Оценим длину ловушек, в которых это может происходить. Из уравнения (П.4)

$$k_\parallel^2 = k^2\left[\omega^2\left(\frac{1}{\omega_{pe}^2} + \frac{1}{\omega_e^2}\right) = \frac{m}{M} y^2 F(y)\right],$$

$$\text{где } y = \frac{\omega}{k\bar{v}_i}, \tag{44}$$

Для действительной частоты ω и $k_\parallel \ll k$ решение уравнения (44) можно представить в виде

$$\mathrm{Im}\, k_\parallel = \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \frac{\omega_{pi}}{\bar{v}_i}\left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_e^2}\right)^{-1/2} G(K, y), \tag{45}$$

где

$$G(K, y) = \frac{yK\,[K^2 - \mathrm{Re}\, F(y)]^{1/2}}{2^{1/2}}\left[\left\{1 + \left(\frac{\mathrm{Im}\, F(y)}{K^2 - \mathrm{Re}\, F(y)}\right)^2\right\}^{1/2} - 1\right]^{1/2};$$

$$K = \frac{k^2 \bar{v}_i^2}{\omega_{pi}^2}\left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right).$$

Максимум величины $G(K, y)$ определяется максимумом отрицательной части функции $\mathrm{Im}\,F(y)$ при больших значениях $K^2 - \mathrm{Re}\,F(y)$ (короткие волны) [26]:

$$G(K, y)\,|_{\text{макс}} \approx \frac{1}{2}\,[-y\,\mathrm{Im}\,F(y)]_{\text{макс}}. \tag{46}$$

Если L — длина плазмы вдоль магнитного поля, то скорость роста амплитуды волны, выраженная через $N = \mathrm{Im}k_{\parallel} L(E \approx E_0 e^N)$, равна

$$N \approx \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \frac{\omega_{pi}}{v_i} \cdot \frac{L_{\parallel}}{\left(1 + \dfrac{\omega_{pe}^2}{\omega_e^2}\right)^{1/2}}\,|G(K, y)|_{\text{макс}}. \tag{47}$$

Полагая $N \gtrsim 10$, получим критическое условие на длину ловушки, при выполнении которого плазма будет быстро уходить из системы:

$$L_{\parallel} \geqslant 10\left(\frac{M}{m_i}\right)^{1/2} r_{di} \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_e^2}\right)^{1/2} |G|_{\text{макс}}^{-1}. \tag{48}$$

Значение величины G зависит от вида функции распределения ионов по поперечным энергиям. Для δ-функции критическая длина ловушки может быть очень малой. Распределение ионов, которое устанавливается в адиабатической ловушке в результате соударений, более близко к равновесному. Например, при пробочном отношении $1 \div 2$ имеем

$$\begin{aligned} f_0 &= (v_{\perp}^2 - v_{\parallel}^2)^{1/2} \cdot e^{-\frac{Mv_{\perp}^2}{2T_{\perp}}} && (v_{\perp} > v_{\parallel}), \\ f_0 &= 0 && (v_{\perp} < v_{\parallel}). \end{aligned} \tag{49}$$

В этом случае величина $|G| \approx 0{,}1$ [26]. Для некоторого «промежуточного» распределения $|G| \approx 1$. Более детально, путем численного расчета, влияние вида функции распределения ионов на величину критической длины $L_{\parallel}$ недавно исследовано в работе [26].

При распределении ионов в виде δ-функции колебания с $\omega \approx \approx k_{\perp} v_{\perp 0}$ требуют специального рассмотрения [20]. В этом случае дисперсионное уравнение при $\omega_{pe} \ll \omega_e$ выразим

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cdot \frac{k_{\parallel}^2}{k^2} - \frac{\omega_{pi}^2\, i\,\omega}{(k_{\perp}^2 v_{\perp 0}^2 - \omega^2)^{3/2}} = 0. \tag{50}$$

Решая уравнение (50), нетрудно получить, что в плазме могут раскачиваться колебания с частотой $\omega \approx \dfrac{k_{\parallel}}{k}\,\omega_{pe} \approx k_{\perp} v_{\perp 0}$ и инкрементом $\gamma \approx \omega_{pe}\left(\dfrac{m}{M}\right)^{2/5}\left(\dfrac{k_{\parallel}}{k}\right)^{1/5}$.

Если температура электронов плазмы велика, то необходимо учитывать затухание Ландау на электронах, что должно привести к стабилизации колебаний. Нетрудно определить температуру, при которой этот эффект становится существенным. Действительно, чтобы вклад резонансных электронов был существен, необходимо выполнение условия $\omega \lesssim k_{\parallel} v_{\parallel e}$. Имея в виду, что для колебаний с максимальным инкрементом $\omega \approx k_{\perp} v_{\perp 0}$ и $\frac{k_{\parallel}}{k} \approx \approx \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2}$, находим условие $T_{\parallel e} \gtrsim \varepsilon_{\perp i}$, при котором инкремент неустойчивости падает. Таким образом, для стабилизации неустойчивости нужно иметь достаточно горячие электроны [20].

в) циклотронные колебания плазмы с горячими электронами (диссипативная неустойчивость)

Как и в плазме с анизотропным максвелловским распределением ионов по скоростям, в данном случае возможна неустойчивость на колебаниях с отрицательной энергией, которая развивается при условии поглощения энергии волны резонансными электронами. При рассмотрении этих колебаний естественно считать $z_e = \frac{\omega}{k_{\parallel} v_{\parallel e}} \ll 1$. Тогда основное дисперсионное уравнение принимает вид

$$\frac{\omega_i^2}{\omega_{pi}^2} + \frac{m}{M} + \frac{\omega_i^2}{k^2} \cdot \frac{M}{T_{\parallel e}} \left(1 + i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{k_{\parallel} v_{\parallel e}}\right) - \\ - \frac{k_{\parallel}^2}{k^2} \cdot \frac{J_n^2 \omega_i^2}{(\omega - n\omega_i)^2} - \frac{\omega (J_n^2)'}{p(\omega - n\omega_i)} \cdot \frac{k_{\perp}^2}{k^2} = 0. \qquad (51)$$

Если последний член в правой части уравнения (51) несуществен, то уравнение описывает неустойчивые колебания с максимальным инкрементом $\gamma_{\text{макс}} \approx n\omega_i \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} |J_n|$. Такие колебания были рассмотрены в п. б § 3. Чтобы выяснить специфические особенности, появляющиеся при отклонении закона распределения ионов от максвелловского, рассмотрим вытянутые вдоль магнитного поля колебания, для которых можно пренебречь предпоследним членом в уравнении (51) (см. п. а § 4):

$$\frac{k_{\parallel}^2}{k^2} \left| \frac{J_n^2}{(J_n^2)'} \right| p \ll \left| \frac{\omega - n\omega_i}{\omega_i} \right|,$$

$$\text{где } k_{\parallel} \ll k_{\perp}. \qquad (52)$$

При этом из уравнения (51) получаем

$$\frac{\omega - n\omega_i}{\omega_i} = \frac{(J_n^2)'}{p} \left[\frac{\omega_i^2}{\omega_{pi}^2} + \frac{m}{M} + \frac{\omega_i^2 M}{k^2 T_{\parallel e}} \left(1 + i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{k_{\parallel} v_{\parallel e}}\right) \right]^{-1}. \qquad (53)$$

Колебания неустойчивы, если $(J_n^2)' < 0$, что может иметь место при $\varkappa_{n,m} > p > j_{n,m+1}$, где $\varkappa_{n,m} - m$ нуль производной $J_n'(p)$, $j_{n,m+1} - (m+1)$ нуль функции $J_n(p)$. Область наименьших значений p имеет для $n = 1$, когда $3{,}84 > k_\perp r_i = p > 1{,}8$ и т. д. Инкремент таких колебаний равен

$$\gamma = -\frac{\operatorname{Im}\varepsilon}{\frac{\partial \operatorname{Re}\varepsilon}{\partial\omega}} \approx \sqrt{\pi}\,\frac{n^2\omega_i^2}{k_\parallel v_{\parallel e}}\,k^2 r_i^2\,\frac{T_{\parallel e}}{\varepsilon_{\perp 0}}\,\frac{|(J_n^2)'|}{p} \times$$

$$\times \frac{\omega_i}{\left[1 + k^2 r_i^2\,\frac{T_{\parallel e}}{\varepsilon_{\perp 0}}\left(\frac{\omega_i^2}{\omega_{pi}^2} + \frac{m}{M}\right)\right]^2}. \qquad (54)$$

Откуда следует, что с максимальным инкрементом $\gamma_{\text{макс}}$ раскачиваются колебания, для которых $m = 1$; $k_\parallel r_i \approx \omega_i \frac{r_i}{v_{\parallel e}} = \left(\frac{m}{M} \times \frac{\varepsilon_{\perp 0}}{T_{\parallel e}}\right)^{1/2}$; $k_\perp r_i = 2{,}5$. Здесь электроны предполагаются не слишком холодными $T_{\parallel e}/\varepsilon_{\perp 0} \gtrsim m/M$.

При относительно небольшой температуре электронов $T_{\parallel e} < \varepsilon_{\perp 0}$ величина инкремента (54) никогда не превышает циклотронную частоту, $\gamma \leqslant \omega_i$. Если температура электронов велика, $T_{\parallel e} > \varepsilon_{\perp 0}$, то при достаточно малой плотности плазмы $\omega_{pi} \lesssim \omega_i$, $\gamma \lesssim \omega_i$. Можно было бы предположить, что с увеличением плотности плазмы при $\omega_{pi} \gg \omega_i$ величина инкремента превысит циклотронную частоту. В этом случае проведенное рассмотрение будет несправедливо, так как нужно учитывать все члены суммы (8) и пользоваться уравнением (П.3). При наличии горячих электронов, когда $z_e = \frac{\omega}{k_\parallel v_{\parallel e}} \lesssim 1$, уравнение (П.3) можно переписать в более простом виде, полагая мнимую часть малой и $k_\parallel \ll k_\perp$:

$$(k r_{d\parallel e})^{-2} - \frac{\omega_{pi}^2\, i\,\omega}{\left(k_\perp^2 v_{\perp 0}^2 - \omega^2\right)^{3/2}} = 0. \qquad (55)$$

Исследуя уравнение (55) с помощью критерия Найквиста, можно показать, что неустойчивые колебания отсутствуют. Учет резонансных электронов в рассматриваемом случае также не может привести к неустойчивости.

В случае горячих электронов при распределении ионов в виде δ-функции, так же как и при анизотропном максвелловском распределении, возможна неустойчивость гидродинамического типа, рассмотренная нами в п. г § 3. Однако если при анизотропном максвелловском распределении колебания с малыми $k_\parallel$ были стабильны, то теперь и эти колебания становятся неустойчивыми (см. следующий раздел).

г) неустойчивость поперечных колебаний ($k_\parallel \ll k_\perp$)

В анизотропной максвелловской плазме колебания с $k_\parallel = 0$ (типа желобковых) устойчивы, однако, как показано в [5], такие колебания могут раскачиваться, если распределение частиц по поперечной энергии немонотонно. При $f_{0i} = \frac{1}{2\pi v_\perp}\,\delta(v_\perp - v_{\perp 0})\times$ $\times f_{0i}(v_\parallel)$ [$f_{0i}(v_\parallel)$ — произвольно] для колебаний с $k_\parallel = 0$ имеем

$$1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_i^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\omega}{\omega - n\omega_i}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{d}{dp}J_n^2(p) = 0. \qquad (56)$$

Здесь использовано равенство $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(p) = 1$. Если $f_{0\perp} = \frac{M}{2\pi T_\perp}\times$ $\times\, e^{-\frac{Mv_\perp^2}{2T_\perp}}$, то в уравнении (56) $\frac{1}{p}\cdot\frac{d}{dp}J_n^2(p)$ заменяется на $\frac{1}{p^2}I_n(p^2)\,e^{-p^2}$. При малой плотности плазмы ($\omega_{pi} \ll \omega_i$) колебания с $k_\parallel = 0$ устойчивы и их частота близка к $n\omega_i$:

$$\omega - n\omega_i \approx n\frac{\omega_{pi}^2}{\omega_i^2}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{d}{dp}J_n^2(p). \qquad (57)$$

Если значение параметра p таково, что J_n^2 и J_{n+1}^2 имеют различные знаки, то с повышением плотности соседние корни, соответствующие n и $n+1$ гармоникам уравнения (56), сливаются (в этот момент $\partial \mathrm{Re}\,\varepsilon/\partial\omega = 0$) и затем становятся комплексными. Пусть, например, ω лежит в интервале $-\omega_i < \omega < \omega_i$, тогда, учитывая слагаемые с $n = -1, 0, 1$, получаем

$$\omega^2 = \omega_i^2\,\frac{\frac{\omega_i^2}{\omega_{pi}^2} + \frac{2}{p}J_0J_1}{\frac{\omega_i^2}{\omega_{pi}^2} + \frac{2}{p}J_2J_1}, \qquad (58)$$

имея в виду, что $J_n' = \frac{1}{2}(J_{n-1} - J_{n+1})$. В плотной плазме, когда в уравнении (58) можно пренебречь вкладом от тока смещения, колебания с $2{,}4 < p < 5{,}14$; $5{,}5 < p < 8{,}4$ и $p > 8{,}65$ будут неустойчивыми. Действительно, используя асимптотические выражения для J_n, $J_n \approx \sqrt{\frac{2}{\pi p}}\cos\left(p - \frac{\pi}{4} - n\frac{\pi}{2}\right)$, $p \to \infty$ и пренебре-

гая слагаемыми ω_i^2/ω_{pi}^2, из равенства (58) находим

$$\omega^2 \approx \omega_i^2 \frac{\cos\left(p-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(p-\frac{5}{4}\pi\right)} = -\omega_i^2. \qquad (59)$$

При $\frac{\omega_{pi}^2}{\omega_i^2} \gg p^2 \gg n$ аналогичные выражения нетрудно получить для колебаний с произвольным n: $(\omega - n\omega_i)^2 \approx -\omega_i^2$.

Анализ уравнения (58) показывает, что неустойчивость возникает при $\omega_{pi} \approx 4\omega_i$, когда $\frac{\omega_i^2}{\omega_{pi}^2} \approx \left(-\frac{2}{p} J_0 J_1\right)_{\text{макс}}$, при этом $p = k_\perp r_i \approx 3$. В то же время колебания с $p < 2{,}4$, для которых $J_0 J_1 > 0$, устойчивы при произвольной плотности плазмы.

В работе [5] показано, что колебания с $n < \frac{\omega}{\omega_i} < n+1$ при $n \neq 0$ начинают раскачиваться при несколько меньших значениях плотности плазмы, $\omega_{pi} \approx 2{,}7\omega_i$. Заметим, что в этой работе интервал неустойчивых длин волн для $-1 < \frac{\omega}{\omega_i} < 1$ ошибочно ограничен значениями $2{,}4 \leqslant p \leqslant 3{,}83$; $5{,}52 \leqslant p \leqslant 7{,}02$; $8{,}65 \leqslant p \leqslant 10{,}17$ и т. д., когда может быть отрицателен числитель уравнения (58). Однако неустойчивость возможна и в случае, когда при положительном числителе отрицателен знаменатель в формуле (58).

Чисто поперечные колебания для более сложных распределений изучались в работах [26, 27]. В работе [26] рассматривались распределения, характерные для адиабатических ловушек. В работе [27] исследовалось распределение

$$f_{0i}(v_\perp v_\parallel) = \frac{1}{\pi^{3/2}\alpha_\perp^2\alpha_\perp^2\alpha_\parallel j!}\left(\frac{v_\perp}{\alpha_\perp}\right)^{2j} \exp \times$$
$$\times \left(-\frac{v_\perp^2}{\alpha_\perp^2} - \frac{v_\parallel^2}{\alpha_\parallel^2}\right), \qquad (60)$$

где $j = 1, 2, 3,...$ С помощью уравнения (60) можно аппроксимировать широкий класс распределений. Так, при $j \to 0$ f_{0i} переходит в анизотропное максвелловское распределение, а при $j \to \infty$ $f_{0i}(v_\perp) \to \frac{\delta(v_\perp - \langle v_\perp \rangle)}{2\pi v_\perp}$. В работе [27] найдено критическое значение j, выше которого колебания с $k_\parallel = 0$ становятся неустойчивыми. Оно оказалось равным трем.

В настоящем рассмотрении $k_\parallel = 0$. Разумеется, его результаты справедливы и при конечных значениях $k_\parallel$, если $k_\parallel^2 \ll k_\perp r_i^{-1}$.

Используя критерий Найквиста, можно показать, что колебания с $k_\parallel = 0$ при $\omega \gg \omega_i$ устойчивы. В работе [28] этот случай изучался другим способом. Причем в промежуточных вычислениях использовалась операция возведения в квадрат, что привело к появлению неустойчивых корней.

§ 5. УСТОЙЧИВОСТЬ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЫ ПРИ НАЛИЧИИ ХОЛОДНЫХ ИОНОВ

Во многих экспериментах с адиабатическими ловушками в начальной стадии накопления плазмы наряду с горячей плазмой имеется холодная, которая образуется, например, при ионизации остаточных газов быстрыми ионами. Представляется интересным выяснить влияние холодных ионов на устойчивость циклотронных колебаний, рассмотренных в предыдущих разделах.

Подробно этот вопрос исследован в работах [6, 29, 30]. Приведем основные результаты.

Холодная максвелловская плазма способствует стабилизации неустойчивых колебаний в области ионных циклотронных частот, $\omega \approx n\omega_i$. Однако неустойчивость при этом полностью не исчезает, но уменьшается величина инкремента. Лучше всего стабилизируется первая гармоника с $n = 1$.

В то же время в области высоких частот $\omega \gg \omega_i$ наличие холодной плазмы может способствовать развитию неустойчивости. Так, для распределения быстрых ионов по скоростям в виде δ-функции дисперсионное уравнение (П.3) в случае холодных электронов имеет вид

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\bar{\omega}_e^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cdot \frac{k_\parallel^2}{k^2} - \eta \times \frac{i\omega\omega_{pi}^2}{\left(k_\perp^2 v_{\perp 0}^2 - \omega^2\right)^{3/2}} = 0, \quad (61)$$

где $\eta = \frac{n_{1i}}{n_{2i}}$; n_{1i}, n_{2i} — плотности соответственно горячих и холодных ионов. При отсутствии холодной плазмы (см. п. б и в § 3) нагрев электронов приводил к стабилизации неустойчивых колебаний с $k_\parallel \neq 0$. Поперечные колебания в этом случае не раскачивались. Теперь же и чисто поперечные колебания с $k_\parallel = 0$ могут быть неустойчивыми, причем нагрев электронов лишь несколько уменьшает величину инкремента. Из уравнения (61) следует, что при $\eta \ll 1$ колебания с частотой $\omega \approx k_\perp v_{\perp 0}$ обладают инкрементом [29]

$$\gamma \approx \eta^{2/3} k_\perp v_{\perp 0}. \quad (62)$$

В работе [30] проведены численные расчеты величины инкремента и частоты в зависимости от η в пределах изменения η от 0,1 до 10. Отношение γ/ω слабо зависит от η в указанных пределах, что при малых η соответствует равенству (62).

§ 6. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ С НЕРАВНОВЕСНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЭЛЕКТРОНОВ ПО СКОРОСТЯМ

Аналогично тому как неравновесность в распределении ионов по скоростям приводит к раскачке ионных циклотронных колебаний, так и неравновесность в распределении электронов должна вызывать раскачку электронных циклотронных колебаний. Исследование таких высокочастотных колебаний оказывается значительно проще, поскольку при этом ионы можно считать неподвижными.

Заметим, что именно на примере электронных циклотронных колебаний Харрис [1] впервые рассмотрел устойчивость плазмы с немаксвелловским распределением частиц по скоростям.

а) анизотропное максвелловское распределение

Дисперсионное уравнение в этом случае можно получить, используя равенство (9), в котором следует заменить индекс i на e:

$$1+\frac{\omega_{pe}^2}{k^2}\cdot\frac{m}{T_{\parallel e}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\zeta_n(p_e^2)\left\{1+i\sqrt{\pi}\left(x_{ne}+\frac{n}{\tau_e}\right)h_e\times\right.$$

$$\left.\times W(z_{ne})\right\}=0. \qquad (63)$$

Рассмотрим колебания с частотой, лежащей между 0 и ω_e, считая $|\omega-\omega_e|\ll\omega_e$. В этом случае в уравнении (63) можно оставить «0» и «1» слагаемые. Будем также считать $k_\perp r_e \lesssim 1$ и $z_{0e}\gtrsim z_{1e}\gtrsim 1$. Колебания с $z_{0e}\ll 1$, $z_{1e}\ll 1$ невозможны, поскольку при этом $W(z_{ne})\approx 1$, в результате зависимость от частоты в уравнении (63) пропадает, и, следовательно, оно, вообще говоря, не может быть удовлетворено. Используя асимптотические выражения для $W(z_{ne})$, а также разлагая в ряд $\zeta_n(p_e^2)=I_n(p_e^2)e^{-p_e^2}$, получаем

$$-\frac{k^2}{\omega_{pe}^2}+\frac{k_\parallel^2}{\omega^2}+\frac{k_\parallel^2}{(\omega-\omega_e)^2}\cdot\frac{(k_\perp r_e)^2}{2}+\frac{k_\perp^2}{2\omega_e(\omega-\omega_e)}=0. \qquad (64)$$

Нетрудно видеть, что это уравнение дает неустойчивые решения, если в нем можно пренебречь первым и последним членами. Запишем эти условия, а также условия $z_{ne}\gtrsim 1$, $k_\perp r_e\lesssim 1$ в следующем виде:

$$\tau_e\gtrsim\frac{k_\parallel^2}{k^2}\gtrsim\frac{1}{k_\perp r_e}\gtrsim 1;\quad \omega_{pe}^2\gtrsim\omega_e^2. \qquad (65)$$

При этом инкремент колебаний по порядку величины определяется следующим выражением: $\mathrm{Im}\,\frac{\omega-\omega_e}{\omega_e}\approx k_\perp r_e$.

Из формулы (64) и выражения для инкремента следует, что с увеличением $k_\perp$ колебания становятся более неустойчивыми. Действительно, их инкремент возрастает, приближаясь при $k_\perp\approx r_e^{-1}$ по порядку величины к электронной циклотронной частоте, а минимальная анизотропия электронного распределения, при которой наступает неустойчивость, уменьшается — величина τ_e стремится к значениям порядка единицы.

Однако при $k_\perp r_e\approx 1$, $\left|\frac{\omega-\omega_e}{\omega_e}\right|\approx 1$ требуются численные расчеты, так как приближенное уравнение (64) в этом случае становится несправедливым.

Рассмотренные нами колебания раскачиваются без учета взаимодействия резонансных частиц с волной [их вклад в уравнение (64) был мнимым] и в соответствии с нашей классификацией могут быть отнесены к колебаниям с нулевой энергией.

Однако, как будет показано ниже, из-за циклотронного излучения резонансных электронов могут раскачиваться также и колебания с положительной энергией. Длина волны таких колебаний вдоль магнитного поля должна быть меньше $z_{1e}=\frac{\omega-\omega_e}{k_\parallel v_{\parallel e}}\lesssim 1$, в то время как в предыдущем случае имели $z_{1e}\gtrsim 1$.

Полагая также $z_{0e}\gg 1$, запишем дисперсионное уравнение

$$k^2 r_{d\parallel e}^2-\frac{\zeta_0}{2z_{0e}^2}+\zeta_1=-\,i\sqrt{\pi}\zeta_1 h_e\left(x_{1e}+\tau_e^{-1}\right). \qquad (66)$$

Оно близко по форме к равенствам (19), (27), и его удобно изучать тем же способом. (Это сходство отражает единую природу физических процессов, приводящих к раскачке колебаний.)

Неустойчивые колебания существуют, если выполняются условия: $z_{0e}\approx h_e\gtrsim 1$; $x_{1e}\gtrsim\tau_e^{-1}$; $z_{1e}\approx x_{1e}h_e\lesssim 1$. Запишем эти условия в форме, сходной с уравнениями (20), (28):

$$\text{мин}\left\{\tau_e^2;\ \tau_e\frac{L_\parallel^2}{r_e^2}\right\}\gtrsim h_e^2=\frac{1}{2}\,\frac{\zeta_0\left(k_\perp^2 r_e^2\right)}{k^2 r_{d\parallel e}^2+\zeta_1\left(k_\perp^2 r_e^2\right)}\gtrsim\text{макс}\left\{1;\ \frac{\tau_e}{k^2 r_e^2}\right\}. \qquad (67)$$

Здесь, как и в выражениях (20), (28), учтено также, что $k\gtrsim k_\parallel\gtrsim L_\parallel^{-1}$ ($L_\parallel$ — длина установки вдоль магнитного поля).

При выполнении условий (67) для максимального инкремента неустойчивых колебаний по порядку величины имеем выражение

[ср. с равенствами (21) и (29)]

$$\frac{\gamma}{\omega_e} \approx \left(1 + \frac{k^2 r_{d\parallel e}^2}{\zeta_1}\right)^{-1}. \qquad (68)$$

Из условия (67) следует, что неустойчивость возможна лишь при плотности выше критической, которая по порядку величины определяется из условия $r_{de}^2 \approx r_e^2$ ($\omega_{pe} \approx \omega_e$). Точные численные подсчеты дают $\omega_{pe} \approx \frac{\omega_e}{2}$ (см., например, работу [31]). Причем с ростом плотности первыми начинают раскачиваться колебания с наибольшей длиной волны.

При возрастании плотности, как и в случае, рассмотренном в п. в § 3, имеются две возможности. Если анизотропия мала, τ_e мин $\{\tau_e;\ L_\parallel^2/r_e^2\} \lesssim \zeta_1^{-1}$, то при плотности выше критической, определяемой из условия τ_e мин$\{\tau_e;\ L_\parallel^2/r_e^2\} \approx L^2/r_{d\parallel e}^{*2}$, значения волнового вектора необходимо увеличивать так, чтобы действительная часть неравенства (67) была удовлетворена. В этом случае при любой плотности для частоты имеем: $\omega_i \approx \omega_{pe} k_\parallel / k\zeta_0^{1/2} \approx \omega_e$. Инкремент таких колебаний падает с ростом плотности:

$$\frac{\gamma}{\omega_e} \approx \frac{r_{d\parallel e}}{r_e}\, \tau_e^{3/2} \text{ мин } \{\tau_e^{3/2};\ L_\parallel^3/r_e^3\}.$$

Если анизотропия велика, τ_eмин$\{\tau_e;\ L_\parallel^2/r_e^2\} \gtrsim \zeta_1^{-1}$, то при плотности выше критической, т. е. определяемой условием $\zeta_1 \approx r_{d\parallel e}^2/L^2$, частота перестает зависеть от плотности $\omega \approx k_\parallel (T_{\parallel e}/m)^{1/2} (\zeta_0/\zeta_1)^{1/2}$. Инкремент в этом случае, как следует из формулы (68), может быть весьма велик, достигая по порядку величины значений, близких к ω_e.

Вслед за Харрисом [1] устойчивость анизотропного максвелловского распределения электронов исследовалась во многих работах. Так, в работе [31] проводились численные расчеты по определению границы области неустойчивости. К сожалению, в этих работах рассматривалась область малых значений параметра $k_\perp r_e$, в [31] считалось $k_\perp r_e = 0{,}1$, где пригодны и приближенные выражения (64), (65).

В первоначальной работе [1] было указано, что распределение вида $f_0 \approx \frac{1}{a^2 + v_{\parallel e}^2} e^{-mv_\perp^2/2T_\perp}$ может быть также неустойчивым. В этом случае естественно ожидать возрастания роли резонансных частиц по сравнению с анизотропным максвелловским распределением (см. обсуждение работы [6] в п. а § 3). Однако численные результаты в работе [1] не приводятся.

б) распределение по скоростям в виде δ-функции

Если распределение электронов по скоростям имеет вид δ-функции $f_{0e} = \frac{1}{2\pi v_{\perp 0}} \delta(v_\parallel) \delta(v_\perp - v_{\perp 0})$, то резонансные частицы, для которых $\omega - \omega_e = k_\parallel v_{\parallel e}$, отсутствуют и, следовательно, раскачка колебаний с положительной энергией невозможна. Однако неустойчивость первого типа, рассмотренная в п. а § 6, возможна и в этом случае. Более того, здесь могут раскачиваться колебания с меньшим $k_\parallel$, поскольку условие $k_\parallel \gtrsim k_\perp$ при $k_\perp r_e \approx$ ≈ 1 не является необходимым. Действительно, при распределении в виде δ-функции последний член в уравнении (64) принимает следующий вид: $k_\perp^2 (J_1^2)'/\omega_e(\omega - \omega_e)\, p_e$ [см. формулу (31)]. Для анизотропного максвелловского распределения аналогичное слагаемое уравнение (64) учитывало стабилизирующий эффект, и им можно было пренебречь при $k_\parallel^2/k_\perp^2 \gtrsim (k_\perp r_e)^{-1}$. Но при распределении типа δ-функции соответствующим подбором $p_e = k_\perp r_e$ величина $(J_1^2)'$ может быть обращена в нуль и даже стать отрицательной. В последнем случае учет этого слагаемого приводит к увеличению инкремента (см. п. а § 4).

При распределении по скоростям в виде δ-функции возможна также неустойчивость с $k_\parallel = 0$. Эти колебания совершенно аналогичны соответствующим ионным колебаниям, рассмотренным в п. г § 4, и поэтому не будем на них останавливаться. Их численное исследование см., например, в работе [32].

§ 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В первой части работы, посвященной исследованию устойчивости плазмы с анизотропным максвелловским распределением ионов по скоростям, определены инкременты развития неустойчивости, а также найдена абсолютная граница области неустойчивости, т. е. минимальные по $\mathbf{k}$ значения $\tau = T_{\perp i}/T_{\parallel i}$, при которых возможна раскачка колебаний. В случае плотной квазинейтральной плазмы эта величина зависит только от электронной температуры, поэтому область неустойчивости удобно изобразить на $\mu - \tau$-диаграмме, $\mu = T_{\parallel i}/T_{\parallel e}$ (см. рис. 1). Ее левую часть (малые μ — горячие электроны) занимает область неустойчивости ионно-звуковых колебаний, правую (большие μ — холодные электроны) — область неустойчивости электронных ленгмюровских колебаний. В нижней части диаграммы (большие τ) расположены области неустойчивости колебаний с аномальной дисперсией. Причем внутри области неустойчивости ионно-звуковых колебаний лежит область диссипативной неустойчивости с отрицательной энергией, внутри области неустойчивости электронных ленгмюровских колебаний лежит область неустойчивости гидродина-

мического типа, которую можно назвать неустойчивостью на колебаниях с нулевой энергией (см. п. в § 1).

Максимальный инкремент ионно-звуковых колебаний весьма велик, по порядку величины он достигает значений ω_i. С уменьшением плотности плазмы, когда дебаевский радиус r_{di} становится больше ларморовского, их инкремент резко падает, а область неустойчивости сокращается (см. рис. 2).

Электронные ленгмюровские колебания начинают раскачиваться с значительно меньших значений плотности плазмы $r_{di}/r_i \approx (M/m)^{1/2}$ при $\tau^2 \gtrsim$ макс $\left\{1; \frac{M}{m}\frac{1}{\mu}\right\}$. Их инкремент при увеличении плотности растет пропорционально плотности. Если анизотропия плазмы сравнительно невелика $\tau^2 < M/m$, то он достигает максимума $\gamma_{\text{макс}} \approx \frac{m}{M}\tau^2\omega_i$ при плотности, определяемой из условия $r_{d\parallel i}^2/r_i^2 \approx M/m1/\tau^2$, а затем падает как $n_0^{-1/2}$. В случае большой анизотропии $\tau^2 \gtrsim M/m$ при $r_{d\parallel i}^2/r_i^2 \lesssim 1$ электронные ленгмюровские колебания переходят в электронно-звуковые с $k_\parallel$, определяемым из условия $\omega_i \approx k_\parallel (T_i/m)^{1/2} \approx \omega$, и инкрементом, по порядку величины сравнимым с ω_i. В реальных системах, ограниченных вдоль магнитного поля, область неустойчивости электронных ленгмюровских (электронно-звуковых) колебаний сокращается, если $L_\parallel/\tau_i < \tau^{1/2}$, а инкремент в этом случае, вообще говоря, становится меньше, чем в неограниченной плазме.

Максимальный инкремент диссипативной неустойчивости по порядку величины равен $\gamma \approx (m/M)^{1/2}\omega_i$, он достигается при $r_{di}/r_i \lesssim \mu\tau$. При меньшей плотности область неустойчивости и инкремент уменьшаются, но при больших значениях τ неустойчивость начинается при сколь угодно малых значениях плотности.

Характерный инкремент неустойчивости гидродинамического типа по порядку величины равен $\gamma \approx (m/M)^{1/2}\omega_i$. Эта неустойчивость раскачивается при выполнении следующих условий: $\tau \gtrsim \left(\frac{M}{m}\right)^{1/2}$, $r_i/r_{di} \gtrsim (m/M)^{1/2}$. Если плотность плазмы не слишком велика $r_{di}/r_i \gtrsim \left(\frac{M}{m}\right)^{1/3}$, то инкремент этой неустойчивости может достигать несколько больших значений $\gamma \approx (m/M)^{1/3}\omega_i$.

В случае горячих электронов ($\mu \ll 1$) при $\tau \gg 1$, $r_{di}^2 \ll r_i$ также возможна неустойчивость гидродинамического типа (см. § 3). Инкремент этой неустойчивости по порядку величины равен циклотронной частоте.

Следует отметить, что как для диссипативной неустойчивости, так и для неустойчивости гидродинамического типа характерны коротковолновые колебания с $k_\parallel \approx k_\perp \approx r_i^{-1}$, поэтому эффекты,

связанные с ограниченностью реальных систем, для этих типов неустойчивых колебаний несущественны.

Плазма с распределением ионов по скоростям в виде δ-функции представляет систему, находящуюся чрезвычайно далеко от состояния термодинамического равновесия ($\tau = \infty$). Как отмечено в Введении, неравновесность усиливается еще и тем обстоятельством, что в этом случае в отличие от анизотропного максвелловского распределения отсутствуют частицы с малой энергией. Поэтому не удивительно, что плазма с распределением частиц по скоростям в виде δ-функции неустойчива при произвольных значениях остальных параметров. Причем на циклотронных частотах раскачиваются только колебания с аномальным характером дисперсии (см. Введение).

Раскачка колебаний с нулевой энергией, так же как и в случае анизотропной максвелловской плазмы, начинается при достаточно большой плотности плазмы ($\omega_{pe} \gtrsim \omega_i$). При $\omega_{pi} \gtrsim \left(\frac{m}{M}\right)^{1/3} \omega_i$ инкремент неустойчивости $\gamma \approx \omega_{pi}$ превышает соответствующий инкремент для случая анизотропной максвелловской плазмы $\gamma \approx \left(\frac{m}{M}\right)^{1/3} \omega_i$. Наконец, при $\omega_{pi} \gtrsim \omega_i$ максимальный инкремент $\gamma_{\text{макс}} \approx \omega_{pi} \left(1 + \omega_{pe}^2/\omega_e^2\right)^{1/2}$ сравнивается по порядку величины с циклотронной частотой. В этом случае необходимо перейти к приближению непрерывного спектра, суммируя отдельные гармоники. Частота этих колебаний определяется формулой $\omega \approx k_\parallel/k_\perp \omega_{pe} \left(1 + \omega_{pe}^2/\omega_e^2\right)^{-1/2}$, а инкремент превышает циклотронную частоту. С повышением температуры электронов, когда $T_e > \varepsilon_{\perp 0}$, инкремент этой неустойчивости падает.

При наличии примеси холодных ионов возможна раскачка чисто поперечных колебаний. Если плотность холодных ионов n_{2i} превышает плотность горячих ионов n_{1i}, то инкремент колебаний по порядку величины определяется следующим выражением: $\gamma \approx (n_{1i}/n_{2i})^{2/3} k_\perp v_{\perp 0}$. Такие колебания в отсутствие холодной компоненты устойчивы.

Если $T_{\parallel e} \gtrsim \varepsilon_{\perp i}$, то становится существенной диссипативная неустойчивость, которая раскачивается при произвольной температуре электронов и плотности плазмы. Причем инкремент диссипативной неустойчивости при большой плотности плазмы может быть весьма велик, достигая для колебаний с $k_\parallel \approx \omega_i/v_{\parallel e}$, $k_\perp \approx r_i^{-1}$ значений, по порядку величины сравнимых с циклотронной частотой, $\gamma_{\text{макс}} \approx T_{\parallel e}/\varepsilon_{\perp i} \left(1 + \omega_i^2/\omega_{pi}^2 T_{\parallel e}/\varepsilon_{\perp i}\right)^{-2} \omega_i$. Однако, как показывает рассмотрение, он не может существенно превысить ионную циклотронную частоту.

Нами рассмотрены также колебания плазмы с неравновесным распределением электронов по скоростям. Эффекты анизотропии электронного распределения становятся существенными лишь

при достаточно большой плотности плазмы, когда частота электронных ленгмюровских колебаний становится сравнимой с электронной циклотронной. В том случае, если величина $\tau_e = <\varepsilon_{\perp e}>/<\varepsilon_{\parallel e}>$ достаточно велика, возможна неустойчивость двух типов: на колебаниях с положительной энергией, которые раскачиваются за счет циклотронного излучения резонансных электронов, и на колебаниях с значительно большей длиной волны вдоль магнитного поля, которые имеют нулевую энергию. Инкремент неустойчивых колебаний может сравниться по порядку величины с электронной циклотронной частотой.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Кинетическое уравнение для ионов

$$\frac{\partial f_{1i}}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f_{1i}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e}{M}\nabla\varphi_1 \frac{\partial f_{0i}}{\partial \mathbf{v}} = 0.$$

Откуда

$$f_{1i} = -\frac{e}{M}\frac{k_y\varphi_1}{\omega - k_y v_y}\frac{\partial f_{0i}}{\partial v_y} \quad (k_y \gg k_z);$$

$$n_1 = -\frac{en_0}{M}k_y\varphi_1\int d\mathbf{v}\,\frac{\dfrac{\partial f_{0i}}{\partial v_y}}{\omega - k_y v_y} = \frac{en_0}{M}k_y^2\varphi_1\int d\mathbf{v}\,\frac{f_{0i}}{(\omega - k_y v_y)^2} =$$

$$= \frac{en_0}{2\pi M}k_y^2\varphi_1\int_0^\infty v dv f_{0i}(v)\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(\omega - k_y v\sin\theta)^2}. \qquad (\text{П.1})$$

Вычислим интеграл

$$J = \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(\omega - k_y v\sin\theta)^2} = \oint_{|z|=1}\frac{4izdz}{(k_y v)^2(z - z_-)^2(z - z_+)^2},$$

где

$$z = e^{i\theta};\quad dz = izd\theta;\quad \sin\theta = \frac{z^2 - 1}{2iz};\quad z_\pm = i\frac{\omega}{k_y v} \pm \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{k_y^2 v^2}}.$$

Этот интеграл определен по Ландау для $\mathrm{Im}\,\omega > 0$, когда при $k_y > 0$ внутрь контура попадает полюс z_+, и сводится к вычету в этом полюсе. Полученное выражение следует аналитически продолжить в область $\mathrm{Im}\,\omega \leqslant 0$, обходя все особенности в плоскости комплексного ω сверху.

Вычисляя вычет в полюсе z_+, получаем

$$J = -\frac{8\pi}{(k_y v)^2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{(z - z_-)^2(z - z_+)^2} = \frac{8\pi}{(k_y v)^2}\times$$

$$\times\frac{z_- + z_+}{(z_+ - z_-)^3} = \frac{2\pi i\omega}{\left(k_y^2 v^2 - \omega^2\right)^{3/2}}.$$

Представляет интерес выражение для J при $\mathrm{Im}\,\omega = 0$:

$$|\omega| > k_y v\colon\ J = \frac{2\pi|\omega|}{(\omega^2 - k_y^2 v_{\perp 0}^2)^{3/2}};$$

$$n_1 = \frac{en_0}{M} k_y^2 \varphi_1 \int_0^\infty v dv f_{0i}(v) \frac{i\omega}{(k^2v^2 - \omega^2)^{3/2}} = \frac{2en_0}{M} \varphi_1 \int_0^\infty dv^2 \frac{\partial f_{0i}}{\partial v^2} \cdot \frac{i\omega}{(k^2v^2 - \omega^2)^{1/2}}; \tag{П.2}$$

$$\varepsilon_i = -\frac{4\pi e}{k_y^2} \cdot \frac{n_1}{\varphi_1}.$$

Подставляя формулу (П.2) в выражение (8) и имея в виду $\omega \gg k_\parallel v_{\parallel i}$, получим дисперсионное уравнение

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_e^2} \cdot \frac{k_\perp^2}{k^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_e^2}[1 + i\sqrt{\pi} z_e W(z_e)] -$$

$$- \frac{2\omega_{pi}^2}{k^2} \int_0^\infty dv^2 \frac{\partial f_{0i}}{\partial v^2} \cdot \frac{i\omega}{(k^2v^2 - \omega^2)^{1/2}} = 0, \tag{П.3}$$

которое в случае холодных электронов, $z_e = \dfrac{\omega}{k_\parallel v_e} \gg 1$ и $\omega_e \gg \omega$, переходит в дисперсионное уравнение, исследованное Розенблютом и Постом [7]:

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_e^2} = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cdot \frac{k_\parallel^2}{k^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 \bar{v}^2} F\left(\frac{\omega}{k\bar{v}}\right). \tag{П.4}$$

Здесь

$$\Gamma(y) = -2\int_0^\infty dx \frac{d\psi}{dx}\left(1 - \frac{x}{y^2}\right)^{-1/2};$$

$$g_0(v) = \pi \int_{-\infty}^{\infty} f_0(v^2;\ v_\parallel)\, dv_\parallel,\ g_0(0) = g_0(\infty) = 0; \tag{П.5}$$

$$x = \frac{v^2}{\bar{v}^2},\quad y = \frac{\omega}{k\bar{v}},\quad \psi = \bar{v}^2 g_0,\quad \int \psi dx = 1. \tag{П.6}$$

Если в распределении ионов по поперечным энергиям отсутствуют частицы с малыми энергиями и, следовательно, функция $\psi(x)$ растет до $\psi_{\text{макс}}$ при малых x и падает до нуля $x \to \infty$, то такая плазма, как нетрудно видеть из уравнения (П.4), неустойчива.

Условие неустойчивости можно записать как

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_e^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{k^2\bar{v}^2}|\mathrm{Re}\, F(y_1)| > \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v^2 y_1^2} \cdot \frac{k_\parallel^2}{k^2}, \tag{П.7}$$

где точка $y = y_1$ характеризуется тем, что в ней мнимая часть функции $F(y)$ обращается в нуль, $\mathrm{Im}\, F(y_1) = 0$.

Для распределения ионов в виде δ-функции уравнение (II.3) принимает вид

$$1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2-\omega_e^2}\cdot\frac{k_\perp^2}{k^2}+\frac{\omega_{pe}^2}{k^2v_e^2}\left[1+i\sqrt{\pi}z_eW(z_e)\right]-\frac{\omega_{pi}^2 i\omega}{\left(k^2v_{\perp 0}^2-\omega^2\right)^{3/2}}=0. \quad (\text{II}.8)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Harris E. G. Phys. Rev., Lett., **2**, 34 (1959).
2. Тимофеев А. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **39**, 397 (1960).
3. Киценко А. В., Степанов К. Н. «Ж. техн. физ.», **31**, 176 (1961).
4. Днестровский Ю. Н. и др. «Ядерный синтез», **3**, 30 (1963).
5. Dorry R. A. et al. Phys. Rev. Lett., **14**, 131 (1965).
6. Hall L. S. et al. Phys. Rev. Lett., **13**, 603 (1964); Phys. Rev., **139**, A 1117 (1965).
7. Rosenbluth M. N., Post R. F. Phys. Fluids, **8**, 547 (1965).
8. Головин И. Н., Артеменков Л. И. и др. «Успехи физ. наук», **53**, вып. 4, 685 (1961); Бажанова А. Е., Карпухин В. Т. и др. «Ядерный синтез». Приложение. Ч. 1, 1962, стр. 227; Dunlap J. L. et al «Ядерный синтез». Приложение. Ч. 1, 1962, стр. 233; Kuo L. G. et al. Phys Fluids, 7, 988 (1964); Damm C. C. et al. Phys. Rev. Lett., **10**, 323 (1963); **13**, (1964).
9. Доклады на конференции по физике плазмы и управляемому синтезу. Калэм (Англия), 1965:
   CN 21/232, Англия, Результаты исследований на установке «Феникс»;
   CN 21/234, США, Результаты исследований на установке «Алиса»;
   CN 21/238, СССР, Результаты исследований на установке «Огра II».
10. Веденов А. А., Сагдеев Р. З. В сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Т. 3. М., Изд.-во АН СССР, 1958, стр. 278.
11. Сагдеев Р. З., Шафранов В. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **39**, 181 (1960).
12. Галеев А. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **49**, № 2, 672 (1965).
13. Михайловский А. Б. «Ядерный синтез», **5**, 125 (1965).
14. Михайловский А. Б., Тимофеев А. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **44**, 919 (1963).
15. Шафранов В. Д. В сб. «Вопросы теории плазмы». Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 3. М., Госатомиздат, 1963, стр. 127.
16. Кадомцев Б. Б. и др. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **47**, 6 (1964).
17. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957, стр. 324.
18. Пистунович В. И., Тимофеев А. В. «Докл. АН СССР», **159**, № 4, 779 (1964).
19. Шафранов В. Д. В сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Вып. 4. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 416.
20. Красовицкий В. Б., Степанов К. Н. «Ж. техн. физ.», **34**, 6 (1964).
21. Soper G. K., Harris E. G. Phys. Fluids, **8**, 984 (1965).
22. Пистунович В. И. «Атомная энергия», **14**, 72 (1963).
23. Burt P., Harris E. G. Phys. Fluids, **4**, 1412 (1961).
24. Днестровский Ю. Н. «Ядерный синтез», **3**, 259 (1963).
25. Давыдова Т. А. «Ж. техн. физ.», **35**, № 6, 1924 (1965).
26. Post R. F., Rosenbluth M. N. Lawrense Radiation Laboratory (Livermore), Report UCRL-44388. Калифорния (США), 1965.
27. Guest G. E., Dory R. A. Phys. Fluids, **8**, 1853 (1965).
28. Ломинадзе Д. Г., Степанов К. Н. «Ж. техн. физ.», **35**, 3 (1965).
29. Михайловский А. Б., Пашицкий Э. А. «Ж. техн. физ.», **35**, № 11, 1960 (1965).
30. Hall L. S., Hecrotte W. Доклад на 7-й конференции по явлениям в ионизованных газах. Белград, 1965.
31. Ozawa Y. et al. J. Nucl. Energy, PC, **4**, 271 (1962).
32. Crawford F. W., Tatronis J. A. Nucl. Fusion, **5**, 73 (1965).

К МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПИНЧ-ЭФФЕКТА В ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛОТНОЙ ПЛАЗМЕ

В. Ф. Дьяченко, В. С. Имшенник

ВВЕДЕНИЕ

Последние успехи в экспериментах Н. В. Филиппова и др. [1] с мощными импульсными разрядами в дейтериевой плазме с начальным давлением ~ 1 *мм рт. ст.* и максимальным током $\sim 10^6$ *а* стимулировали попытку теоретически истолковать полученные в этих экспериментах существенно более высокие параметры плазмы, чем раньше: $T \sim 1$ *кэв*, $n \sim 10^{19}$ *см*$^{-3}$ (при сжатии примерно в 100 раз).

В первых теоретических работах [2—5] рассматривалось в основном равновесное состояние пинча, когда градиент давления плазмы уравновешен пондеромоторной силой постоянного осевого электрического тока. В частности, была получена известная формула для усредненной по радиусу пинча температуры плазмы. Результаты экспериментов, изложенные во многих работах [7—9], начиная с обзора И. В. Курчатова [6], показали, что теория равновесного пинча имеет мало отношения к действительности. Под влиянием этих экспериментов М. А. Леонтовичем и С. М. Осовцом [10] была предложена изящная качественная нестационарная теория пинч-эффекта, учитывающая определяющую роль инерционных сил. В теории исходными были представления о сильном скин-эффекте и о полном захвате нейтрального газа ускоренно-движущейся к оси токовой оболочкой. Экспериментально наблюдаемые времена сжатия плазмы очень хорошо объяснялись этой теорией [11]. Относительно гидродинамических эффектов, как, например, давления плазмы, в работе [10] вводились грубые предположения. Теоретические работы Розенблюта [12], С. И. Брагинского и А. Б. Мигдала [13] также основывались на грубом упрощении гидродинамических процессов. В упомянутых теориях не определялось пространственное распределение гидродинамических величин. Магнитогидродинамическая задача о сжатии плазменного столба была впервые рассмотрена С. И. Брагинским, И. М. Гельфандом и Р. П. Федоренко [14].

Цилиндрически симметричные магнитогидродинамические уравнения решались в работе [14] совместно с электротехническими уравнениями. Из диссипативных процессов принималась во внимание только электропроводность плазмы. Несмотря на очень сложную физическую картину процесса в частично ионизованном газе, была сформулирована сравнительно простая физическая модель разряда.

Большое значение в упрощении описания процесса сыграло предположение о постоянстве электропроводности. Оно физически обосновано тем, что температура электронов плазмы не может существенно измениться, достигнув обычной в газовых разрядах величины около 3 *эв*, пока не закончится ионизация газа. Поэтому электропроводность в плазме, которая зависит только от электронной температуры ($\sigma \sim T_e^{3/2}$), остается примерно постоянной.

Условие постоянства электропроводности и предположение об эффективной связи внутренней энергии с давлением по адиабатическому закону с некоторым постоянным показателем адиабаты $\left(E \sim \frac{1}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho}\right)$ дали возможность вообще не вводить в расчет величину температуры плазмы. Температура плазмы $T = T_i + \xi T_e$, где ξ — степень ионизации, оценивалась на основе расчетных величин давления и плотности по уравнению состояния идеального газа $kT = M \frac{P}{\rho}$ (M — масса атома дейтерия). Относительно различия T_i и T_e, а также ξ при известных значениях T в работе делались те или иные предположения уже при сопоставлении с экспериментом.

Отметим некоторые недостатки такой постановки задачи. К сожалению, расчет был сделан только с величиной $\gamma = 1{,}66$, соответствующей случаю одноатомного идеального газа, хотя эффективно можно было бы учесть энергию ионизации газа, полагая $\gamma = \gamma_0 < 5/3$. Кроме того, температура плазмы T для вариантов, сравниваемых с экспериментом, оказалась равной нескольким десяткам электронвольт. Правда, эти значения T являются максимальными, но когда в скин-слое температура становится такой большой, предположение о постоянстве электропроводности уже неправильно. Таким образом, не все интуитивно правильные исходные предположения могут быть полностью оправданы результатами расчетов.

В книге [11] справедливо отмечено, что в обсуждаемых расчетах неоправданно пренебрегают процессами ионизации, возбуждения атомов и потерями на излучения. Здесь следует дополнительно указать на большие упрощения в учете диссипативных процессов. В расчетах учитывалась только проводимость плазмы, вязкость и теплопроводность плазмы не принимались во внимание. Постоянная проводимость плазмы варьировалась как пара-

метр. Наиболее подходящей к опыту оказалась та, которая давала в расчетах «умеренный» скин-эффект. Она соответствовала электронной температуре в несколько электронвольт. Впрочем, чувствительность результатов к величине проводимости плазмы, как видно из графиков работы [14], не столь уж велика.

В работе проведено сравнение расчета с экспериментом. Можно сделать вывод, что теоретический расчет в общем оказался в хорошем согласии с имеющимися тогда опытными данными. С. И. Брагинским и др. [14] было дано сравнение временной зависимости полного тока, внешнего радиуса токовой оболочки, средней энергии на один атом, давления, среднего сжатия плазмы и энергетического баланса. Большинство сравниваемых величин оказалось в разумном согласии. Было отмечено, что расчетная температура непостоянна по сечению, а вблизи оси значительно выше средней (кумуляция). Величина усредненной температуры в максимуме превышала равновесное значение в 2—3 раза. Максимальное значение усредненной ионной температуры в этих расчетах составляло $(0{,}3 \div 0{,}8) \cdot 10^2$ *эв* при различных предположениях о связи T_e и T_i (а также о степени ионизации ξ). Такие значения температуры были признаны вполне разумными на основе совокупности экспериментальных данных.

Здесь следует подчеркнуть, что указанные выше упрощения в постановке задачи в первую очередь отражаются на величине температуры. Поэтому к расчетным данным температуры нужно было относиться с особой осторожностью. Однако в этих опытах отсутствовали прямые измерения температуры плазмы, а косвенные данные были очень неопределенны. В этом смысле постановка задачи соответствовала уровню современного ей экспериментального материала. Сравнение величин сжатий плазмы показало существенное расхождение. Расчетное значение сжатия получилось по меньшей мере вдвое меньше наблюдаемого. В работе [14] также отмечено, что пульсации пинча гораздо слабее затухают в расчетах, чем в действительности. Из этого был сделан важный вывод, что упругость реального плазменного шнура меньше принятой в магнитогидродинамической модели. В этой модели не учтены, как отмечают авторы, потери энергии на ионизацию, возбуждение, излучение, действие различных механизмов неустойчивости. К этому перечислению следует добавить различные процессы диссипации, также неучтенные в расчетах.

Конечно, большую роль в оценке результатов расчета играет численный метод решения. В численном методе, использованном в работе [14], можно указать ряд недостатков. Весьма грубой следует признать сетку: по радиусу пинча располагалось всего 35 точек. Недостаточная точность счета особенно отражалась на описании процессов в приосевой области. Для учета сильной сходящейся ударной волны применялся известный метод искусственной вязкости. Размазывание гидродинамических величин в окрестности фронта ударной волны в этом случае не имеет ника-

кого отношения к размазыванию их на средней длине свободного пробега, что происходит в действительности, и в рамках этих расчетов нет оснований подробно анализировать пространственное распределение температуры и плотности вблизи момента кумуляции ударной волны. К максимальным значениям температуры и плотности нужно относиться критически. Следует подчеркнуть, что отмеченные недостатки в численном методе решения во многом были связаны с имеющимися в то время возможностями вычислительной техники. Также ясно, что многие упрощения физической постановки задачи косвенно обусловлены той же причиной. Довольно подробный анализ расчетов С. И. Брагинского и др. [14], проведенный здесь, по существу служит отправной точкой для изложения сути данной работы. В особенности для последующего рассмотрения имеют значение недостатки расчетов [14], на которых выше акцентировалось внимание. Детальное всестороннее сопоставление теории из работы [14] и эксперимента проводится в книге [11].

Но прежде чем переходить к описанию цели и содержания данной работы, нужно указать на два обстоятельства, существенные в развитии теоретических представлений о пинч-эффекте. Впервые экспериментально обнаруженные неустойчивости цилиндрически симметричного пинча, а также, безусловно, связанные с ними нейтронное и жесткое рентгеновское излучения [15] подвергались качественному теоретическому анализу, но не привели к пересмотру исходного предположения о цилиндрической симметрии пинч-эффекта, во всяком случае до начала второго сжатия [11]. С учетом новых экспериментальных данных [1] положение здесь, по-видимому, еще сложнее, но пока нет оснований отказываться от предположения цилиндрической симметрии разряда, дающей возможность детально исследовать нестационарный магнитогидродинамический процесс. Во-вторых, следует оговорить, что гидродинамическое описание пинч-эффекта может применяться только при условии достаточно плотной плазмы. Иначе необходимо использовать кинетическое описание плазмы.

В данной работе решается только одномерная цилиндрически симметричная нестационарная задача. Все рассмотрение осуществляется в рамках магнитной гидродинамики с учетом различных процессов диссипации: электронной теплопроводности, ионных теплопроводности и вязкости, электропроводности, а также обмена энергией между электронами и ионами из-за столкновений. Коэффициенты диссипации определяются для полностью ионизованной плазмы, другие эффекты нейтральных частиц (ионизация и возбуждение) также не принимаются во внимание. Пренебрежение ролью нейтральных частиц более обоснованно, чем в работе [14], так как при сравнении с опытом речь пойдет о температурах, в десять раз больших (~ 1 *кэв*). Температуры ионов и электронов плазмы не отождествляются, но плотности и макро-

скопические скорости, наоборот, полагаются одинаковыми. Можно уточнить пределы применимости сформулированного гидродинамического приближения с учетом процессов диссипации. Средняя длина свободного пробега частиц в плазме должна быть, строго говоря, много меньше характерного размера — радиуса пинча, а дебаевский радиус — много меньше средней длины свободного пробега.

Однако из-за специфического смысла понятия среднего свободного пробега первое требование скорее нужно расценивать как простое неравенство, в частности, обоснованно учитывать изменение длины пробега на длине пробега.

Коль скоро выполнены условия гидродинамического приближения, в процессе сжатия пинча образуется цилиндрическая сходящаяся ударная волна. Теория структуры плоской стационарной ударной волны в полностью ионизованной плотной плазме развита в работах [16—19]. С помощью принятой ниже системы уравнений структура стационарной ударной волны описывается удовлетворительно. Это нужно понимать как выполнение необходимого условия адекватности исходных уравнений данной работы. Дополнительный учет диссипативных процессов вязкости и теплопроводности ионной компоненты плазмы дает на месте вязкого изоэлектронно-термического скачка в работах [16—19] область непрерывного изменения всех величин с шириной порядка средней длины свободного пробега. Другими словами, в данной статье в отличие от [16—19] описывается тонкая структура ударной волны — структура вязкого скачка. Такая задача для стационарной плоской ударной волны решалась раньше Джукесом [20]. Недавно Липманном и др. [21] для идеального газа было проверено, что даже в случае весьма сильных ударных волн в приближенном описании с помощью вязкости получается удовлетворительное решение структуры ударного фронта в наиболее интересной области: за точкой максимума вязкого тензора в сторону конечных состояний газа. Таким образом, учет вязкости и теплопроводности ионов в некотором смысле годится для описания тонкой структуры вязкого скачка даже с точки зрения более последовательного кинетического рассмотрения. В данной работе вопросы структуры ударной волны приобретают важное значение, так как характерные особенности приосевой области, где получаются наивысшие параметры плазмы (температуры и плотность), в значительной мере отражают особенности структуры сходящейся ударной волны. Во всяком случае, с самого начала ясно, что средняя длина свободного пробега частиц в плазме, существенно зависящая от температуры и плотности, является характерным размером структуры приосевой области вблизи момента кумуляции ударной волны.

Большую роль для процессов в приосевой области играют также граничные условия. В автомодельной задаче о сходящейся ударной волне отраженная волна, как известно, вызывает движе-

ние вещества от оси. В случае постоянного электрического тока (или почти постоянного), что будет рассматриваться в дальнейшем, и после прохождения отраженной ударной волны продолжается интенсивное сжатие и нагрев обеих компонент плазмы.

Следует, однако, заметить, что отраженная ударная волна, будучи по обычной терминологии слабой, сильно размыта, и весьма условно можно говорить о ее локализации. Как было показано в ходе расчетов, начиная с момента кумуляции ударной волны, важную роль из процессов диссипации начинает играть ионная теплопроводность. На стадии сходящейся ударной волны она лишь немного дополнительно расширяет непрерывную структуру вязкого скачка, обусловленную ионной вязкостью.

Роль граничных условий особенно важна для процессов вблизи внешней границы. Как обычно (см. [11, 14]), потерями частиц и тепла с внешней границы плазмы будем пренебрегать. На внешней границе должно быть задано только значение магнитного поля, связанное известным выражением с полным током и радиусом границы. Электропроводность, учтенная в уравнениях, играет роль в окрестности внешней границы, определяя глубину проникновения магнитного поля. Сравнительно небольшая глубина этого проникновения, т. е. малая толщина скин-слоя, делает естественным отдельное рассмотрение предельного случая бесконечно большой электропроводности. При этом давление плазмы плюс нормальная компонента вязкого тензора в радиальном направлении на границе выражается через квадрат магнитного поля. В постановке задач с конечной электропроводностью были допущены некоторые огрубления в учете эффектов магнитного поля. Полная система уравнений с последовательным учетом эффектов магнитного поля выведена С. И. Брагинским [22]. По сравнению с ней ниже сделаны упрощения, но, конечно, только в отношении членов, описывающих явления переноса. Во-первых, зависимость ионных коэффициентов переноса от магнитного поля была полностью исключена. При толщине скин-слоя, меньшей или сравнимой с ларморовским радиусом дейтронов, это пренебрежение оправданно. Во-вторых, в уравнении для электронной компоненты допущены более необоснованные упрощения, не учтено тепловыделение из-за термосилы и в потоке тепла опущено слагаемое, обусловленное относительной скоростью ионов и электронов при отличном от нуля токе. Вблизи границы эти члены, вообще говоря, одного порядка с учтенными в уравнениях. Влияние магнитного поля на электронную теплопроводность учтено в форме довольно грубой интерполяционной формулы. Однако и эти упрощения, по-видимому, не уменьшают ценность сделанных расчетов. В самом деле, не очень обоснованно решать задачу о детальной структуре скин-слоя (а только здесь могут играть роль сделанные упрощения), пренебрегая одновременно ролью нейтральных атомов и потерями частиц и тепла через внешнюю границу плазмы.

Можно сказать, что расчеты с магнитным полем по меньшей мере служат обоснованием предельного случая бесконечно большой электропроводности плазмы.

Краткое описание математической стороны задачи и изложение основных принципов численного метода дано в ранее опубликованной работе [23]. В данной работе, посвященной физической стороне задачи, эти вопросы не будут затрагиваться. В работе [23] приведен пример расчета, но без учета ионной теплопроводности и конечной электропроводности и с иным граничным условием. Рассмотренный пример иллюстрировал, как вдали от оси возникает известная стационарная структура ударной волны [16—19], а затем в приосевой области происходит нестационарный процесс кумуляции и отражения ударной волны. С использованным в примере граничным условием — постоянной скоростью границы — на фронте ударной волны приближенно выполнялся автомодельный закон. Как было отмечено выше, с почти постоянным током общая картина в приосевой области существенно отличается от автомодельной, хотя в течение узкого интервала времени вблизи момента кумуляции и на малом расстоянии от оси имеется определенная связь с автомодельным решением. Упрощенная постановка граничных условий, использованная в примере, не дает возможности сделать окончательных выводов о времени существования температур порядка 1 *кэв*, о максимальном сжатии плазмы и т. п.

Детально описать пинч-эффект возможно исходя из естественного граничного условия, вытекающего из заданной зависимости полного электрического тока от времени. В частности, важное значение приобретает решение задачи с постоянным электрическим током. Дополнительное электротехническое уравнение, аналогичное использованному в работе [14], не вводилось, чтобы получить более ясное представление о гидродинамических процессах в пинче. Впрочем, это отделение гидродинамической части задачи от электротехнической имеет свой недостаток: баланс энергии в пинче теряет смысл, так как закон сохранения энергии не выполняется. Но постановка задачи с заданным электрическим током с выделенным особым случаем постоянного тока диктуется экспериментальными данными [1]. Весь процесс самосжатия разряда происходит в области плато тока. Ток отрыва оказывается весьма близким к максимальному значению тока. Наконец, против присоединения к уравнениям задачи электротехнического уравнения говорит весьма сложная геометрия разряда в опытах, поскольку здесь определение индуктивного сопротивления не связано простым образом с радиусом пинча [1].

Результаты расчетов, изложенных в работе, сравниваются с некоторыми экспериментальными данными. Эти сравнения являются итогом совместных дискуссий авторов с Н. В. Филипповым, Т. И. Филипповой, В. П. Виноградовым, Г. В. Голубом, Л. Г. Голубчиковым и Ю. А. Колесниковым.

§ 1. МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПИНЧ-ЭФФЕКТА С УЧЕТОМ ПРОЦЕССОВ ДИССИПАЦИИ

а) Физические предположения. Уравнения в общей векторной форме

При выводе исходной системы уравнений были сделаны некоторые физические предположения, которые приведем ниже:

1) электрический ток разряда распространяется только вдоль оси z ($j_r = j_\varphi = 0$, $j_z \neq 0$), током смещения пренебрегается;

2) внешнее магнитное поле отсутствует, т. е. имеется лишь азимутальное магнитное поле тока разряда ($H_r = H_z = 0$, $H_\varphi \neq 0$);

3) пренебрегается различием плотностей электронов и ионов плазмы ($n_e = Zn_i = Zn$), хотя поляризация плазмы в радиальном направлении подразумевается ($E_r \neq 0$);

4) ионная и электронная температуры плазмы не равны друг другу, но связаны из-за обмена энергией путем парных столкновений ($T_i \neq T_e$);

5) плазма предполагается идеальной и полностью ионизованной, т. е. энергия и давление аддитивны, а в качестве уравнения состояния используется уравнение Клайперона, и показатель адиабаты $\gamma = {}^5/_3$;

6) различные коэффициенты диссипативных процессов (ионная вязкость, ионная и электронная теплопроводности, электропроводность и скорость обмена энергией) определены для случая полностью ионизованной плазмы;

7) нелинейный характер коэффициентов диссипации последовательно учтен во всех уравнениях;

8) только в коэффициенте электронной теплопроводности учтена локальная зависимость от магнитного поля, правда, в виде довольно грубой интерполяционной формулы, для электропроводности плазмы принята «поперечная» величина ($\sigma = \sigma_\perp$).

Легко вывести уравнение диффузии магнитного поля с нелинейной электропроводностью. Плотность электрического тока выражается с помощью простого закона Ома:

$$\mathbf{j} = \sigma_\perp \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\,\mathbf{H}] \right). \qquad (1.1)$$

Если исходить из более полного обобщенного закона Ома, то вывод из него соотношения (1.1) связан с известными предположениями [5, 11]. Во-первых, в обобщенном законе Ома следует пренебречь членом $\partial \mathbf{j}/\partial t$, т. е. инерцией электронов; во-вторых, вывести из уравнения одномерного движения, что $\mathbf{j} \perp \operatorname{grad} p_i$, $\partial \mathbf{v}/\partial t$, и далее предположить полную компенсацию суммы градиента ионного давления и силы инерции перпендикулярной к току составляющей электрического поля в направлении движения $\mathbf{E}_\perp$. Электрическое поле $\mathbf{E}_\perp$ появляется из-за

электростатической поляризации плазмы. В рассматриваемой задаче такая поляризация возникает в радиальном направлении. Конечно, связанный с этой поляризацией в нестационарном процессе радиальный электрический ток вызывает z-компоненту пондеромоторной силы $\sim j_r H_\varphi$ и, следовательно, обусловливает вторичное движение плазмы в направлении оси z. Однако можно оценить, что скорость такого движения v_z ничтожно мала практически в любых условиях [5]. Поэтому в дальнейшем положим $v_z \equiv 0$. Электрическое поле в радиальном направлении никакой роли в уравнениях не играет, но его величина может быть использована для оценки пространственного разделения ионов и электронов. Явный вид E_r легко получается с помощью приведенных рассуждений:

$$E_r = \frac{1}{ne} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial r} + \frac{M}{e} \cdot \frac{dv}{dt}, \tag{1.2}$$

где M — масса иона; e — элементарный электрический заряд; p_i — ионное давление.

После подстановки соотношения (1.1) получаем уравнение диффузии магнитного поля в векторной форме

$$-\frac{c^2}{4\pi\sigma_\perp}\Delta \mathbf{H} - \operatorname{rot}[\mathbf{v}\,\mathbf{H}] + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \\ = \frac{c^2}{4\pi\sigma_\perp^2}[\operatorname{grad}\sigma_\perp \operatorname{rot}\mathbf{H}]. \tag{1.3}$$

Запишем далее все остальные уравнения процесса в векторном виде [23]:

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \frac{1}{4\pi}[\operatorname{rot}\mathbf{H}\,\mathbf{H}] + \operatorname{Div}\sigma'; \tag{1.4}$$

$$\rho T_i \frac{dS_i}{dt} = \operatorname{div}(\sigma'\,\mathbf{v}) - \mathbf{v}\operatorname{Div}\sigma' - \operatorname{div}\mathbf{F}_i - Q; \tag{1.5}$$

$$\rho T_e \frac{dS_e}{dt} = -\operatorname{div}\mathbf{F}_e + \frac{c^2}{16\pi^2\sigma_\perp}(\operatorname{rot}\mathbf{H}^2) + Q; \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\mathbf{v} = 0. \tag{1.7}$$

Здесь (1.4) — уравнение движения; σ' — вязкий тензор, компоненты которого определены обычным образом с равным нулю вторым коэффициентом вязкости:

$$\sigma'_{jk} = \eta_i\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\delta_{jk}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right). \tag{1.8}$$

В соотношении (1.8) η_i — коэффициент ионной вязкости. Заметим, что в уравнениях (1.3)—(1.7) плотность плазмы $\rho = nM$; $\mathbf{v}$ — макроскопическая скорость; p — полное давление.

Уравнения (1.5) и (1.6) представляют собой энтропийные уравнения ионной и электронной компонент плазмы; соответственно S_i и S_e — энтропии ионов и электронов на единицу массы плазмы; (1.7) — уравнение непрерывности. Символ Div означает дивергенцию тензора в отличие от дивергенции вектора. В уравнениях (1.5) и (1.6) входят члены ионной и электронной теплопроводностей, их компоненты равны:

$$F_{ij} = -\varkappa_i \frac{\partial T_i}{\partial x_j}; \quad F_{ej} = -\varkappa_e \frac{\partial T_e}{\partial x_j}, \tag{1.9}$$

$\varkappa_i$, $\varkappa_e$ — соответствующие коэффициенты теплопроводности. Член Q — скорость обмена энергией между ионами и электронами.

К системе уравнений (1.3) — (1.9) должны быть еще присоединены термодинамические соотношения:

$$T_e dS_e = dE_e + p_e d\left(\frac{1}{\rho}\right); \quad T_i dS_i = dE_i + p_i d\left(\frac{1}{\rho}\right). \tag{1.10}$$

В идеальной и полностью ионизованной плазме справедливы уравнения состояния:

$$\left.\begin{aligned} &p = p_i + p_e, \quad p_i = \frac{k}{M}\rho T_i, \quad p_e = Z\frac{k}{M}\rho T_e; \\ &E = E_i + E_e, \quad E_i = \frac{3}{2}\frac{p_i}{\rho}, \quad E_e = \frac{3}{2}\frac{p_e}{\rho}. \end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

В соотношениях (1.11) Ze — электрический заряд иона.

б) Одномерные цилиндрически симметричные уравнения

Воспользовавшись тем, что отличны от нуля только компоненты векторов j_z, H_φ, v_r, и они, а также скалярные термодинамические величины зависят от одной координаты r, запишем исходные уравнения в цилиндрической системе координат. Для членов ионной вязкости заимствуем соответствующие выражения из работы [23]. В качестве основных переменных используем величины $H \equiv H_\varphi$; $v \equiv v_r$; ρ; T_i и T_e. Введем также коэффициент диффузии магнитного поля $\lambda = \dfrac{c^2}{4\pi\sigma_\perp}$. Окончательно получаем систему уравнений:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r}(vH) + \frac{\partial}{\partial r}\left[\lambda \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(rH)\right]; \tag{1.12}$$

$$\rho \frac{dv}{dt} + \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{k}{M}\rho(T_i + ZT_e)\right] = \frac{4}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\eta_i \frac{\partial v}{\partial r}\right) +$$

$$+ \frac{2}{3}\left[2\eta_i \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right) - \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial \eta_i}{\partial r}\right] - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{H}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH); \tag{1.13}$$

$$\rho\frac{3}{2}\cdot\frac{k}{M}\cdot\frac{dT_i}{dt}-\frac{k}{M}T_i\frac{d\rho}{dt}=\frac{4}{3}\eta_i\left[\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2-\right.$$
$$\left.-\frac{v}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right)\right]+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\varkappa_i\frac{\partial T_i}{\partial r}\right)-Q; \qquad (1.14)$$

$$\rho\frac{3}{2}\cdot\frac{kZ}{M}\cdot\frac{dT_e}{dt}-\frac{kZ}{M}T_e\frac{d\rho}{dt}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\varkappa_e\frac{\partial T_e}{\partial r}\right)+$$
$$+\frac{\lambda}{4\pi}\cdot\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rH)\right]^2+Q; \qquad (1.15)$$

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(rv)=0. \qquad (1.16)$$

Во всех уравнениях (1.13) — (1.16) дифференциальный оператор d/dt означает субстанциональную производную $\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial r}$.

в) Коэффициенты диссипации полностью ионизованной плазмы

Коэффициенты диссипации λ, η_i, $\varkappa_i$, $\varkappa_e$ и Q в полностью ионизованной плазме можно записать в следующем виде, выделяя их основную зависимость от температур и плотности плазмы (электронная теплопроводность $\varkappa_e$ зависит также от магнитного поля):

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= E(Z, L)(kT_e)^{-3/2};\\
\eta_i &= B(Z, L, M)(kT_i)^{5/2};\\
\varkappa_i &= D(Z, L, M)(kT_i)^{5/2};\\
\varkappa_e &= A(Z, L)\frac{(kT_e)^{5/2}}{1+F(Z, L, M)\dfrac{(kT_e)^3H^2}{\rho^2}};\\
Q &= C(Z, L, M)\rho^2\frac{k(T_i-T_e)}{(kT_e)^{3/2}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.17)$$

В соотношениях (1.17) A, B, C, D, E и F — известные функции параметров плазмы Z, L, M, причем кулоновский логарифм L, как обычно, предполагается постоянным, не зависящим от температуры и плотности. Приведем конкретный вид этих величин, использованный далее с указанием источников. Однако заметим, что они получены и во многих других работах, имеющих иногда бóльшее принципиальное значение в теории плазмы.

$$A=1{,}9\frac{k}{m^{1/2}e^4L}\cdot\frac{1+0{,}59Z^{-1}}{1+0{,}25Z+0{,}34Z^{-1}}\ \text{[24]};$$

$$B = 0{,}81\,\frac{M^{1/2}}{e^4 Z^4 L} \quad [25];$$

$$C = 5{,}0 m^{1/2} e^4 L \left(\frac{Z}{M}\right)^3 \quad [26{,}5];$$

$$D = A\left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} Z^{-1}\left[\frac{13{,}56 + 7{,}92Z^{-1} + 0{,}43Z^{-2} + 1{,}75Z^{-3} + 0{,}59Z^{-4}}{1 + 0{,}59Z^{-1}} - \right.$$

$$\left. - \frac{3{,}34 + 13{,}56Z^{-1} + 4{,}55Z^{-2}}{0{,}25 + Z^{-1} + 0{,}34Z^{-2}}\right] \quad [24]; \qquad (1.18)$$

$$E = 0{,}08\,\frac{m^{1/2} e^2 c^2 ZL}{\gamma(Z)} \quad [5, 11]$$

(функция $\gamma(Z)$ дана таблицей в работе [5]);

$$F = 0{,}33\,\frac{M^2}{mc^2 e^6 Z^4 L^2} \quad [5].$$

Запишем предельный вид величины D для ионной теплопроводности при $Z \gg 1$ (практически $Z \gtrsim 20$), когда, как легко убедиться, происходит сокращение первых членов разложения по степеням Z^{-1}:

$$D = A\left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \cdot 0{,}43 Z^{-3}. \qquad (1.19)$$

Предельный переход в A тривиален. Следует обратить внимание на зависимость $D \sim Z^{-4}$. Эта зависимость, вытекающая из элементарных физических соображений, также введена в выражение коэффициента ионной вязкости B при $Z \neq 1$. Таким образом, более точная формула ионной теплопроводности, не имеющая простого вида для общего случая $Z \neq 1$, удовлетворительно выполняется в пределе $Z \gg 1$. Число Прандтля (Pr) в ионной компоненте плазмы равно:

$$\mathrm{Pr} = \frac{3}{2} \cdot \frac{k}{M} \cdot \frac{\eta_i}{\varkappa_i} \simeq (2{,}75)^{-1}.$$

Числа Pr практически совпадают в обоих пределах по Z: при $Z = 1$ и при $Z \gg 1$.

Детальное обсуждение коэффициентов диссипации плазмы в данной работе неуместно. Важно только, чтобы было выполнено условие: точность определения коэффициентов диссипации должна соответствовать той роли, которую они играют в рассматриваемом процессе, и тому значению, которое придается различным частям расчета. Об этом уже ранее говорилось во Введении. Можно надеяться, что принятые формулы (1.17) и (1.18) удовлетворяют этим требованиям.

г) Безразмерная форма уравнений и определяющие параметры

Численное решение и качественный анализ уравнений осуществляют после перехода к безразмерным переменным. Введем безразмерные переменные, определяя H_0, ρ_0 и R_0 как характерные величины магнитного поля, плотности и радиуса плазмы. Тогда получим определение всех безразмерных переменных:

$$\left.\begin{gathered} h=\frac{H}{H_0};\quad \sigma=\frac{\rho}{\rho_0};\quad x=\frac{r}{R_0};\quad \tilde{p}=\frac{p}{p_0}\left(p_0=\frac{H_0^2}{8\pi}\right);\\ u=\frac{v}{v_0}\left(v_0=\sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}\right);\quad T=\frac{k}{M}\cdot\frac{T_i}{p_0/\rho_0};\\ \theta=\frac{k}{M}\cdot\frac{T_e}{p_0/\rho_0};\quad \tau=\frac{t}{t_0}\left(t_0=\frac{R_0}{\sqrt{p_0/\rho_0}}\right). \end{gathered}\right\} \qquad (1.20)$$

Окончательный вид системы уравнений можно получить из (1.12) — (1.16) с подставленными туда коэффициентами диссипации, согласно соотношениям (1.17), при помощи перехода к безразмерным переменным (1.20):

$$\frac{\partial h}{\partial\tau}=-\frac{\partial}{\partial x}(uh)+\frac{1}{\alpha\beta}\cdot\frac{E}{M^{3/2}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\theta^{3/2}x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(xh)\right]; \qquad (1.21)$$

$$\sigma\frac{du}{d\tau}+\frac{\partial}{\partial x}[\sigma(T+Z\theta)]=\frac{4}{3}\alpha BM^{5/2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(T^{5/2}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\right.$$

$$\left.+\left[T^{5/2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{x}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{u}{x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(T^{5/2})\right]\right\}-2\frac{h}{x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(xh); \qquad (1.22)$$

$$\frac{3\sigma}{2}\cdot\frac{dT}{d\tau}-T\frac{d\sigma}{d\tau}=\frac{4}{3}\alpha BM^{5/2}T^{5/2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\right.$$

$$\left.-\frac{u}{x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{u}{x}\right)\right]+\alpha\frac{DM^{7/2}}{k}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(xT^{5/2}\frac{\partial T}{\partial x}\right)-$$

$$-\frac{c}{M^{1/2}}\frac{1}{\alpha}\sigma^2\frac{T-\theta}{\theta^{3/2}}; \qquad (1.23)$$

$$\frac{3}{2}\sigma Z\frac{d\theta}{d\tau}-Z\theta\frac{d\sigma}{d\tau}=\alpha\frac{AM^{7/2}}{k}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\times$$

$$\times\left[\frac{x\theta^{5/2}}{1+8\pi FM^3\alpha^2\beta\dfrac{h^2\theta^3}{\sigma^2}}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}\right]+\frac{2}{\alpha\beta}\cdot\frac{E}{M^{3/2}}\cdot\frac{1}{\theta^{3/2}x^2}\times$$

$$\times\left[\frac{\partial}{\partial x}(xh)\right]^2+\frac{c}{M^{1/2}}\cdot\frac{1}{\alpha}\sigma^2\frac{T-\theta}{\theta^{3/2}}; \qquad (1.24)$$

$$\frac{d\sigma}{d\tau}+\sigma\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(xu)=0. \qquad (1.25)$$

В уравнениях (1.21) — (1.24) появился параметр α, а в уравнениях (1.21) и (1.24) — еще параметр β, которые выражаются через характерные величины из формулы (1.20):

$$\alpha = \frac{p_0^2}{\rho_0^3 R_0}; \quad \beta = \rho_0 R_0^2. \tag{1.26}$$

Физический смысл параметров α, β, а также их комбинаций, встречающихся в уравнениях (1.21) и (1.24), ясен из следующих соотношений:

$$\alpha \sim \frac{l}{R_0}; \quad \beta \sim \frac{R_0^2}{r_л^2}; \quad (\alpha\beta)^{-1} \sim \frac{r_л}{R_0} \cdot \frac{r_л}{l}; \quad \alpha^2\beta \sim \frac{l^2}{r_л^2}. \tag{1.26'}$$

Для доказательства соотношений (1.26′) в их правые части нужно подставить известные выражения средней длины свободного пробега заряженных частиц в плазме l и ларморовского радиуса электронов $r_л$, затем выразить их через безразмерные переменные (1.20). Параметры α и β не являются безразмерными, но в уравнениях они стоят как множители в безразмерных комбинациях.

Непосредственно для комбинации $\dfrac{p_0^m}{\rho_0^n R_0^k}$, не являющейся безразмерной, возможно построить три независимых вида в соответствии с числом независимых, степеней (m, n, k). Тем не менее в рассматриваемой задаче остаются лишь две независимые комбинации α и β, потому что из трех определяющих величин размерности длины $(l, r_л, R_0)$ можно построить всего две независимые безразмерные комбинации.

Комбинация $\alpha\beta \sim \dfrac{R_0}{r_л} \cdot \dfrac{l}{r_л}$ входит в уравнения (1.21) и (1.24), определяя диффузию магнитного поля и джоулев нагрев электронов плазмы. Другая комбинация, $\alpha^2\beta \sim \dfrac{l^2}{r_л^2}$, фигурирует лишь в уравнении (1.24) в коэффициенте электронной теплопроводности. Во все остальные члены переноса и обмена энергией ионов и электронов входит только параметр $\alpha \sim \dfrac{l}{R_0}$.

Для случая дейтериевой плазмы, к которой относятся все расчеты, приведем численные значения постоянных коэффициентов в членах диссипации. Согласно соотношению (1.18), при $M = 3{,}34 \cdot 10^{-24}$ и $Z = 1$ имеем для постоянных коэффициентов в уравнениях (1.21) — (1.24):

$$\frac{AM^{7/2}}{k} = 4{,}02 \cdot 10^{-33}; \quad \frac{4}{3} BM^{5/2} = 3{,}76 \cdot 10^{-35};$$

$$\frac{C}{M^{1/2}} = 2{,}35 \cdot 10^{33}; \quad \frac{DM^{7/2}}{k} = 1{,}12 \cdot 10^{-34};$$

$$\frac{E}{M^{3/2}} = 2{,}77 \cdot 10^{24}; \quad 8\pi F M^3 = 8{,}68 \cdot 10^{-58}.$$

д) Граничные и начальные условия в общей задаче

В самом общем случае решение уравнений (1.21) — (1.25) зависит от двух параметров: α и β, помимо тривиальной зависимости от M, Z и кулоновского логарифма L. Кроме того, решение должно зависеть от других независимых параметров, появляющихся в начальных и граничных условиях задачи. Сформулируем все условия, завершив тем самым постановку задачи. В соответствии с предположением об отсутствии потерь частиц через внешнюю границу естественно рассматривать весь процесс в лагранжевых координатах. Тогда автоматически сохраняется масса газа, а граничные условия ставятся на внешней лагранжевой границе. Можно считать, что вне токовой оболочки газ слабо ионизован и нагрет до температуры в несколько электронвольт [1]. Поэтому газовое давление плазмы внутри токовой оболочки (точнее, давление в сумме с вязкими членами) уравновешивается на границе сравнительно небольшим газовым давлением внешнего газа. Практически можно пренебречь внешним газовым давлением по сравнению с пондеромоторными силами, другими словами, положить равным нулю поток импульса плазмы через внешнюю границу токовой оболочки. Согласно [23], диагональная радиальная компонента потока импульса через лагранжеву границу $r = R$ равна

$$\left(-p + \frac{4}{3}\eta_i \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2}{3}\eta_i \frac{v}{r}\right)_{r=R} = 0. \qquad (1.27)$$

Условие (1.27) служит условием свободной границы газа в цилиндрическом случае.

Для магнитного поля, если задана полная сила тока в разряде J, имеем известное граничное значение (при $r = R$)

$$H = \frac{2J}{cR}. \qquad (1.28)$$

Наконец, совсем просто сформулировать граничные условия для температур, предполагая полную теплоизоляцию пинча:

$$\varkappa_i \frac{\partial T_i}{\partial r}\bigg|_{r=R} = 0; \quad \varkappa_e \frac{\partial T_e}{\partial r}\bigg|_{r=R} = 0. \qquad (1.29)$$

Этим исчерпывается необходимый набор граничных условий на внешней лагранжевой границе $r = R(t)$. Остается добавить естественные граничные условия на оси, т. е. при $r = 0$:

$$v = 0; \quad H = 0; \quad \frac{\partial T_i}{\partial r} = \frac{\partial T_e}{\partial r} = 0. \qquad (1.30)$$

Таким образом, если задана полная сила тока $J(t)$, то граничными условиями задачи являются соотношения (1.27) — (1.30), а траектория границы $R(t)$ определяется, очевидно, из решения.

Начальные условия могут быть выбраны очень простыми: неподвижная, холодная, незамагниченная, однородная плазма конечного радиуса. Итак,

$$t = 0;\ \rho = \rho_0;\ v = 0;\ T_i = T_e = 0;\ H = 0;\ R = R_0. \quad (1.31)$$

Следует заметить, что реально в начальном состоянии нужно рассматривать также нейтральную компоненту газа. Тем не менее, когда энергия сжатой плазмы во много раз превосходит энергию диссоциации и ионизации, можно приближенно считать газ полностью ионизованным уже в начальном состоянии. Все же это приводит к осложнению второстепенного характера. В коэффициенте диффузии магнитного поля λ и в скорости обмена энергией Q, обращающихся в бесконечность при $T_e = 0$, приходится вводить эффективное ограничение величин:

при $$T_e < T_{e0} \simeq 2 \div 3\ эв$$

$$\lambda(T_e) = \lambda(T_{e0});\ Q = C\rho^2 \frac{k(T_i - T_e)}{(kT_{e0})^{3/2}}.$$

Возможно, при таком эффективном законе электропроводности весьма неточно описывается первоначальная диффузия магнитного поля, и было бы разумно для исправления задавать некоторое распределение $H(r)$ при $t = 0$. Но пока было принято простейшее условие: $H = 0$.

Легко понять, какого рода изменения нужно сделать в граничных условиях в связи с переходом к рассмотрению предельного случая бесконечно большой электропроводности. Вместо условий (1.27) и (1.28) тогда нужно поставить одно условие равновесия между газовым и магнитным давлением (это можно вывести переходом к пределу в уравнении движения):

$$p - \frac{4}{3}\eta_i \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2}{3}\eta_i \frac{v}{r} = \frac{H^2}{8\pi} = \frac{J^2}{2\pi c^2 R^2}. \quad (1.32)$$

Остальные граничные и начальные условия сохраняются. В случае конечной электропроводности равновесие потока импульса плазмы и пондеромоторной силы устанавливается в слое определенной конечной толщины, в токовой оболочке. Если предположить структуру токовой оболочки стационарной, а толщину ее — несущественной, то можно снова использовать в качестве эффективного условие (1.32). Однако эти предположения, строго говоря, не справедливы, и вопрос лучше всего разрешается непосредственным сравнением расчетов с бесконечной и конечной электропроводностью. Граничные и начальные условия в данном разделе сформулированы в размерном виде. Преобразование их к безразмерным переменным удобно делать для каждой задачи по отдельности.

§ 2. ПРЕДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ ПЛАЗМЫ И ПОСТОЯННОЙ СИЛЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

а) Переход к предельному случаю однопараметрической задачи

Было показано, что граничные условия задачи с бесконечно большой электропроводностью отличаются от общей задачи заменой двух условий (1.27) и (1.28) на одно — (1.32). Значительные упрощения для предельной задачи происходят в системе уравнений. Формальный переход сводится к условию $E = 0$. Тогда из уравнений (1.17), (1.12) и (1.16) получим условие «вмороженности» магнитных силовых линий [27]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{H}{\rho}\right) = \frac{H}{\rho}\cdot\frac{v}{r}, \tag{2.1}$$

которое для начальных условий (1.31) означает, что внутри плазмы всегда $H \equiv 0$, а отлично от нуля лишь значение на границе. В уравнении (1.15) обращается в нуль член джоулева нагрева, а в выражении $\varkappa_e$ исчезает член в знаменателе. Однако наиболее существенное следствие условия $E = 0$ проявляется в том, что один из определяющих параметров, а именно β, выпадает из уравнений. Учитывая важность предельной задачи, выпишем исходную систему уравнений при бесконечно большой электропроводности сразу в безразмерном виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma\frac{du}{d\tau} + \frac{\partial}{\partial x}[\sigma(T+Z\theta)] = \frac{4}{3}\alpha BM^{5/2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(T^{5/2}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \right.\\
&\qquad\left. + \left[T^{5/2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{x}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{u}{x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(T^{5/2})\right]\right\};\\
&\frac{3\sigma}{2}\cdot\frac{dT}{d\tau} - T\frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{4}{3}\alpha BM^{5/2}T^{5/2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \frac{u}{x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \right.\right.\\
&\left.\left. - \frac{u}{x}\right)\right] + \alpha\frac{DM^{7/2}}{k}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(xT^{5/2}\frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{c}{M^{1/2}}\cdot\frac{1}{\alpha}\sigma\cdot\frac{T-\theta}{\theta^{3/2}};\\
&\frac{3Z\sigma}{2}\cdot\frac{d\theta}{d\tau} - Z\theta\frac{d\sigma}{d\tau} = \alpha\frac{AM^{7/2}}{k}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(x\theta^{3/2}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) + \\
&\qquad + \frac{C}{M^{1/2}}\cdot\frac{1}{\alpha}\sigma^2\frac{T-\theta}{\theta^{3/2}};\\
&\frac{d\sigma}{d\tau} + \sigma\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(xu) = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Безразмерные функции решения уравнений (2.2) для дейтериевой плазмы зависят только от одного параметра α. Это заключение справедливо, если в краевом условии (1.32) не появляются другие независимые параметры. Таков прежде всего случай постоянного электрического тока $J = \text{const}$. Возможен более об-

щий случай: $J = J_0 f\left(\frac{R}{R_0}\right)$, где f — произвольная заданная функция. То же самое утверждение можно сделать в отношении более общих, нежели (1.31), начальных условий. Например, можно решать задачу с начальным распределением магнитного поля $H = H_0\varphi\left(\frac{r}{R_0}\right)$ с произвольной заданной функцией φ и $H_0 = \frac{2J_0}{cR_0}$. Но в дальнейшем ограничимся самым простым случаем постоянного электрического тока. Задача сводится к нахождению однопараметрического семейства решений уравнений (2.2). Граничные условия следуют из соотношений (1.17), (1.20), (1.26), (1.29), (1.30) и (1.32):

$$x = 0,\ u = 0,\ \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0; \tag{2.3}$$

$$x = X,\ T^{5/2}\frac{\partial T}{\partial x} = 0,\quad \theta^{5/2}\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0;$$

$$\sigma(T + Z\theta) - \frac{4}{3}BM^{5/2}\alpha T^{5/2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{u}{x}\right) = \frac{1}{X^2}. \tag{2.4}$$

В граничном условии (2.4) $X = \frac{R}{R_0}$ — безразмерная координата границы. Начальные условия этой задачи также выпишем для полноты картины

$$\tau = 0;\ \sigma = 1;\ u = 0;\ T = \theta = 0;\ X = 1. \tag{2.5}$$

Единицей давления p_0 в таком случае является величина

$$p_0 = \frac{J_0^2}{2\pi c^2 R_0^2}. \tag{2.6}$$

Параметр α выражается через J_0, ρ_0 и R_0 с помощью соотношений (1.26) и (2.6) следующим образом:

$$\alpha = \frac{1}{4\pi^2 c^4}\cdot\frac{J_0^4}{\rho_0^3 R_0^5}. \tag{2.7}$$

Большие значения параметра α соответствуют разреженной плазме, малые значения — плотной, если причиной изменения считать изменение плотности ρ_0. Этот же результат, согласно равенству (2.7), достигается соответствующим изменением двух других величин: J_0 и R_0. В этом, собственно, и состоит закон подобия рассматриваемого предельного случая бесконечно большой электропроводности и постоянной силы тока. Но не только закон подобия составляет преимущество предельной задачи. Оказывается, что интервал вариации параметра α, где имеют место существенные изменения решения, также довольно узок. Последнее обстоятельство тесно связано с результатами расчетов, которые обсуждаются ниже.

б) Обсуждение результатов решения однопараметрической задачи

Уравнения (2.2) с граничными и начальными условиями (2.3)—(2.5) решены для трех значений параметра α ($\alpha_1 = 2{,}95 \times 10^{34}$; $\alpha_2 = 5{,}9 \cdot 10^{33}$; $\alpha_3 = 1{,}47 \cdot 10^{33}$). Этот диапазон α характерен следующим. В случае $\alpha = \alpha_1$ средняя длина свободного пробега довольно велика, и весь процесс сжатия происходит плавно с почти полным выравниванием температур. При увеличении α ($\alpha > \alpha_1$) на каком-то этапе становится необоснованным гидродинамическое приближение. Но помимо этого обстоятельства ясно, как качественно будет вести себя решение. При $\alpha \to \infty$ произойдет апериодическим образом выход на известное стационарное решение с постоянными по радиусу температурами [2—5]. Случай $\alpha = \alpha_3$ характеризуется узким фронтом ударной волны, причем хорошо выделена также и отраженная ударная волна. Если параметр α уменьшать дальше ($\alpha < \alpha_3$), то многие результаты расчета с α_3 сохранятся, в частности траектория внешней границы и связанная с ней средняя плотность. Что касается значений величин и приосевой области, то естественным пределом решений при $\alpha \to 0$ становится автомодельное решение. С практической точки зрения этот узкий по времени и по радиусу участок автомодельного решения в данной задаче вряд ли представляет большой интерес. Как показывает анализ случая $\alpha = \alpha_3$, поведение величин в приосевой области в основном определяется другими факторами. Однако принципиально решение с малым ($\alpha \ll \alpha_3$), но не равным нулю α может быть получено и на стадии автомодельного решения [28]. Укажем вдобавок, что наиболее интересный экспериментальный материал примерно попадает в рассмотренный диапазон параметров α.

На рис. 1 даны траектории внешней границы для разных α. На рис. 2 изображены значения σ, T и θ при $x = 0$ в зависимости от времени. Для $\alpha = \alpha_2$ и тем более для $\alpha = \alpha_3$ видны два максимума ионной температуры. Если при $\alpha = \alpha_2$ они сравнимы по величине, то при $\alpha = \alpha_3$ первый максимум значительно превосходит второй. Первый максимум T связан с отражением от оси сходящейся ударной волны, приобретающей по мере уменьшения α с некоторого достаточно малого радиуса ярко выраженный автомодельный характер. Этот максимум температуры имеет место при сжатии в 15—20 раз и, грубо говоря, растет при $\alpha \to 0$ как $\alpha^{-0{,}237}$ *. Одновременно он становится все более узким. Второй максимум температуры возникает из-за дальнейшего сжатия плазмы в приосевой области. Отраженная ударная волна не останавливает движение плазмы к оси.

---

* В общем виде эта степень выражается через показатель автомодельности следующим образом: $T \sim \alpha^{\frac{2(1-k)}{4k-3}}$. В цилиндрическом случае $k = 1{,}226$, если показатель адиабаты $\gamma = 5/3$ (см. формулу [28]).

Плотности возрастают еще приблизительно на один порядок и начинают уменьшаться только после прихода волны разрежения от внешней границы. При достаточно малых α температура в приосевой области растет при сжатии почти по адиабатическому закону, причем пространственный размер области наибольших температур определяется теплопроводностями.

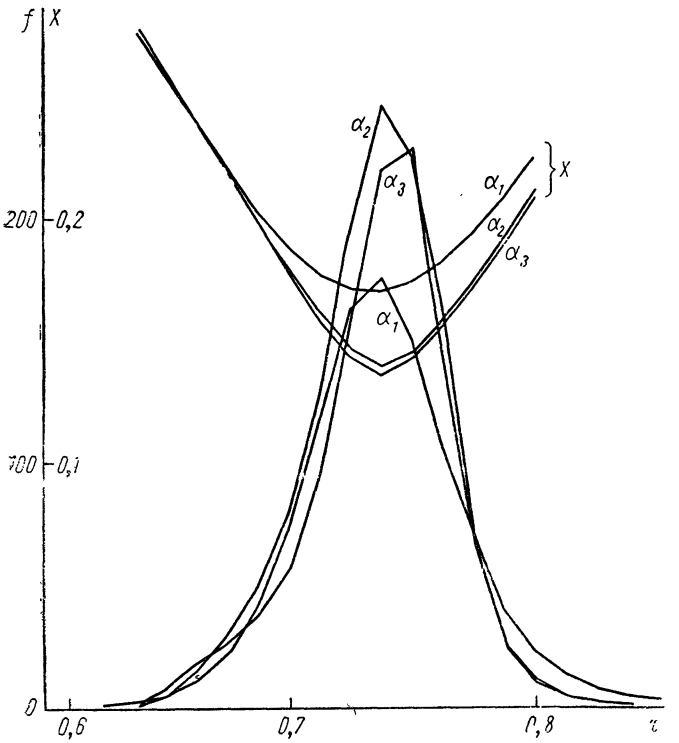


Рис. 1. Зависимость радиуса внешней границы пинча X от времени τ для трех значений параметра α (α_1, α_2, α_3) в течение интервала времени вблизи момента максимального среднего сжатия. В зависимости от времени нанесены также кривые полного выхода нейтронов для тех же значений α.

Электронная температура тоже обнаруживает тенденцию к образованию двух максимумов, но в рассматриваемом диапазоне α вместо первого максимума у θ наблюдается только излом. Обмен энергиями изменяется как α^{-1}, так что в случае α_3 обе температуры сближаются. Этот эффект задерживает рост ионной температуры при переходе от α_2 к α_3, хотя при этом плотности возрастают и теплопроводности влияют меньше. Из расчетов можно извлечь максимальные значения температур внутри области (практически они достигаются на оси) и на внешней границе

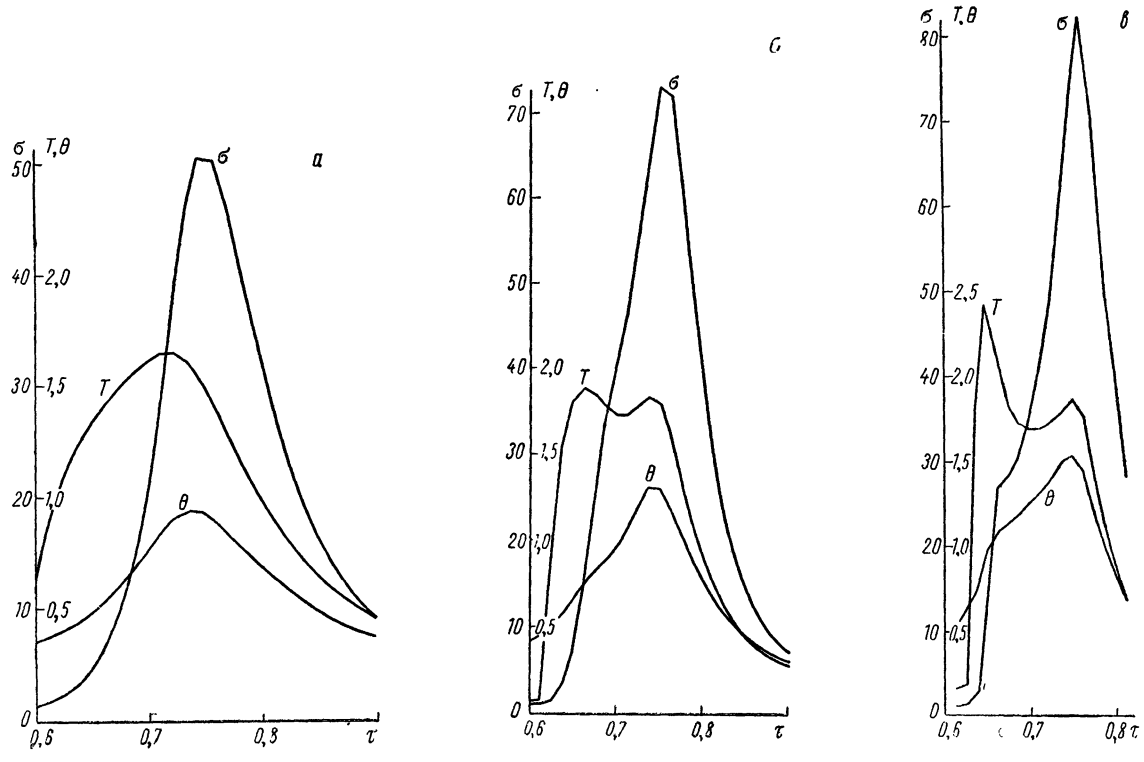


Рис 2 Зависимость величин σ, T и θ в точке $r = 0$ от времени τ.
$а$ — $q = q_1$; $б$ — $q = q_2$, $в$ — $q = q_3$.

($T_{макс}$, $T_{гр}$, $\theta_{макс}$, $\theta_{гр}$), а также аналогичные максимальные значения плотности вдобавок и средней плотности ($\sigma_{макс}$, $\sigma_{гр}$, $\bar{\sigma}_{макс}$). В табл. 1 эти величины даны для различных α. С большой степенью точности все они относятся к моменту времени достижения максимальной средней плотности. Для ионной температуры приводятся значения второго максимума.

Таблица 1*

α	σ			T		θ		F
	$\bar{\sigma}_{макс}$	$\sigma_{макс}$	$\sigma_{гр}$	$T_{макс}$	$T_{гр}$	$\theta_{макс}$	$\theta_{гр}$	
α_1	35	51	22	1,64	1,35	0,93	0,92	6,4
α_2	52	75	26	1,85	0,95	1,31	1,25	7,7
α_3	56	82	29	1,86	0,95	1,53	1,25	7,0
α_1, $D=0$	35	~40	~30	8,1	~0,6	1,06	~0,9	
$\frac{\alpha_1}{10}$, $D=0$	64	~60	~50	8,6	~0,6	2,4	~0,6	

* В нижних строчках табл. 1 со значком ~ стоят величины, снятые с графиков и определенные менее точно.

Большой интерес представляет пространственное распределение различных величин. Некоторые сведения об этом можно получить из табл. 1, из которой видно, что электронная теплопроводность только в случае α_3 недостаточна для выравнивания θ вблизи момента максимального сжатия. Ионная теплопроводность влияет на распределение T в узкой приосевой области. Между значениями T вблизи оси и на границе сохраняется существенная разница даже в случае α_1. Плотность приближается к пределу малых α, причем не только в величине $\bar{\sigma}_{макс} \simeq 60$, но и в абсолютном максимальном значении $\sigma_{макс} \simeq 85$.

На рис. 3—6 даны мгновенные профили всех величин через равноотстоящие моменты времени для $\alpha = \alpha_1$. Моменты времени указаны возле соответствующих кривых. Аналогичные профили при $\alpha = \alpha_3$ даны на рис. 7—10. Моменты времени выбраны одинаково в обоих случаях в довольно узком интервале вблизи кумуляции с $\Delta\tau = 0{,}0126$. Эти результаты, в особенности с $\alpha = \alpha_3$, можно рассматривать как пример решения нестационарной задачи о структуре фронта ударной волны в плазме. Достаточно далеко от оси, как и следовало ожидать, получается известная структура плоской стационарной ударной волны. В качестве примера даны все величины в момент $\tau = 0{,}45$ при $\alpha = \alpha_3$ (рис. 11). Небольшие количественные отличия от стационарной

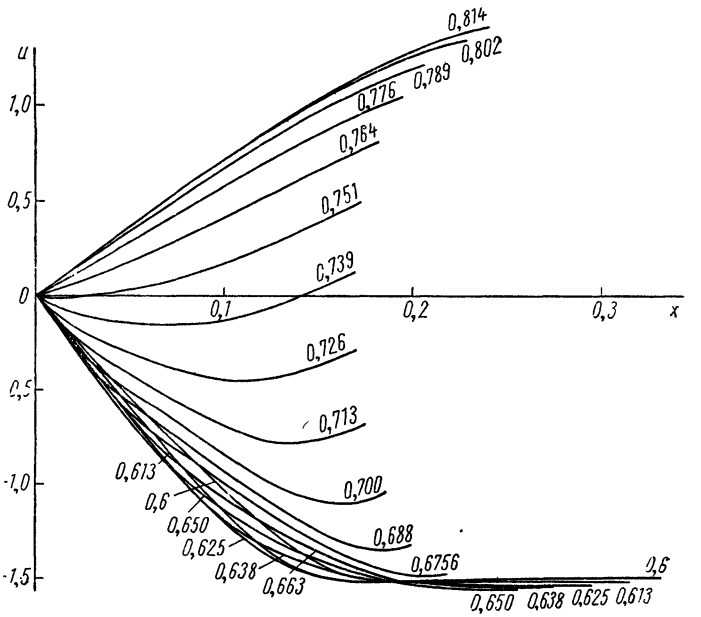


Рис. 3. Профили скорости $u(x)$ $(\alpha = \alpha_1)$.

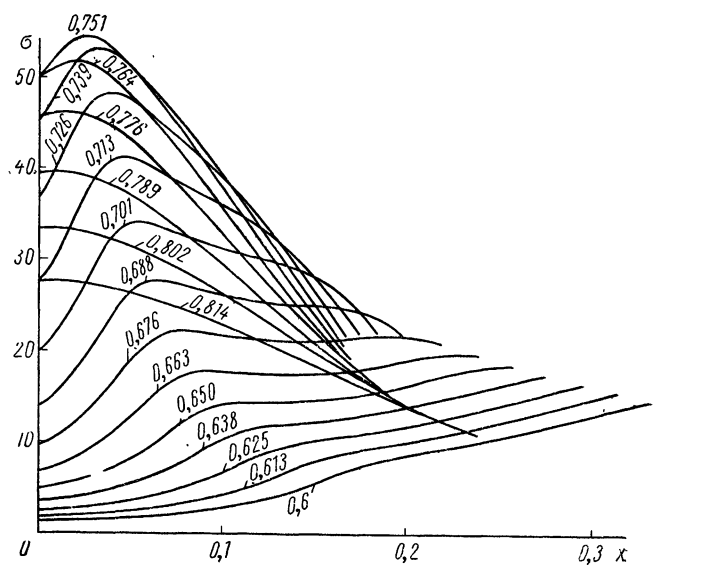


Рис. 4. Профили плотности $\sigma(x)$ $(\alpha = \alpha_1)$.

структуры связаны с эффектами ускоренного движения границы и цилиндричности (см. также работу [23]). Ширина структуры мала по сравнению с радиусом. Рис. 3—10 весьма детально показывают процесс кумуляции ударной волны на оси. Каждая из величин (u, σ, T, θ) изображена на отдельном графике, с тем чтобы представить по возможности большее число моментов времени.

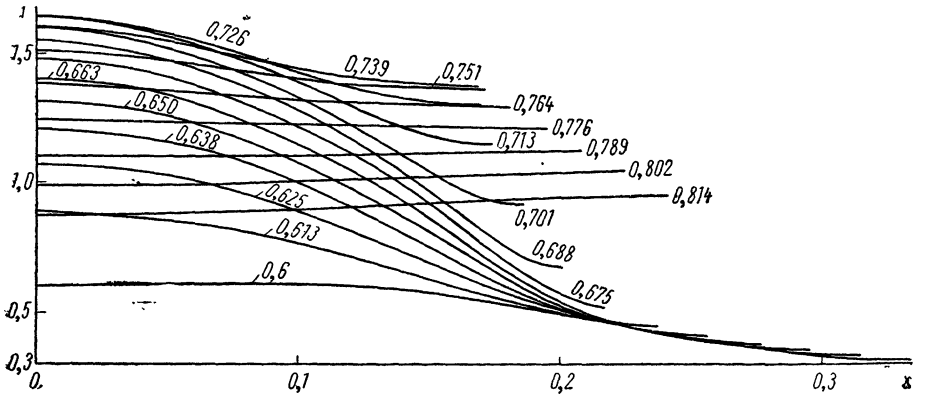


Рис. 5. Профили ионной температуры $T(x)$ ($\alpha = \alpha_1$).

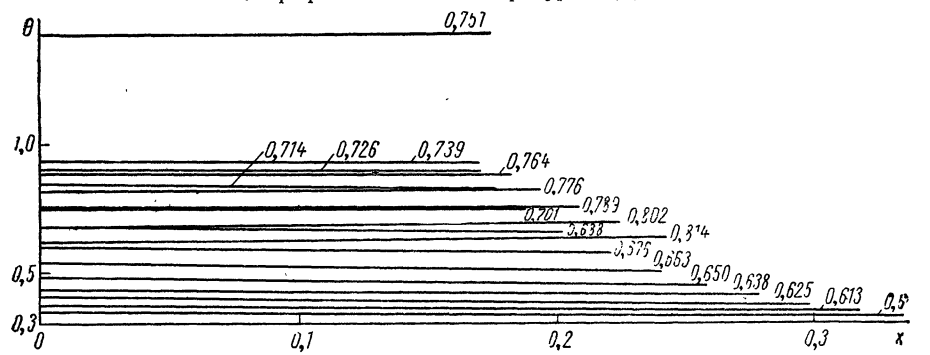


Рис. 6. Профили электронной температуры $\theta(x)$ ($\alpha = \alpha_1$).

Сделаем несколько замечаний по поводу наиболее характерных особенностей картины кумуляции. Если условно считать, что ударная волна достигает оси, когда примерно вдвое возрастает плотность, то при $\alpha = \alpha_1$ $\tau \simeq 0{,}613$, а при $\alpha = \alpha_3$ $\tau \simeq 0{,}638$, т. е. эти моменты близки. Большее различие имеется между моментами появления на оси значительной ионной температуры, не говоря уже об электронной температуре. Скорость плазмы позади ударной волны удивительно постоянна: порядка —1,5, причем при $\alpha = \alpha_3$ она лишь немного выше совсем близко от оси из-за эффекта цилиндричности (в максимуме $u = -1{,}75$ при $\tau = 0{,}625$ и

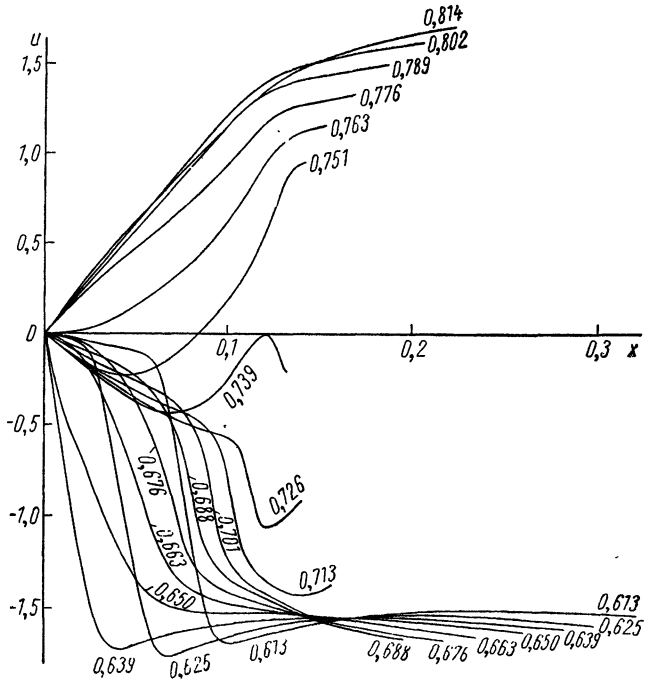


Рис. 7. Профили скорости $u(x)$ $(\alpha = \alpha_3)$.

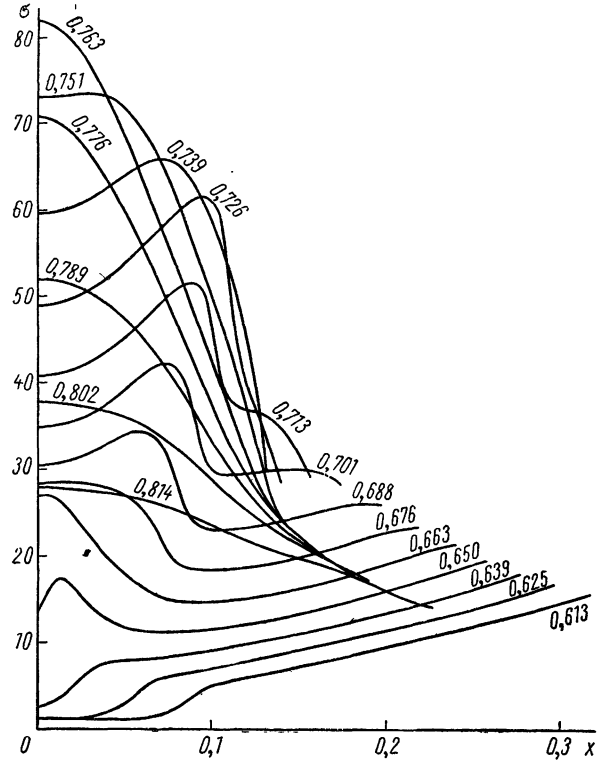


Рис. 8. Профили плотности σ (x) $(\alpha = \alpha_3)$.

$x = 0{,}07$). Соответственно с почти постоянной скоростью движется внешняя граница. Обсуждаемый выше первый максимум ионной температуры имеет ширину $\Delta x \simeq 0{,}05$ * и образуется

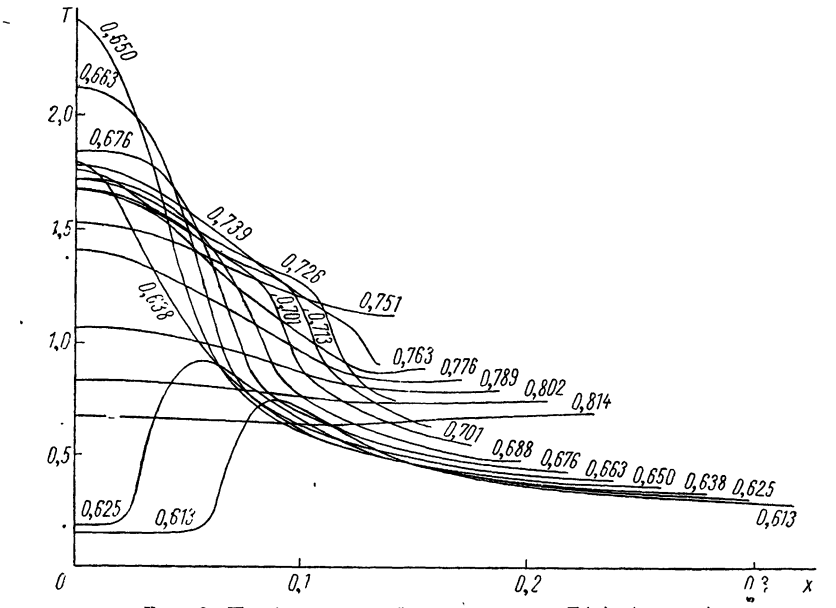


Рис. 9. Профили ионной температуры $T(x)$ ($\alpha = \alpha_3$).

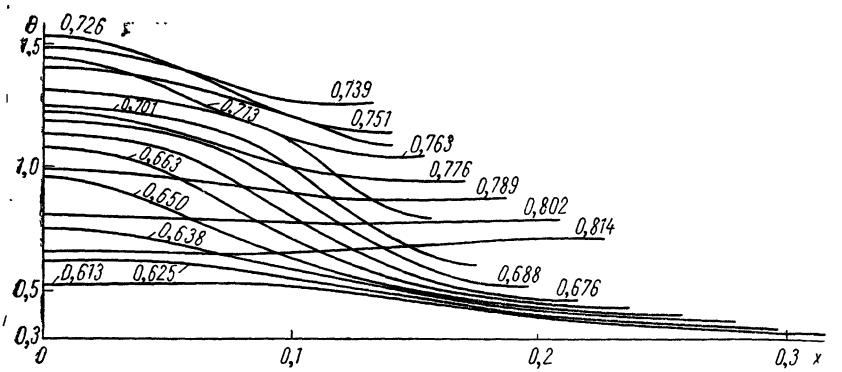


Рис. 10. Профили электронной температуры $\theta(x)$ ($\alpha = \alpha_3$).

в момент $\tau = 0{,}650$. Для обоих значений α минимальный радиус внешней границы получается примерно в один и тот же момент времени $\tau = 0{,}739$, но имеет разные величины: $x_{\text{мин}} = 0{,}170$ (α_1); $x_{\text{мин}} = 0{,}135$ (α_3). Практически в этот же момент максимального

* При указании ширины каких-либо функций вблизи оси условимся приводить радиус области (а не диаметр), где данная функция уменьшается в два раза.

среднего сжатия плазмы получается второй максимум ионной температуры при $\alpha = \alpha_3$, а единственный максимум при $\alpha = \alpha_1$ чуть-чуть сдвинут к более раннему моменту времени $\tau = 0{,}726$. Их ширина совпадает с $x_{\text{мин}}$.

Максимальная величина плотности получается несколько позже вблизи оси: при $\alpha = \alpha_1$ для $\tau = 0{,}751$; при $\alpha = \alpha_3$ для $\tau = 0{,}763$.

Интересен процесс формирования отраженной ударной волны в случае $\alpha = \alpha_3$. При $\alpha = \alpha_1$ никакого фронта отраженной волны не образуется, графики скорости имеют почти линейный вид вплоть до самого момента остановки внешней границы.

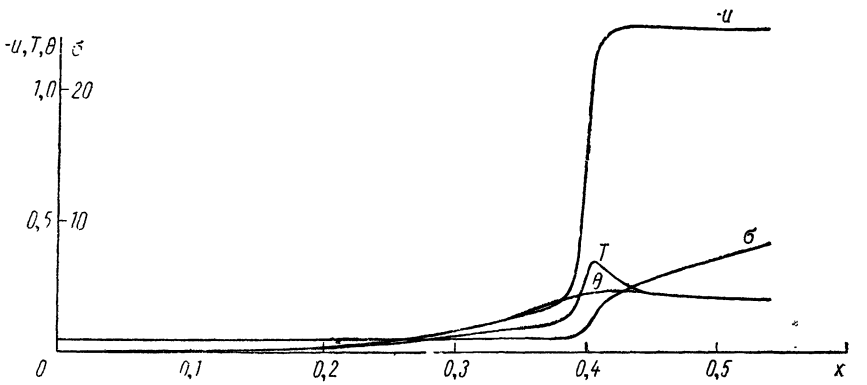


Рис. 11. Профили величин — u, T, θ, σ в функции x в момент времени $\tau = 0{,}45$ ($\alpha = \alpha_3$).

Иначе выглядит процесс торможения движения плазмы для $\alpha = \alpha_3$. Как особенно хорошо видно на графике плотности (см. рис. 8), в момент $\tau \simeq 0{,}676$ возле $x \simeq 0{,}07$ формируется фронт отраженной ударной волны. В дальнейшем он весьма медленно распространяется к границе ($\tau = 0{,}688$; $\tau = 0{,}701$; $\tau = 0{,}713$; $\tau = 0{,}726$). Плотность в нем, грубо говоря, возрастает в 1,5 раза, а полная температура — в 2 раза. За ним сохраняется довольно значительная скорость (около — 0,5), что и объясняет запаздывающий максимум плотности. Ширина фронта, если снова обратиться к рис. 8, составляет в среднем $\sim 0{,}04$, имея тенденцию сужаться по мере приближения к границе. Интересно отметить, что внешняя граница тормозится быстрее, чем внутренние слои, начиная с $\tau = 0{,}701$. Скорость разлета в обоих случаях быстро приближается к значению $u \approx +1{,}5$, температуры становятся почти постоянны, а плотность плавно спадает примерно в два раза (см. графики для момента $\tau = 0{,}814$).

Приведенные рисунки охватывают весь интервал времени в первом сжатии, когда ионная температура превышает величину 0,7. Этот интервал приблизительно равен $\Delta\tau \approx 0{,}20$. Отметим,

что эффективная скорость отраженной ударной волны довольно мала: $\frac{0,14}{0,2} \approx 0,7$, тогда как скорость сходящейся около 2,0. Малая скорость отраженной ударной волны типична. Этот эффект приводит к сохранению высоких температур и плотностей пинча в течение промежутка времени, в несколько раз большего, чем это следует из грубой оценки $\Delta\tau^* \approx \frac{x_{\text{мин}}}{u_T}$, где u_T — средняя тепловая скорость ионов. Легко получить $u_T = \sqrt{3T}$. Если даже принять $T \approx 1,5$, то $u_T \approx 2,0$, а $\Delta\tau^* \approx \frac{0,14}{2,0} \approx 0,07$.

в) Эффект ионной теплопроводности

В сходящейся ударной волне ионная теплопроводность играет второстепенную роль, лишь несколько уширяя непрерывную область вязкого скачка. Можно получить стационарное решение, если положить равной нулю ионную теплопроводность ($\varkappa_i = 0$), считать постоянной электронную температуру ($\theta = \theta_0$) и пренебречь обменом энергией ($Q = 0$). Это решение является обобщением известного результата для простого идеального газа [29]. Задача нахождения стационарного решения в системе координат, связанной с ударным фронтом, сводится к решению двух уравнений (1.4) и (1.5) в плоском случае. Решение представляется в виде одной квадратуры:

$$\int_{-\infty}^{\xi} d\xi' = \int_{1}^{\sigma} \frac{T'^{3/2} d\sigma'}{\frac{\sigma'}{\sigma_k}(\sigma'-1)(\sigma_k-\sigma') - \frac{Z\theta_0}{2}\cdot\frac{\sigma'-1}{\sigma_k-1}\sigma_k\sigma'^2\ln\sigma_k + \frac{Z\theta_0}{2}\sigma'^3\ln\sigma'}. \tag{2.8}$$

Здесь интеграл берется слева по безразмерной координате $\xi = \frac{\rho_0 D}{\eta_{0i}} x$, где D — скорость фронта, а η_{0i} — размерный множитель коэффициента ионной вязкости, равный $BM^{5/2}\left(\frac{p_0}{\rho_0}\right)^{5/2}$. В качестве характерного давления в соотношении (1.20) принимается величина $p_0 = \rho_0 D^2$. Справа в уравнении (2.8) интеграл берется по величине относительного сжатия, сила волны задается сжатием при $\xi = +\infty - \sigma = \sigma_k$. Безразмерная ионная температура T' выражается через относительное сжатие σ' с помощью формулы

$$T' = Z\theta_0\left(-1 - \frac{2}{3}\ln\sigma' + \frac{2}{3}\frac{\sigma_k}{\sigma_k-1}\ln\sigma_k - \frac{4}{15}\cdot\frac{1}{\sigma'}\cdot\frac{\sigma_k}{\sigma_k-1}\ln\sigma_k\right) + \frac{1}{\sigma'\sigma_k}\left[\frac{1}{3}\frac{\sigma_k}{\sigma'} + \frac{4}{3}\sigma' - \frac{8}{15}(\sigma_k+1)\right]. \tag{2.9}$$

Соотношения (2.8) и (2.9) использовались в процессе численного счета для контроля точности. Введение ионной теплопроводности не дает возможности получить решение типа (2.8), (2.9), но качественно ясно, что оно лишь несколько увеличивает ширину фронта *. Еще менее важна на ширине вязкого скачка роль обмена энергией.

Однако положение существенно изменяется, как только начинается нестационарный процесс отражения ударной волны от оси. Было рассчитано несколько вариантов задачи (2.2) без ионной теплопроводности, т. е. с $D = 0$. Обсудим некоторые результаты этих расчетов. Во всех вариантах максимум ионной температуры T несколько смещается от оси. Здесь наблюдается интересный эффект «запирания» центральной области. Сходящаяся ударная волна, приобретающая вначале автомодельно ускоряющийся характер, постепенно, по мере роста на ней температуры, начинает замедляться, но после некоторого момента вновь становится ускоряющейся, правда, сильно ослабленной. Эта ослабленная волна достигает оси и отражается от нее.

Внешне процесс выглядит так, как будто на некотором малом радиусе x^*, соответствующем максимуму ионной температуры, происходит распад разрыва. Ударная волна как будто наталкивается там на препятствие, отражается от него, а дальше к оси проходит уже сильно ослабленной. Этим препятствием, очевидно, является большая вязкость, образующаяся на фронте волны как следствие роста ионной температуры. Эффект запирания центральной области и связанное с ним смещение точки максимума температуры представляет в основном математический интерес, так как при учете ионной теплопроводности он практически незаметен **.

В области приосевого пика ионной температуры плотность σ не превышала 20—30, но в опоясывающей кольцевой области она достигала более высоких значений. В табл. 1 в двух нижних строчках даны некоторые результаты расчетов с $D = 0$. По максимальной средней плотности они мало отличаются от основных расчетов, но разница в ионной температуре очень велика. Ионная теплопроводность снизила температуру $T_{\text{макс}}$ больше чем в четыре раза. Одновременно с уменьшением $T_{\text{макс}}$ увеличилось $\sigma_{\text{макс}}$, так что давление осталось почти неизменным. Формально T в расчетах с $D = 0$ даже больше данных табл. 1. Пик ионной температуры долго сохраняется на стадии расширения, относительно утончаясь и одновременно увеличиваясь в максимуме. Этот острый тонкий пик T не появился, если бы была учтена ионная теплопроводность. Но при $D = 0$ его существование качественно объясняется диссипацией энергии из-за вязкости при рас-

* При числе $\text{Pr} = 4/3$ в простом идеальном газе получено стационарное решение [30], которое дает количественную оценку такого уширения.

** Описанный эффект имел место также в расчете, приведенном в работе [23].

ширении $\left(\sim T^{5/2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)$. Таким образом, на стадии расширения неучет ионной теплопроводности ведет к образованию неоднородности ионной температуры с характерной длиной, во много раз меньшей средней длины свободного пробега ионов, что, конечно, противоречиво в рамках гидродинамического приближения. В расчетах с ионной теплопроводностью это противоречие устраняется. Заметим, что электронная теплопроводность в расчетах с $D = 0$ была уменьшена в 100 раз, поэтому сравнение электронных температур не очень интересно.

г) Кумулятивное увеличение температуры

Для более четкого представления качественного отличия нестационарного процесса от стационарного режима пинча дадим сравнение максимальных ионных температур $T_{\text{макс}}$ со значением стационарной температуры при одинаковых условиях, т. е. равных J_0, ρ_0 и R_0. Напомним, что в качестве максимальных температур $T_{\text{макс}}$ будут рассматриваться величины, относящиеся ко второму максимуму. Известно [5, 11], что значение усредненной температуры равно

$$kT_{i\,\text{ст}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{J_0^2}{c^2}\cdot\frac{1}{N_0};\quad N_0 = \pi R_0^2\frac{\rho_0}{M}. \tag{2.10}$$

После перехода к безразмерным переменным (1.20) получим из равенств (2.10)

$$T_{\text{ст}} = \frac{1}{2}. \tag{2.10'}$$

Если представить расчетные результаты формулой

$$T_{\text{макс}} = \frac{1}{2}\eta, \tag{2.11}$$

введя η — коэффициент кумулятивного усиления, то, согласно данным табл. 1, найдем приближенное значение η:

$$\eta \simeq 4.$$

Для электронной температуры коэффициент усиления составляет 2—3. В первом максимуме коэффициент усиления неограниченно возрастает с уменьшением α.

д) Термоядерный выход нейтронов и пространственное распределение мягкого рентгеновского излучения

Рассмотрим следующие из расчетов данные по термоядерному выходу нейтронов и по мягкому рентгеновскому излучению. Из-за сильной зависимости скорости ядерной реакции от пара-

метров плазмы, в особенности от температуры, трудно оценить выход нейтронов иначе, чем прямым подсчетом соответствующего двойного интеграла:

$$W = 2\pi \int_0^{\infty} dt \int_0^{R(t)} rdr \langle \sigma v \rangle_{dd} \frac{1}{2} n^2. \qquad (2.12)$$

Если принять, согласно данным книги [11], что

$$\langle \sigma v \rangle_{dd} \simeq 10^{-22} \left(\frac{T^\circ \mathrm{K}}{10^7}\right)^4, \qquad (2.13)$$

и подставить выражение (2.13) в соотношение (2.12), а затем привести полученное выражение к безразмерным переменным, то получим для W

$$W = AF(\alpha), \qquad (2.14)$$

где

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} d\tau \int_0^{X(\tau)} T^4 \sigma^2 x dx;$$

$$A = 10^{-50} \frac{1}{2(2\pi)^{5/2}} \cdot \frac{M^2}{k^4 c^7} \cdot \frac{J_0^7}{\rho_0^{3/2} R_0^4}.$$

Аппроксимация (2.13) дает удовлетворительную точность в интервале температур от нескольких сот электронвольт до 10 *кэв*. Грубо говоря, ошибка может быть не больше чем вдвое. Значения функции $F(\alpha)$ приводится в последней графе табл. 1. Интересно проследить временной ход выхода нейтронов, измеряемый также экспериментально. На рис. 1 построены графики величины

$$f(\alpha, \tau) = \int_0^{X(\tau)} T^4 \sigma^2 x dx, \qquad (2.15)$$

причем $F(\alpha) = \int_0^{\infty} f(\alpha, \tau) d\tau$. На этом же рисунке нанесены траектории границ. Видно, что максимумы $f(\alpha, \tau)$ практически совпадают с минимумами $X(\tau)$, даже имея тенденцию с уменьшением α смещаться к более поздним моментам времени. Таким образом, качественно максимум выхода нейтронов совпадает с максимумом плотности в приосевой области. Ширина кривых $f(\alpha, \tau)$ довольно мала: 0,05—0,06, при этом вблизи момента выхода ударной волны на ось ($\sim 0{,}638$ при $\alpha = \alpha_3$) и первого максимума ионной температуры ($\sim 0{,}650$) величина $f(\alpha, \tau)$ еще ничтожно мала. По поводу этих результатов следует сделать два замечания. Во-первых, для $T_i \lesssim 0{,}7$ *кэв* аппроксимация (2.13) совершенно непригодна. Она сильно завышает W. Во-вторых, при малых T_i основную роль в ядерной реакции играют дейтроны с высокой энергией $\sim 6{,}25\, T_i^{-1/3}$ *кэв*. Возможна такая си-

туация: дейтроны средней тепловой энергии не смогут ускориться до таких энергий за времена сохранения высоких температур и плотностей и на характерных линейных размерах в приосевой области пинча. Динамика образования «максвелловского хвоста» путем ускорения дейтронов в соударениях рассмотрена в работе [32]. При использовании формул (2.14) и (2.15) нужно соблюдать осторожность, контролируя выполнение условий образования дейтронов эффективных энергий. Величина A, конечно, не выражается через параметр α, количественные выводы из формулы (2.14) будут сделаны ниже.

Интегральный выход мягкого рентгеновского излучения может быть оценен таким же способом, но здесь наибольший практический интерес представляет пространственное распределение (зависимость от радиуса). Поэтому ограничимся расчетом величины

$$J(x) = \int_0^\infty \sigma^2 \sqrt{\theta}\, d\tau. \qquad (2.26)$$

Для случая $\alpha = \alpha_3$ функцию $J(x)$ дана на рис. 12. Интенсивность излучения максимальна на оси, монотонно спадает с ростом x и становится вдвое меньше при $x \approx 0{,}1$. Монотонное изменение $J(x)$ оказалось совместимым со смещением максимума плотности σ от оси, которое получается для некоторых моментов времени (см. рис. 8). При необходимости по известной величине $J(x)$ легко определить, аналогично формуле (2.14), абсолютный выход мягкого рентгеновского излучения.

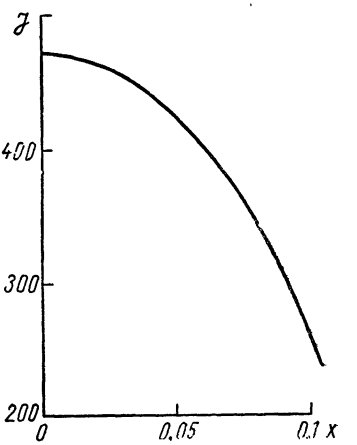


Рис. 12. Зависимость величины J, пропорциональной интегральному выходу мягкого рентгеновского излучения, от x ($\alpha = \alpha_3$)

§ 3. КОНЕЧНАЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ И ПЕРЕМЕННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК. НЕКОТОРЫЕ СРАВНЕНИЯ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

а) Учет конечной электропроводности в случае постоянного электрического тока

Как и в § 2, ограничимся в основном рассмотрением хода величин в приосевой области. Предполагая электрический ток постоянным, получим двухпараметрическую задачу. Требуется решить систему уравнений (1.21)—(1.25) с определяющими параметрами α и β и основными граничными условиями при $x = X$,

следующими из соотношений (1.27) и (1.28):

$$h = \frac{1}{X};\ \sigma(T + Z\theta) - \frac{4}{3} BM^{5/2}\alpha T^{5/2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{u}{x}\right) = 0. \quad (3.1)$$

Остальные граничные условия совпадают с прежними в соотношениях (2.3) и (2.4), добавляется только $h = 0$ при $x = 0$. Аналогично к начальным условиям (2.5) прибавляется $h = 0$.

В табл. 2 приводятся, такие же как в табл. 1, величины для $\alpha = \alpha_2$ и двух различных значений β:

$$\beta_1 = 4 \cdot 10^{-5},\ \beta_2 = 4 \cdot 10^{-7}.$$

Для удобства сравнения с предельным случаем в первой строчке табл. 2 воспроизводятся данные $\alpha = \alpha_2$ с $E = 0$.

Таблица 2

α, β	σ			T		θ		$F(\alpha, \beta)$
	$\sigma_{макс}$	$\bar{\sigma}_{макс}$	$\sigma_{гр}$	$T_{макс}$	$T_{гр}$	$\theta_{макс}$	$\theta_{гр}$	
α_2, $E = 0$	75	52	26	1,85	0,95	1,31	1,25	7,7
α_2, β_1	64	47	21,5	1,80	0,94	1,35	0,83	6,9
α_2, β_2	31	22,5	<10	1,41	0,99	1,21	1,3	3,0

Как видно из табл. 2, общие показатели пинча имеют тенденцию к уменьшению по сравнению с предельным случаем. По мере роста параметра β роль электропроводности и электронной теплопроводности падает. Самая нижняя строчка табл. 2 с точки зрения эксперимента соответствует нереальному случаю. При начальном радиусе пинча 10—20 *см* со значением $\beta = \beta_2$ плотность дейтериевого газа должна быть всего 0,01 *мм рт. ст.* При заданном $\alpha = \alpha_2$ (согласно соотношениям (1.26) и (2.6), $\alpha \sim J_0^4 R_0 \beta^{-3}$) это означает одновременно, что величина тока (J_0) в 30 раз меньше по сравнению с одним миллионом ампер. Более показательны и существенны данные второй строчки табл. 2, соответствуя реальной области параметров пинча. Здесь произошло небольшое уменьшение величин: плотностей $\sigma_{макс}$ и $\bar{\sigma}_{макс}$ на 5%, температур $T_{макс}$, $T_{гр}$ и $\theta_{макс}$ на 2—3%. Наиболее заметные изменения произошли со значением $\theta_{гр}$, которое из-за эффекта снижения электронной теплопроводности уменьшилось в 1,5 раза. Однако это уменьшение произошло в узкой области вблизи границы, составляющей по ширине меньше 10% радиуса во все моменты времени.

Отметим, что в случае $\beta = \beta_2$ компенсирующую роль сыграл эффект джоулева нагрева, и электронная температура непосредственно возле границы становится даже выше температуры в приосевой области. Если двигаться от границы по направлению к оси, то θ проходит через минимум $\sim 1{,}1$, а далее быстро выходит на свое приосевое значение $\sim 1{,}2$. Такой ход температуры типичен в случае $\beta = \beta_2$. Но в варианте $\beta = \beta_1$ джоулев нагрев не настолько велик, чтобы превзойти по своему эффекту кумулятивный процесс на оси; так что электронная температура не имеет джоулева максимума на границе.

Граничное значение плотности $\sigma_{гр}$ также уменьшилось, но следует иметь в виду, что в численном счете $\sigma_{гр}$ получается завышенным, так как оно относится к последней точке, лежащей внутри области, а градиент плотности около границы велик. С другой стороны, при условии (3.1) граничная плотность не обязана обращаться точно в нуль из-за наличия там членов вязкости. Функция выхода нейтронов $F(\alpha, \beta)$ очень мало изменилась в случае $\beta = \beta_1$, что в какой-то мере показывает сохранение временной картины процесса.

Таким образом, учет конечной электропроводности не привел к существенным уменьшениям температур и плотности в приосевой области, когда значения параметра β выбирались на основе реальных условий эксперимента ($\beta = \beta_1$). Но даже при $\beta = \beta_2$ эти изменения не столь уж велики. Структура скин-слоя, в самых грубых чертах определенная в этих расчетах, более детально рассматривается ниже без предположения о постоянстве силы тока.

б) Общий случай переменного электрического тока с конечным значением электропроводности

С математической точки зрения данная задача отличается от предыдущей только граничным условием для магнитного поля. Вместо первого условия (3.1) в этом общем случае, очевидно, имеем

$$h = \frac{1}{X}\varphi(\tau). \tag{3.2}$$

Функцию $\varphi(\tau)$ разумно определить как некоторую аппроксимацию типичных экспериментальных осциллограмм тока. Примем

$$\varphi(\tau) = a\tau(1 - b\tau), \tag{3.3}$$

где a, b — постоянные произвольные числа. В качестве примера был сделан расчет случая

$$J = 4{,}8 \cdot 10^6 \frac{t}{t_1}\left(1 - \frac{t}{t_1}\right)a, \quad t_1 = 6 \cdot 10^{-6}\ сек;$$

$\rho_0 = 2{,}4 \cdot 10^{-7}\ г/см^3$ (2 *мм рт. ст.* давления атомарного дейтерия); $R_0 = 15\ см$.

Выбрав единицей электрического тока $J_0 = 1{,}34 \cdot 10^6$ *а*, определим параметры α и β, a и b: $\alpha = 7{,}80 \cdot 10^{32}$; $\beta = 5{,}4 \cdot 10^{-5}$; $a = 1{,}23$; $b = 0{,}345$.

Единицами времени и температур становятся: $t_0 = 2{,}07 \times 10^{-6}$ *сек*; $\frac{M}{k} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} = 111$ *эв*.

Как уже указывалось, учет переменности электрического тока наиболее существен в описании процессов вблизи границы. В начальной стадии процесса ток практически линейно возрастает со временем. Прежде всего интересно рассмотреть две стороны явления:

а) каким образом формируется сильная ударная волна и каков закон движения внешней границы;

б) до какой глубины проникает магнитное поле в плазму и какие характерные особенности имеет структура скин-слоя.

Ответ на эти вопросы можно дать в виде серии графиков, относящихся к последовательным равноотстоящим моментам времени (рис. 13).

На рис. 13 даны профили всех величин для четырех моментов времени ($\tau = 0{,}2$; 0,4; 0,6; 0,8). В левом верхнем углу рис. 13 изображены вспомогательные графики $u_{гр}$ и толщины скин-слоя Δx в зависимости от времени τ*. Токовая оболочка начинает двигаться внутрь в момент времени $\tau = 0{,}25$. До этого граница даже немного перемещается наружу. В этот момент $\varphi = 0{,}31$, а в размерных единицах $J \approx 0{,}41 \cdot 10^6$ *а* и $t = 0{,}5$ *мксек*. В работе [13] показано, что непрозрачность токовой оболочки для нейтральных атомов дейтерия наступает раньше. При $\dot{J} = 8 \cdot 10^{11}$ *а/сек*, согласно работе [13], критический ток $J_2 = 0{,}12 \cdot 10^6$ *а* и $t \approx 0{,}18$ *мксек*. Существенно отметить, что в этом случае при расчете проводимости плазмы пренебрегают взаимодействием электронов с ионами и, наоборот, учитывают их взаимодействие с нейтральными атомами. Поскольку температура при $\tau < 0{,}2$ меньше 2 *эв*, это приближение соответствует данным условиям. Таким образом, в более поздний момент $t \gtrsim 0{,}5$ *мксек* токовая оболочка заведомо увлекает имеющийся нейтральный газ.

Само по себе первоначальное движение внешней границы токовой оболочки наружу, по-видимому, не имеет принципиального значения. Оно связано в значительной мере со способом аппроксимации проводимости плазмы при низких температурах. Например, если бы при $T_e < 2$ *эв* проводимость задавалась в виде линейной функции температуры с условием $\sigma = 0$ при $T_e = 0$ [вместо использованной выше аппроксимации $\sigma = \sigma$ ($T_e = 2$ *эв*) при $T_e < 2$ *эв*], то магнитное поле проникло бы существенно глубже внутрь плазмы. Джоулев нагрев поверхностного слоя умень-

* Толщиной скин-слоя условно считается расстояние от границы до той точки, где напряженность магнитного поля уменьшается в е раз.

шился бы, газовое давление было бы по этой причине меньше. Поэтому небольшое движение наружу, обнаруженное в этих расчетах, при таком изменении аппроксимации проводимости может совсем не возникнуть. Граница быстро ускоряется, но в момент $\tau \simeq 0{,}3$ ускорение довольно резко уменьшается. По всей вероятности уменьшение ускорения связано с формированием

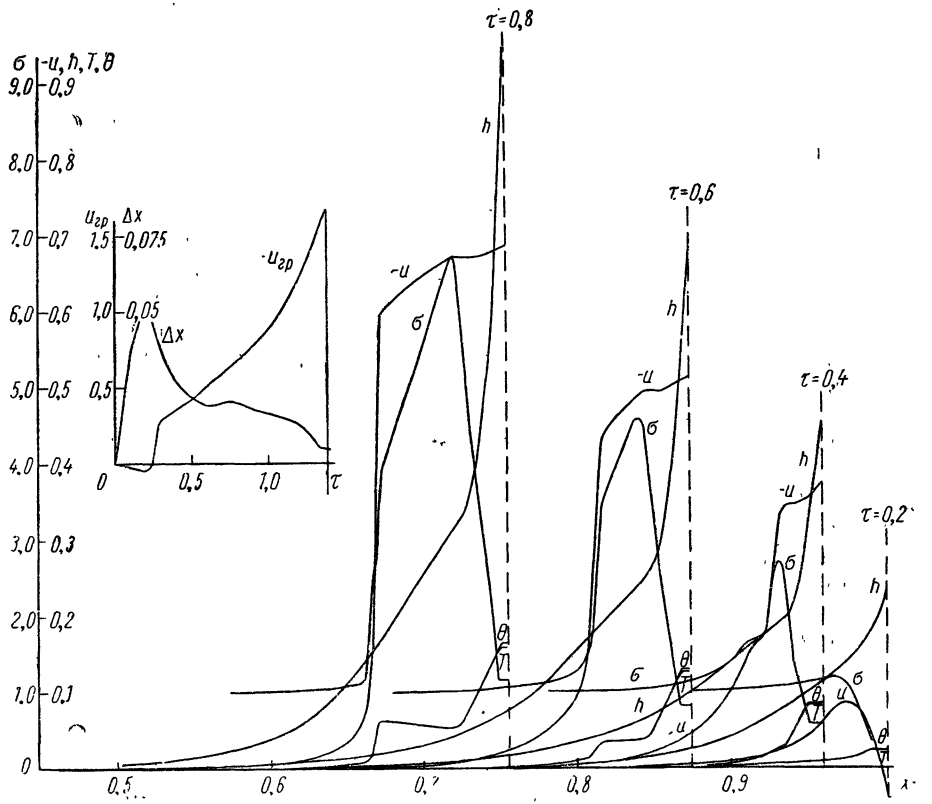


Рис. 13. Последовательность профилей величин h, $-u$, σ, T и θ.

Граничное условие: $h = \frac{\varphi(\tau)}{X}$, $\varphi(\tau) = 1{,}23\,\tau\,(1 - 0{,}345\,\tau)$. Параметры $\alpha = 7{,}8 \cdot 10^{32}$, $\beta = 5{,}4 \cdot 10^{-5}$.

Вертикальные пунктирные линии подчеркивают положение внешней границы в каждый момент времени.

ударной волны. На рис. 13 для $\tau = 0{,}4$ видно, что ударный фронт формируется как бы «изнутри» области. В момент $\tau = 0{,}6$ ударный фронт уже почти перегнал адиабатически сжимающуюся плазму, а в момент $\tau = 0{,}8$ никакого заметного движения перед фронтом не остается и видна только сильная ударная волна. Окончательное формирование ударной волны произошло на радиусе $x \simeq 0{,}65$ в момент $\tau = 0{,}8$. В течение всего процесса формирования волны ускорение границы остается практически по-

стоянным, но в дальнейшем увеличивается вплоть до момента выхода отраженной ударной волны на границу.

Вся начальная стадия процесса, изображенная на рис. 13, происходит при низких, почти равных друг другу температурах. Здесь прежде всего следует описать способ вычисления коэффициентов теплопроводности. Если T_i или T_e оказывались меньше 2 *эв*, то коэффициенты теплопроводности становились практически постоянными и равными своему значению при 2 *эв*. В безразмерных единицах соответствующие T и θ равны $1{,}8 \cdot 10^{-2}$. Как раз такова максимальная температура в момент $\tau = 0{,}2$. На ударном фронте в $\tau = 0{,}8$ обе температуры достигают всего 6 *эв*, а в токовой оболочке, где действует механизм джоулева нагрева, температура поднимается до 16 *эв*.

В коэффициент вязкости плазмы аналогично коэффициентам теплопроводности тоже вводится аддитивная постоянная, но ее величина соответствует большей температуре, около 14 *эв*. Это связано со счетным эффектом: ширина ударного фронта не должна быть меньше пространственного шага. Как видно на рис. 13, фронт занимает 2—3 точки. При меньшей аддитивной постоянной в коэффициенте вязкости точность численного счета становится плохой, на профилях величин образуются «пилы». Чтобы закончить рассмотрение первого вопроса, поставленного в начале данного раздела, сделаем небольшое замечание о ходе плотности. Для последнего момента времени $\tau = 0{,}8$ плотность за фронтом путем адиабатического сжатия возрастает с $\sigma \simeq 4$ сразу за фронтом до $\sigma \simeq 7$. Этот максимум плотности в дальнейшем продолжает увеличиваться и в конечном счете приводит к бо́льшим максимальным сжатиям при кумуляции, чем в предельном случае § 2.

Глубина проникновения магнитного поля в плазме определяется проводимостью. Как уже указывалось в п. д § 2, минимальная величина проводимости определялась так, чтобы соответствующее значение электронной температуры $T_{e0} = 2$ *эв*. В данном расчете $\theta_0^{3/2} = 0{,}0024$. Это же значение фигурировало в величине Q. При $\theta < \theta_0$ проводимость полагалась постоянной. В момент $\tau = 0{,}2$ магнитное поле практически распространяется в глубь плазмы при постоянной проводимости. В момент $\tau = 0{,}4$ проводимость плазмы вблизи границы вы́росла в восемь раз, и становится заметно запирание магнитного поля в слое повышенной температуры.

Еще более заметен перегиб h в последующие моменты времени. Этот перегиб приходится на точку максимума плотности. Справа от этой точки магнитное поле существенно уменьшает электронную теплопроводность, а слева — практически не влияет. Но данный эффект почти не проявляется, так как даже без воздействия магнитного поля величина электронной теплопроводности очень мала по причине низких температур. Качественную

характеристику глубины проникновения магнитного поля в течение всего процесса дает вспомогательный график $\Delta x(\tau)$. Толщина скин-слоя Δx достигает максимума в ранние моменты времени вблизи $\tau = 0{,}4$, а потом в основном уменьшается, сохраняя одно и то же относительное значение около 5% радиуса внешней границы.

Качественно процессы в приосевой области оказались похожими на те, что происходили в предельном случае и подробно описаны в § 2. Тем не менее данный расчет показал, что кумуляция заметно усилилась. Момент кумуляции, соответствующий удвоению плотности и ионной температуре $T \simeq 0{,}7$ на оси, равен 1,308. Через $\Delta\tau = 0{,}15$ температура снова становится равной 0,7, т. е. условное время существования высоких температур уменьшилось по сравнению с предельным случаем в 1,3 раза. В этот интервал времени максимальная плотность достигает ~ 150, а ионная температура $\sim 1{,}9$. (Электронная температура во втором максимуме мало отличается от ионной и равна $\sim 1{,}75$.) Максимальное сжатие наступает при $\tau = 1{,}40$, а максимальная плотность, максимальные температуры и скорость выхода нейтронов достигаются позже, при $\tau = 1{,}42$. В табл. 3 даны максимальные величины, аналогично табл. 1 и 2. Для сравнения также приведены значения предельного случая с $\alpha = \alpha_3$ и расчеты данной задачи с другими начальными радиусами $R_0 = 10$ и $R_0 = 20$.

Таблица 3

α, β, R_0	σ			T		θ		$F(\alpha, \beta)$
	$\sigma_{\text{макс}}$	$\bar{\sigma}_{\text{макс}}$	$\sigma_{\text{гр}}$	$T_{\text{макс}}$	$T_{\text{гр}}$	$\theta_{\text{макс}}$	$\theta_{\text{гр}}$	
α_3 ($E = 0$, $\varphi = 1$)	82	56	29	1,86	0,95	1,53	1,25	7,0
$\alpha = 5{,}9 \cdot 10^{33}$ $\beta = 2{,}4 \cdot 10^{-5}$; $R_0 = 10$	150	115	34	1,35	0,51	1,15	0,57	3,0
$\alpha = 7{,}8 \cdot 10^{32}$; $\beta = 5{,}4 \cdot 10^{-5}$; $R_0 = 15$	144	110	37	1,92	1,10	1,76	1,11	6,8
$\alpha = 1{,}86 \cdot 10^{32}$; $\beta = 9{,}55 \cdot 10^{-5}$; $R_0 = 20$	67	47	9	1,55	0,82	1,53	0,84	2,0

При сравнении данных табл. 3 следует иметь в виду, что, согласно равенству (3.3), $\varphi_{\text{макс}} = 0{,}89$, т. е. электрический ток даже в максимуме меньше постоянного единичного электрического тока из предельного случая. В случае $R_0 = 10$ кумуляция происходит раньше максимума тока; в случае $R_0 = 15$ приблизительно совпадает с максимумом; для $R_0 = 20$ существенно запаздывает. Как видно из табл. 3, соотношение момента кумуляции и момента максимума тока весьма существенно отражается

на величинах, в особенности бросается в глаза ослабление эффектов кумуляции в случае наибольшего начального радиуса $R_0 = 20$. При этом значении R_0 максимальные параметры плазмы достигаются, когда электрический ток уже спадает на 20% от максимальной величины.

Таким образом, данные расчеты показали, что учет переменного характера электрического тока, точнее, его возрастания от нуля до максимальной величины, приводит к усилению кумулятивного эффекта. Напомним, что учет конечной проводимости (п. а § 3), наоборот, обусловил ослабление кумуляции. Грубо говоря, отрицательное влияние конечной проводимости компенсируется благоприятным эффектом постепенного нарастания электрического тока. Благодаря этому обстоятельству возрастает роль рассмотренного раньше предельного случая.

В заключение полезно указать на некоторые свойства подобия обсуждаемых расчетов. Это позволяет использовать полученные результаты при ином наборе параметров. В частности, можно определить такой набор параметров, чтобы максимальная температура в размерных единицах достигала любого, наперед заданного значения. Формула (3.3) останется неизменной, если сохранить отношение t_0/t_1, уравнения останутся теми же самыми при условии сохранения параметров α и β. Если обозначить изменение параметров R_0, J_0, ρ_0 и t_1 через те же буквы без индексов, то получим при помощи соотношений (1.20), (1.26), (2.6) три условия неизменности задачи:

$$\frac{R^2\sqrt{\rho}}{Jt} = 1; \frac{J^4}{\rho^3 R^5} = 1; \quad \rho R^2 = 1. \tag{3.4}$$

К уравнениям (3.4) можно добавить еще одно произвольное соотношение, в частности условие изменения единицы температуры в ε раз. Тогда относительные изменения всех параметров однозначно выразятся через заданное число ε. Таким образом,

$$\frac{J^2}{R^2\rho} = \varepsilon. \tag{3.5}$$

Найдем решение системы (3.4) и (3.5):

$$J = \varepsilon^{1/2}; \quad \rho = \varepsilon^4; \quad R = \varepsilon^{-2}; \quad t = \varepsilon^{-5/2}. \tag{3.6}$$

Например, в варианте $R_0 = 15$ *см*, чтобы получить максимальную ионную температуру 2 *кэв* вместо 210 *эв*, нужно задать $\varepsilon = 9{,}5$. Тогда, согласно (3.6), получим набор параметров: $J_0 = 4{,}1 \cdot 10^6$ *а*; $\rho_0 = 2{,}3 \cdot 10^{-3}$ *г/см*^{3}; $R_0 = 0{,}17$ *см*; $t_1 = 1{,}1 \cdot 10^{-8}$ *сек*.

Очевидно, что это практически недостижимый набор параметров в первую очередь из-за маленького характерного времени для тока.

Учитывая слабую зависимость результатов от параметра α, пока он достаточно мал, можно сформулировать более мягкие

условия. При этом требуется задавать t и вычислять изменение α наряду с другими параметрами. Тогда получим, аналогично предыдущему,

$$J = \varepsilon^{1/2}; \qquad \rho = \varepsilon^{-1} t^{-2}; \; R = \varepsilon^{1/2} t; \; \alpha' = \varepsilon^{5/2} t. \tag{3.7}$$

При уменьшении характерного времени тока в 10 раз ($t_1 = 6 \times \times 10^{-7}$ *сек*) из равенств (3.7) получим для $\varepsilon = 9{,}5$; $J_0 = 4{,}1 \cdot 10^5$ *а*; $\rho_0 = 3{,}0 \cdot 10^{-6}$ *г/см*^{3}; $R_0 = 4{,}6$ *см*; $\alpha = 2{,}2 \cdot 10^{34}$. Полученное значение α еще меньше α_1, рассмотренного в предельном случае. По-видимому, последний набор параметров более реален, хотя и эти требования представляются очень жесткими.

в) Некоторые сравнения с экспериментальными результатами

Детальное сравнение результатов теоретических расчетов пинч-эффекта, изложенных в предыдущих разделах этой работы будет сделано позднее. Однако представляется уместным провести предварительное качественное сравнение, позволяющее сделать некоторые общие выводы. На рис. 14 изображена зависимость момента минимального значения радиуса внешней границы от начального радиуса токовой оболочки R_0. Там же для удобства нанесена заданная в расчете кривая электрического тока $J(t)$. Экспериментально измеренное время минимального радиуса токовой оболочки заключено в пределах 3,0÷4,0 *мксек* (ближе к верхнему пределу).

Из рис. 14 следует, что наиболее подходящим является радиус $R_0 \simeq 20$ *см*. Он находится в разумном согласии с радиусом внутреннего электрода $R_э = 24$ *см*. Таким образом, характерное время процесса сжатия находится в хорошем согласии с расчетом. Впрочем, эта величина неплохо объяснялась и в приближенных теориях. Имеется также неплохое согласие в максимальных значениях плотности, превышающих примерно на два порядка начальную плотность дейтериевого газа. Однако сравнение расчетных и экспериментально измеренных температур обнаруживает резкую разницу. Измеренная максимальная электронная температура по крайней мере в пять раз превышает соответствующую расчетную величину. На рис. 14 построены кривые максимальных температур.

В конце предыдущего раздела было показано при помощи метода подобия, насколько сильно нужно изменить параметры разряда, чтобы расчетным образом получить подобные высокие температуры плазмы. Заметим, что стационарная температура в данных экспериментальных условиях составляет всего несколько десятков электронвольт. Разрешить обнаруженное резкое противоречие экспериментальных данных и результатов теоретических расчетов в рамках одномерной цилиндрически симметричной картины пинча, по-видимому, невозможно. Остается предположить, что важную роль играют неодномерные эффекты.

Эксперимент свидетельствует, что по оси пинча наблюдается заметная неоднородность, больше того, вблизи анода имеется фокус.

Таким образом, неоднородность в осевом направлении является экспериментально установленным фактом. Легко представить себе, что в осевом направлении, в основном в сторону катода, происходит движение плазмы. В области фокуса уменьшается погонное число частиц, токовая оболочка «прорывается» ближе к оси. При сохранении в ней полного измеряемого тока такое приближение оболочки к оси приводит к выигрышу в величине магнитного поля и, следовательно, в величине давления на оставшуюся плазму. В данном случае не имеет особого смысла связывать появление этого фокуса с развитием неустойчивости, точнее говоря, с неустойчивостью типа «перетяжек». Выяснение причин неоднородности пинча само по себе, конечно, важно, но, имея теперь в распоряжении теорию одномерного пинча, разумно принять образование фокуса как экспериментальный факт и попытаться дальше, по возможности непротиворечиво, объяснить всю совокупность измеренных параметров плазмы в приосевой области. Насколько удается осуществить эту программу, будет видно из дальнейшего.

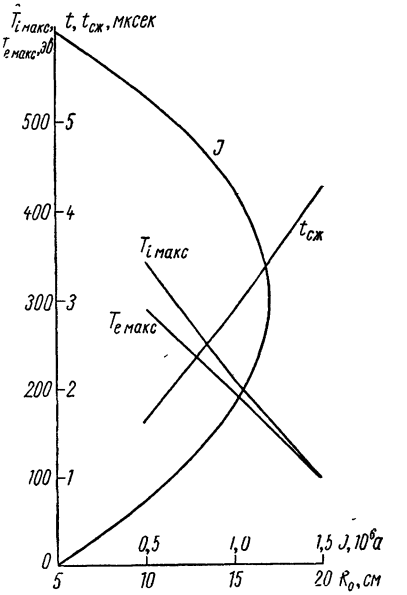


Рис. 14. Зависимость максимальных значений температур плазмы $T_{i\,макс}$, $T_{e\,макс}$ и $t_{сж}$ от начального радиуса R_0. Плотность плазмы и сила тока во всех случаях одинаковы ($\rho_0 = 2{,}4 \times \times 10^{-7}$ г/см^3).

Сделаем дополнительно важное предположение, что начиная с некоторого достаточно малого радиуса выход плазмы в осевом направлении не приводит к значительному отличию от кумуляции цилиндрического типа. На этот счет имеется экспериментальное указание: размер неоднородности в осевом направлении во многих случаях оказывается ~ 1 см, что примерно на порядок превышает характерный размер рентгеновских снимков пинча в радиальном направлении. Далее, естественно заимствовать из опыта какую-нибудь надежно измеренную величину и при заданных значениях тока J_0 и плотности ρ_0 определить остальные параметры плазмы, в том числе эффективный началь-

ный радиус R_0'. Для описания этой короткой последней стадии пинч-эффекта разумно полагать постоянным электрический ток и использовать результаты предельного случая. В качестве определяющей величины, вероятно, лучше всего задать некоторую среднюю радиальную скорость токовой оболочки, заключенную в пределах $(2 \div 3) \cdot 10^7$ *см/сек*. Измерения относятся к последней стадии пинча, усреднение производится на радиусе 4 *см*. Для определенности примем в дальнейшем $v = 2{,}5 \cdot 10^7$ *см/сек*. Следует отметить, что усредняемая величина скорости изменяется в весьма узких пределах. С другой стороны, как уже отмечалось в § 2, расчетное значение скорости практически постоянно как во времени, так и по радиусу во всей области позади ударного фронта. Отмеченные обстоятельства обосновывают выбор скорости в качестве исходной величины для дальнейшего сравнения теории с экспериментом. Итак, положим, согласно п. б § 2, безразмерную скорость $u = -1{,}5$, и приравняем ее с помощью выражений (1.20) экспериментальной скорости v:

$$v_0 = \sqrt{\frac{H_0}{8\pi\rho_0}} = \frac{0{,}1}{(2\pi\rho_0)^{1/2}} \cdot \frac{J_0}{R_0'} = \frac{v}{1{,}5}.$$

Отсюда находим

$$R_0' = \frac{0{,}15}{v} \cdot \frac{J_0}{(2\pi\rho_0)^{1/2}}. \qquad (3.8)$$

Полагая

$v = 2{,}5 \cdot 10^7$ *см/сек*; $\rho_0 = 2{,}4 \cdot 10^{-7}$ *г/см*^{3}; $J_0 = 1{,}2 \cdot 10^6$ *а*, получаем из равенства (3.8) $R_0' = 6$ *см*. Немедленно можно определить максимальную температуру плазмы в приосевой области. Воспользуемся данными табл. 1 и формулами (1.20) с $T_{\text{макс}} = 1{,}64$:

$$(kT_i)_{\text{макс}} = \frac{10^7}{1{,}6} M \frac{J_0^2}{2\pi\rho_0 R_0'^2} 1{,}64 = 1{,}31 \text{ кэв}.$$

Для электронной температуры аналогично имеем, приняв $\theta_{\text{макс}} = 0{,}93$:

$$(kT_e)_{\text{макс}} = 0{,}75 \text{ кэв}.$$

При этом использовались данные табл. 1 с $\alpha = \alpha_1$. Определим для обоснования этого выбора параметр α по равенству (2.7), $\alpha = 4{,}9 \cdot 10^{34}$, т. е. он совсем немного превышает α_1. Наконец, определим единицу времени:

$$t_0 = \frac{R_0'^2 (2\pi\rho_0)^{1/2}}{0{,}1 J_0} = 0{,}37 \text{ мксек}.$$

Время сохранения высоких параметров, согласно п. б § 2, составляет в безразмерных единицах 0,2, т. е. в данном случае $\Delta t =$

$= 0{,}075$ *мксек*, а минимальный радиус токовой оболочки $\Delta r_{\text{мин}} = 0{,}17 \cdot 6 \approx 1$ *см*.

Таким образом, высокие температуры в приосевой области вполне соответствуют экспериментальным данным о скорости движения границ. Однако размер области получается завышенным, а время сохранения и сжатие — заниженным. Но при изложенном эффективном способе описания неодномерного процесса трудно было бы ожидать лучшего согласия опыта и теории.

Приведем для полноты картины общее количество нейтронов, согласно формулам (2.14) и табл. 1: $W \simeq 10^8$ при длине пинча порядка 1—2 *см*.

На опыте количество нейтронов существенно больше, по крайней мере на порядок. Выход нейтронов почти изотропен. Но их источник, по-видимому, обладает заметной фазовой скоростью в направлении вероятного выброса массы *. Это хорошо объясняет наблюдаемую анизотропию в спектре нейтронов. Такое истолкование особенностей нейтронного выхода предложено в работе [1] под названием «модели движущегося котла». Значительное расхождение расчетных и наблюдаемых величин нейтронного импульса, конечно, не является неожиданным.

Из формулы (2.14) видно, что W очень чувствительно к параметрам системы. При низких температурах порядка 1 *кэв* выход нейтронов, кроме того, сильно зависит от деталей спектра дейтронов. К этому можно еще прибавить, что важный двумерный процесс выброса массы учтен только эффективным образом. С учетом указанных обстоятельств, как нам кажется, можно даже, наоборот, говорить об удовлетворительном согласии величины W с наблюдаемым нейтронным импульсом. Выше было указано, что теоретическое время сохранения высоких параметров плазмы в приосевой области оказывается заниженным по сравнению с соответствующим экспериментальным временем. Особенно отчетливо это отражается на времени выхода нейтронов. Расчетное время выхода нейтронов (см. рис. 1) составляет $t_{\text{н}}^{\text{т}} = 0{,}37 \cdot 0{,}05 = 0{,}02$ *мксек*, что на порядок меньше измеренного времени $t_{\text{н}}^{\text{э}} = 0{,}2$ *мксек*.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По существу роль заключения данной работы может играть последний раздел § 3, где проводится общее сравнение теоретических расчетов и экспериментальных данных в опытах Н. В. Филиппова и др. [1]. Однако наиболее важные выводы из этого сравнения целесообразно перечислить отдельно.

1. Сжатие, оставаясь цилиндрически симметричным, может привести к температурам плазмы около 1 *кэв* только путем вы-

* Эта скорость в принципе может отличаться от скорости плазмы в источнике, так как последний может представлять собой, например, фокус конической кумуляции ударной волны. Поэтому она названа в тексте фазовой скоростью.

броса значительной доли вещества. Оставшаяся масса плазмы оценивается в $\lesssim 10\%$ первоначально захваченной внутри токовой оболочки.

2. На основе одномерных теоретических расчетов, где, естественно, невозможно получить объяснение наблюдающихся неодномерных эффектов, к сожалению, трудно дать существенные рекомендации для выбора в эксперименте оптимального режима. В связи с этим отметим, что имеются такие экспериментальные указания о деталях фокусировки, которые по всей вероятности несовместимы с цилиндрически симметричной картиной даже с эффективным учетом выброса плазмы.

3. Когда экспериментально пинч имеет цилиндрически симметричную структуру на всем расстоянии от анода до катода (это происходит при достаточно больших производных тока), теоретические расчеты хорошо согласуются с опытом. Но здесь этот анализ не приводится из-за малой практической ценности низкотемпературных сжатий (с температурой порядка 0,1 *кэв*).

Авторы выражают искреннюю благодарность В. В. Палейчик, которая провела всю работу по численному решению задачи на вычислительной машине.

ЛИТЕРАТУРА

1а. Филиппов Н. В., Филиппова Т. И., Виноградов В. П. Nucl. Fusion. Suppl., part II (1962);
б. Филиппов Н. В., Филиппова Т. И. Доклад на 2-й Международной конференции по управляемым термоядерным реакциям Калэм (Англия), CN 21/250, 1965.
2. Bennett W. Phys. Rev., **45**, 890 (1934).
3. Tonks L. Phys. Rev., **56**, 360 (1939).
4. Blackman M. Proc. Phys. Soc, B. **64**, 1039 (1951).
5. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. М., ГИИЛ. 1956.
6. Курчатов И. В. «Атомная энергия», **3**, 65 (1956).
7. Арцимович Л. А. и др. «Атомная энергия», **3**, 76 (1956).
8. Безбатченко А. Л. и др. «Атомная энергия», **5**, 26 (1956).
9. Cousins S. W., Ware A. A. Proc. Phys. Soc. **B,64**, 159 (1951).
10. Леонтович М. А., Осовец С. М. «Атомная энергия», **3**, 81 (1956).
11. Арцимович Л. А. Управляемые термоядерные реакции. М., Физматгиз, 1961.
12. Розенблют М. Магнитная гидродинамика (материалы симпозиума). М., Атомиздат (1958).
13. Брагинский С. И., Мигдал А. Б. В сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Т. II. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 20.
14. Брагинский С. И., Гельфанд И. М., Федоренко Р. П. В сб «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Т. IV. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 201.
15. Арцимович Л. А. и др. «Атомная энергия», **3**, 84 (1956).
16. Зельдович Я. Б. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **32**, 1126 (1957).
17. Шафранов В. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.), **32**, 1453 (1957).
18. Имшенник В. С. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **42**, 236 (1962).
19. Имшенник В. С. «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», **2**, 206 (1962).
20. Jukes J. D. J. Fluid. Mech., **3**, 275 (1957).

21. Liepmann H. W. et al. Phys. of Fluids, 5, 11 (1962).
22. Брагинский С. И. В сб. «Вопросы теории плазмы». Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 1. М., Госатомиздат, 1963, стр. 183.
23. Дьяченко В. Ф., Имшенник В. С. «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 3, 915 (1963).
24. Имшенник В. С. «Астрон. ж.», 38, 652 (1961).
25. Чэпмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
26. Ландау Л. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 7, 203, 1937.
27. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М, ГИТТЛ, 1957.
28. Дьяченко В. Ф., Имшенник В. С. «Прикл. механ. и матем.», 29, 993 (1965).
29. Ламб Г. Гидродинамика. М., Гостехиздат, 1947.
30. Morduchow M., Libby P. A. J. Aeron. Sci., **16**, 674 (1949).
31. Коган В. И. В сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Т. II. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 109.
32. Кудрявцев В. С. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 34, 1558 (1958).

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ БАЛАНС И ВОПРОС О ВОЗМОЖНОСТИ САМОПОДДЕРЖИВАЮЩЕЙСЯ ТЕРМОЯДЕРНОЙ РЕАКЦИИ В ЛОВУШКЕ С МАГНИТНЫМИ ПРОБКАМИ

Д. В. Сивухин

1. К вопросу о возможности самоподдерживающейся термоядерной реакции в той или иной ловушке можно подходить с различных точек зрения. Прежде всего надо рассмотреть энергетический баланс. Необходимое условие того, чтобы ловушка могла служить термоядерным реактором, заключается в следующем. Энергия, получающаяся в результате термоядерных реакций, должна с избытком компенсировать затраты энергии из других источников, идущие на получение горячей плазмы и поддержание в ней высокой температуры. Затем необходимо исследовать плазму на ее устойчивость. Оба вопроса неотделимы один от другого. Раздельное рассмотрение их делается только для упрощения математической трактовки. Но даже такое рассмотрение может при определенных условиях дать ответ на основной вопрос о возможности самоподдерживающейся термоядерной реакции.

В самом деле, неустойчивости, развивающиеся в плазме, могут только неблагоприятно сказаться на энергетическом балансе. Оптимальным условиям энергетического баланса соответствует спокойная плазма. Если окажется, что энергетический баланс в спокойной плазме не удовлетворяет основному требованию, сформулированному выше, то вопрос об использовании ловушки в качестве термоядерного реактора решается отрицательно. Вот почему на первом этапе исследования можно отвлечься от вопросов устойчивости и ограничиться рассмотрением энергетического баланса в спокойной плазме. Это и делается в настоящей работе.

Ранее автором было высказано сомнение относительно возможности получения самоподдерживающейся термоядерной реакции в ловушках с магнитными пробками [1]. Однако приведенная им аргументация вызвала справедливые возражения. Условие (18.38) работы [1] является чрезмерно жестким и не необходимым. Поэтому в американском издании упомянутой работы

[2] соответствующее место опущено и заменено подробным рассмотрением энергетического баланса. Из этого издания и взят основной материал для настоящей статьи. Использована также статья автора [3], помещенная в журнале «Атомная энергия».

В ловушках с магнитными пробками всегда существует утечка частиц из-за кулоновских столкновений. Когда в результате столкновения направление скорости частицы попадает внутрь «конуса ухода», частица перестает удерживаться магнитным полем и уходит из ловушки. Скорость ухода частиц можно уменьшить, увеличивая пробочное отношение. Однако практически пробочное отношение не может быть сделано очень большим. Трудно построить ловушку с пробочным отношением, превышающим примерно 10. Между тем скорость ухода частиц через магнитные пробки слабо зависит от величины пробочного отношения, так что увеличение его мало сказывается на уходе частиц из-за кулоновских столкновений.

Учтем потери частиц только из-за кулоновских столкновений и оставим без внимания все прочие механизмы, также приводящие к потерям частиц. При таком одностороннем подходе можно претендовать на получение только необходимых условий осуществления самоподдерживающейся термоядерной реакции, но отнюдь не достаточных.

Основной вопрос, который должен быть решен при такой узкой постановке, сводится к вычислению среднего времени удержания иона в ловушке, а также к нахождению скоростного спектра ионов в ловушке, т. е. к определению их распределения по скоростям. Оба вопроса в настоящее время еще не решены с достаточной строгостью и общностью. Это обстоятельство вносит некоторый элемент неуверенности в окончательные выводы относительно принципиальной возможности или невозможности самоподдерживающейся термоядерной реакции в ловушке с магнитными пробками, которые делаются на основе рассмотрения энергетического баланса. При решении таких вопросов можно исходить из кинетического уравнения в форме Ландау. Оно достаточно обоснованно для состояний плазмы, не слишком далеких от равновесных. Для сильно неравновесных состояний, осуществляющихся в ловушках с магнитными пробками, применимость уравнения Ландау можно подвергнуть сомнению. Но если даже отвлечься от этого обстоятельства и считать уравнение Ландау применимым к плазме внутри ловушки, то задача математически все же настолько сложна, что не приходится рассчитывать на ее строгое решение.

2. Г. И. Будкер [4] первый пытался дать количественный ответ на вопрос о времени удержания. Он воспользовался кинетическим уравнением Ландау и, введя ряд упрощающих предположений, получил простую приближенную формулу для времени удержания. Формула Будкера была позднее выведена автором в статье [1] другим, более простым способом. Этот способ более

отчетливо выявляет упрощающие предположения, лежащие в основе вывода формулы Будкера. Они состоят в следующем:

а) предполагается, что уход частиц обусловлен только кулоновскими столкновениями, в результате которых меняются направления их движения. Все прочие факторы, влияющие на уход частиц, не учитываются. В частности, не принимается во внимание уход частиц на боковые стенки камеры из-за диффузии поперек магнитного поля. Не учитывается также влияние электрического поля пространственных зарядов, возникающих в ловушке из-за различия скоростей ухода ионов и электронов, пока в ней не установилось стационарное состояние;

б) плазма предполагается состоящей только из электронов и одинаковых ионов. Учитывается рассеяние ионов только на ионах. Рассеяние ионов на электронах идет приблизительно в $\sqrt{\frac{m_i}{m_e}\cdot\frac{T_e}{T_i}}$ раз медленнее и не принимается во внимание;

в) ловушка предполагается достаточно длинной, так что почти на всем протяжении ее магнитное поле можно считать однородным, за исключением магнитных пробок, где оно быстро возрастает;

г) влияние ядерных реакции на скорость ухода частиц не учитывается. Это допустимо при небольших значениях коэффициентов выгорания, что обычно имеет место. Пренебрегать таким влиянием тем более допустимо, что при ядерных реакциях образуются быстрые ионы, которые слабо рассеиваются сами и мало влияют на рассеяние других ионов;

д) имеются источники ионов, инжектирующие в ловушку новые ионы взамен ушедших через магнитные пробки. Скоростной спектр источников подбирается так, чтобы в ловушке все время поддерживалось стационарное состояние с квазимаксвелловским распределением скоростей. Так мы называем распределение, характеризующееся функцией распределения $\Theta(\vartheta)\exp\left(-\frac{mv^2}{2T}\right)$, где величина $\Theta(\vartheta)$ зависит только от угла ϑ между осью ловушки и направлением скорости частицы. Внутри конуса ухода и на его поверхности функция $\Theta(\vartheta)$ обращается в нуль. Медленные ионы быстрее уходят из ловушки. Поэтому источники должны поставлять относительно больше медленных ионов, чем их имеется при максвелловском распределении скоростей;

е) задача решается в диффузионном приближении, в котором истинные коэффициенты диффузии в пространстве скоростей и коэффициент динамического трения аппроксимируются их значениями при максвелловском распределении. Для применимости диффузионного приближения необходимо, чтобы пробочное отношение R было велико $(\ln R \gg 1)$.

Из этих упрощающих предположений наиболее существенны предположение д и связанное с ним предложение е. Влияние

этих упрощающих предположений на окончательный результат трудно оценить. Формула Будкера пригодна лишь для приближенной оценки времени удержания и не является точной. Для целей настоящей статьи ее удобно записать в виде

$$\tau_{уд} = 1{,}81\bar{\tau}_i\lambda(R), \tag{1}$$

где $\bar{\tau}_i$ — среднее ионное время релаксации:

$$\bar{\tau}_i = \frac{3\sqrt{3m_i}}{8\pi nLe^4} T_i^{3/2}. \tag{2}$$

Здесь m_i — масса иона; n — концентрация плазмы, т. е. число ионов одного знака в единице объема; e — заряд электрона; L — кулоновский логарифм; T_i — температура ионов (в эргах). Функция $\lambda(R)$ зависит от способа инжекции ионов в ловушку. Наиболее благоприятна инжекция, перпендикулярная к магнитному полю, при которой время удержания максимальное. Для этого случая, по Будкеру, функция $\lambda(R)$ может быть аппроксимирована выражением $\lambda(R) = \lg R$. Хотя такая аппроксимация получена для больших значений R, она приближенно справедлива при любых R, так как в предельном случае, когда $R = 1$, указанная аппроксимация приводит к правильному результату $\tau_{уд} = 0$. В дальнейших расчетах оставим функцию $\lambda(R)$ неопределенной и только для получения окончательных численных результатов будем пользоваться аппроксимацией $\lambda = \lg R$. Целесообразность этого оправдывается следующими соображениями. Уход ионов обусловлен в основном их рассеянием на ионах. Поэтому можно ожидать, что более точная теория также должна приводить к пропорциональности между временами $\tau_{уд}$ и $\bar{\tau}_i$, т. е. к формуле вида (1). Она должна только уточнить вид функции $\lambda(R)$. В принципе функция $\lambda(R)$ может зависеть не только от пробочного отношения R, но и от других параметров, характеризующих отклонения распределения скоростей ионов от квазимаксвелловского.

Время удержания определяется выражением $\tau_{уд} = \frac{n}{N_{уход}}$, где $N_{уход}$ — число ионов, ежесекундно уходящих из единицы объема ловушки. В стационарном состоянии при отсутствии ядерных реакций $N_{уход}$ равно числу ионов $N_{инж}$, ежесекундно инжектируемых в единицу объема ловушки. В этом случае

$$\tau_{уд} = \frac{n}{N_{инж}}. \tag{3}$$

Мы будем пользоваться последним выражением и при наличии ядерных реакций. Это допустимо, во-первых, потому, что рассматриваются только системы с малыми коэффициентами выгорания. Во-вторых, быстрые ионы, образующиеся в ядерных реак-

циях, слабо рассеиваются сами и мало влияют на рассеяние других ионов. В-третьих, замена выражения $\tau_{уд} = \frac{n}{N_{уход}}$ выражением (3) допустима ввиду оценочного характера формулы Будкера.

К этим результатам добавим еще один вывод, который может рассматриваться как продолжение § 18 работы автора [1]. Сохраним все обозначения, принятые в этой работе.

Поскольку из ловушки уходят преимущественно медленные ионы, следует ожидать, что средняя энергия уходящего иона будет меньше средней энергии $\frac{3}{2}T$ иона в ловушке. Вычислим среднюю энергию уходящего иона. Так как рассматривается стационарный процесс, то средняя энергия ионов, поставляемых источником, равна средней энергии уходящих ионов. Поэтому средняя энергия $\bar{\mathcal{E}}$ уходящего иона найдется по формуле

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{4\pi C \cos\vartheta_0}{N} \int_0^\infty \frac{p^2}{2m} D_\perp(p)\, e^{-\frac{p^2}{2mT}} dp.$$

Вычисление сводится к замене интеграла, входящего в формулу (18.20) работы [1], на интеграл

$$J = \int_0^\infty x \left[\Phi(x) - \frac{\Phi_1(x)}{2x^2}\right] e^{-x^2} dx =$$

$$= \int_0^\infty \left[x\Phi(x) - \frac{\Phi(x) - x\frac{d\Phi}{dx}}{2x}\right] e^{-x^2} dx.$$

Интегрированием по частям легко получить

$$\int_0^\infty x\Phi(x)\, e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2} d\Phi = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Поэтому

$$J = \int_0^\infty e^{-x^2} d\Phi - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2}+1)\right].$$

Таким образом, получим

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2}+1)}{3\ln(\sqrt{2}+1) - \sqrt{2}} T \simeq 0{,}43T. \qquad (4)$$

Этот результат принадлежит Будкеру.

3. Вопрос о времени удержания теоретически рассматривался также Джаддом, Макдональдом и Розенблютом [5]. Их вычисле-

ния также основываются на кинетическом уравнении Ландау или, как они предпочитают говорить, на уравнении Больцмана или Фоккера — Планка. Основное отличие от Будкера состоит в том, что не делается предположения о квазимаксвелловском распределении скоростей. Кроме того, время удержания находится из решения нестационарной задачи без источников частиц. Авторы приводят следующее выражение для времени удержания:

$$\tau_{\text{уд}} \simeq \frac{3}{4} \cdot \frac{m^2}{\pi n L e^4 \left\langle \frac{1}{v} \right\rangle \left\langle \frac{1}{v^2} \right\rangle} f(R). \qquad (5)$$

Здесь $\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle$ и $\left\langle \frac{1}{v^2} \right\rangle$ — суть средние обратных значений скорости v и ее квадрата, а $f(R)$ — некоторая функция пробочного отношения, о вычислении которой будет сказано ниже. Вывод формулы (5) обладает не меньшим принципиальным недостатком, что и вывод формулы Будкера. Он основан на произвольном допущении, что интеграл $\int |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| F(\mathbf{v}')\, d\mathbf{v}'$, где $F(\mathbf{v}')$ — функция распределения ионов по скоростям, зависит только от длины вектора скорости $\mathbf{v}$, но не зависит от угла ϑ, который он образует с осью ловушки. Это допущение эквивалентно отбрасыванию некоторых членов кинетического уравнения, в результате чего оно переходит в уравнение с разделяющимися переменными. Такое допущение не обосновывается достаточно убедительными математическими или физическими соображениями и является слабым пунктом при выводе формулы (5). Тем не менее не лишено интереса привести результаты Джадда, Макдональда и Розенблюта и сравнить их с результатами Будкера.

Если принять допущение о независимости интеграла $\int |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| F(\mathbf{v}')\, d\mathbf{v}'$ от угла ϑ и ввести в качестве независимой переменной величину $x = \cos\vartheta$, то для углового множителя в функции распределения получим дифференциальное уравнение Лежандра

$$(1 - x^2) \frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\Theta = -\frac{1}{f}\Theta, \qquad (6)$$

где $\frac{1}{f}$ — постоянная разделения. Она входит в формулу (5) для времени удержания. В частном случае, когда $\frac{1}{f} = \nu(\nu + 1)$, где ν — целое число, решения уравнения (6) хорошо изучены. Линейно независимыми решениями в этом случае являются функции Лежандра первого рода $P_\nu(x)$ и второго рода $Q_\nu(x)$ [6]. Целесообразно поэтому рассмотреть частные решения $\Theta = P_\nu(x)$ и $\Theta = Q_\nu(x)$, чтобы на них получить общее представление о величине $f(R)$. Такие решения мы будем называть лежандровыми.

Некоторые из функций Лежандра графически изображены на рис. 1 и 2 [6]. Применительно к нашей задаче решения $P_\nu(x)$ и $Q_\nu(x)$ следует оборвать в точке $x = x_1$, где они первый раз обра-

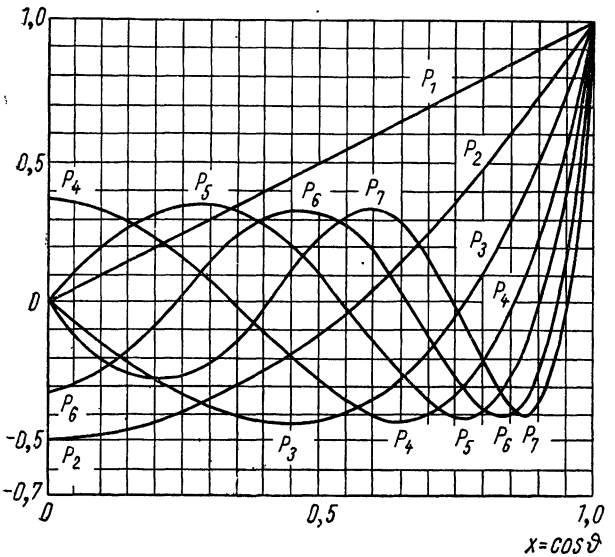


Рис. 1. Функции Лежандра 1-го рода $P_\nu(x)$.

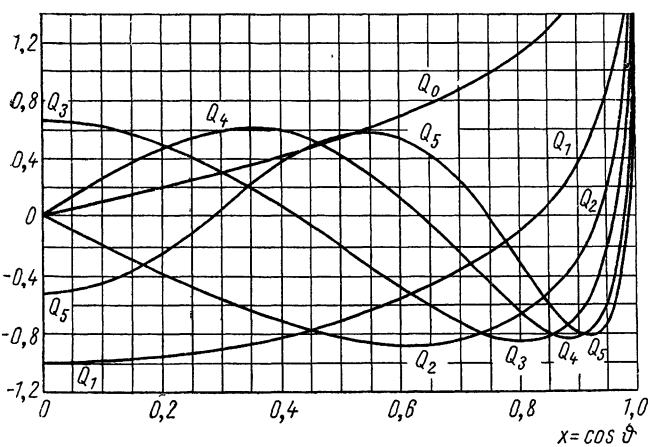


Рис. 2. Функции Лежандра 2-го рода $Q_\nu(x)$.

щаются в нуль. Корню $x = x_1$ соответствует граница конуса ухода, так что при $x > x_1$ следует положить $\Theta(x) = 0$. Если в интервале $0 < x < x_1$ функция Лежандра отрицательна, то у нее надо изменить знак. Кроме того, из физических соображений ясно, что

при всяком разумном способе инжекции функция $\Theta(\vartheta)$ должна иметь максимум при $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ (т. е. при $x = 0$). Поэтому следует отобрать только такие лежандровы решения, которые не обращаются в нуль при $x = 0$. Этому условию удовлетворяют функции $P_\nu(x)$ только с четными индексами (за исключением функции $P_0(x) \equiv 1$) и функция $Q_\nu(x)$ только с нечетными индексами.

Значением корня $x = x_1$ однозначно определяется величина пробочного отношения. Действительно, если ввести угол ϑ_1, определяемый условием $\cos\vartheta_1 = x_1$, то

$$R = \frac{1}{\sin^2\vartheta_1} = \frac{1}{1 - x_1^2}.$$

Таким образом, получается дискретный ряд значений пробочного отношения R, для которых легко вычислить величину $f(R)$ по формуле

$$f(R) = \frac{1}{\nu(\nu+1)}.$$

В табл. 1 приведены некоторые лежандровы решения с соответствующими им значениями величин R и $f(R)$.

Из таблицы видно, что для всех лежандровых решений с максимумом при $x = 0$ функция $f(R)$ хорошо аппроксимируется выражением

$$f(R) = \log_{10} R \equiv \lg R. \qquad (7)$$

Такая аппроксимация, разумеется, годится не для всех решений уравнения (6). Рассмотрим, например, решение

$$\Theta(x) = P_1(x) - Q_1(x) = x - \frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + 1,$$

получающееся линейной комбинацией лежандровых решений с индексом $\nu = 1$. Для этого решения $f = \frac{1}{\nu(\nu+1)} = 0{,}5$. Первый корень функции $\Theta(x)$ равен $x_1 = 0{,}968$. Ему соответствует $R = \frac{1}{1-x_1^2} = 15{,}9$; $\lg R = 1{,}20$. Последняя величина значительно отличается от 0,5. Однако приведенный пример не соответствует никакой реальной инжекции: функция $\Theta(x)$ обращается в минимум при $x = 0$; кроме того, она очень круто спадает на границе конуса ухода.

Этот пример тем не менее наглядно показывает, что ни о какой универсальной зависимости величины $f(R)$ от пробочного отношения R не может быть речи. Величина $f(R)$ сама зависит от вида функции $\Theta(x)$. Последняя же определяется способом инжекции ионов в ловушку. Однако из графиков на рис. 1 и 2 можно сделать правдоподобное заключение, что лежандровы решения

Таблица 1

Лежандровы решения 1-го и 2-го рода

ν	$\Theta(x)$	x_1	$R=\frac{1}{1-x_1^2}$	$f=\frac{1}{\nu(\nu+1)}$	$\lg R$
1	$-Q_1(x)$	0,833	3,27	0,5	0,514
2	$-P_2(x)$	0,577	1,50	0,167	0,176
3	$Q_3(x)$	0,430	1,23	0,0833	0,0899
4	$P_4(x)$	0,340	1,13	0,0500	0,0531
5	$-Q_5(x)$	0,2805	1,086	0,0333	0,0358
6	$-P_6(x)$	0,239	1,060	0,0283	0,0253

с максимумом при $x = 0$ не могут сильно отличаться от решений, соответствующих реальным условиям инжекции. Если это так, то аппроксимация (7) приближенно справедлива и в том случае, когда величина $f(R)$ уже не может быть представлена выражением $f=\frac{1}{\nu(\nu+1)}$. Требуется только, чтобы функция $\Theta(x)$ плавно и монотонно убывала от максимума при $x = 0$ до нуля на границе конуса ухода. Таковы основания, по которым в работе [5] функция $f(R)$ приближенно аппроксимируется выражением (7).

В случае квазимаксвелловского распределения формула (5) переходит в формулу (1) с $\lambda = 0{,}8 \lg R$. Таким образом, формула (5) дает несколько меньшие значения для времени удержания, чем формула (1). Этого и следовало ожидать, так как при выводе формулы (1) предполагалось, что инжекция производится перпендикулярно к оси ловушки. Ввиду этого функция $\Theta(\vartheta)$ более резко спадает к нулю на границе конуса ухода, чем соответствующие лежандровы решения. Для моноэнергетического спектра частиц формула (5) также переходит в формулу (1), но с $\lambda(R) = 3{,}3 \lg R$. При этом под температурой T_i следует понимать величину $T_i=\frac{2}{3}\mathcal{E}_i$, где $\mathcal{E}_i$ — кинетическая энергия иона.

Для средней энергии уходящего иона в работе [5] получена формула

$$\bar{\mathcal{E}}=\frac{m}{2}\cdot\frac{1}{\left\langle\frac{1}{v^2}\right\rangle}. \tag{8}$$

В случае максвелловского распределения скоростей она переходит в

$$\bar{\mathcal{E}}=\frac{1}{2}T, \tag{9}$$

что незначительно отличается от результата (4).

Работа Джадда, Макдональда и Розенблюта легла в основу всех расчетов, в которых время удержания и скоростной спектр ионов находились численным интегрированием соответствующих дифференциальных уравнений. Однако эти расчеты также основаны на далеко идущих упрощающих предположениях и математически не всегда корректны. В большинстве из них искусственно вводятся такие упрощения кинетического уравнения, чтобы оно допускало решения с разделяющимися переменными. Наиболее подробные данные о результатах численных расчетов содержатся в обширном отчете Робертса и Карра [7].

Во всех дальнейших расчетах используется формула Будкера в форме (1), причем в большинстве случаев множитель $\lambda(R)$ остается неопределенным.

4. Перейдем теперь к рассмотрению ловушки как термоядерного реактора. В термоядерном реакторе могут представлять интерес следующие реакции:

1) $D + D \rightarrow He^3 + n + 3{,}25$ *Мэв*;

2) $D + D \rightarrow T + p + 4$;

3) $T + D \rightarrow He^4 + n + 17{,}6$;

4) $He^3 + D \rightarrow He^4 + p + 18.3$.

Скорости этих термоядерных реакций вычислялись неоднократно. Наиболее полные данные опубликованы в работе Б. Н. Козлова [8], в которой приведены результаты вычислений величины $\langle\sigma u\rangle$, где σ — сечение реакции, а u — относительная скорость реагирующих ионов; угловые скобки означают усреднение по максвелловскому распределению скоростей. Эти величины зависят только от температуры. Вычисления производились на электронно-счетной машине с использованием всех имевшихся экспериментальных данных о сечениях реакций. К сожалению, Козлов в своей работе не приводит таблицу значений $\langle\sigma u\rangle$. Результаты вычислений представлены им в виде эмпирических формул с соответствующими поправочными множителями к ним. Точность полученных результатов, оцениваемая самим автором, составляет 2,5% для реакций 1, 2, 3 и 15% для реакции 4.

В табл. 2 приведены соответствующие данные, полученные мною с помощью эмпирических формул Козлова. Индексы 1, 2, 3 обозначают дейтерий, тритий и He^3 соответственно. Величины $\langle\sigma u\rangle_{11p}$ и $\langle\sigma v\rangle_{11n}$ относятся соответственно к протонной и нейтронной ветвям реакции DD. Величина $\langle\sigma u\rangle_{11} = \langle\sigma u\rangle_{11p} + \langle\sigma u\rangle_{11n}$ относится к реакции DD в целом. Этими данными мы и будем пользоваться при рассмотрении энергетического баланса.

Для сравнения в табл. 3 и 4 приведены значения $\langle\sigma u\rangle_{11}$ и $\langle\sigma u\rangle_{12}$, по Робертсу и Карру [7]. Для реакции DD эти значения несколько выше значений, полученных по эмпирическим формулам Козлова. Однако это не может играть роли, поскольку ос-

Таблица 2

Скорости термоядерных реакций (значения величины $\langle \sigma u \rangle$ в $см^3 \cdot сек^{-1}$), по Козлову

T_i, *кэв*	$\langle \sigma u \rangle_{11p}$, $\times 10^{16}$	$\langle \sigma u \rangle_{11n}$, $\times 10^{16}$	$\langle \sigma u \rangle_{11}$, $\times 10^{16}$	$\langle \sigma u \rangle_{12}$, $\times 10^{16}$	$\langle \sigma u \rangle_{13}$, $\times 10^{16}$
20	0,024	0,0245	0,048	4,54	0,041
30	0,048	0,050	0,098	6,72	0,154
40	0,074	0,079	0,153	7,92	0,349
50	0,098	0,108	0,206	8,27	0,578
60	0,132	0,140	0,272	8,48	0,827
70	0,150	0,170	0,320	8,54	1,06
80	0,175	0,202	0,377	8,54	1,26
90	0,199	0,232	0,431	8,45	1,43
100	0,223	0,260	0,483	8,36	1,58
200	0,433	0,525	0,958	6,71	2,19
300	0,600	0,735	1,34	5,52	2,30
400	0,745	0,910	1,65	4,68	2,28
500	0,865	1,04	1,90	4,07	2,26
600	0,975	1,17	2,14	3,59	2,12
700	1,06	1,27	2,33	3,25	2,04
800	1,15	1,35	2,50	2,94	1,97
900	1,23	1,43	2,66	2,71	1,90
1000	1,30	1,50	2,80	2,50	1,85

Таблица 3

Значение величины $\langle \sigma u \rangle_{11}$ (в $см^3 \cdot сек^{-1}$), по Робертсу и Карру [7]

Энергия, *кэв*	Для максвелловского распределения	Для распределения (10)	Для распределения (11)
1	$1{,}5 \cdot 10^{-22}$	$4{,}1 \cdot 10^{-24}$	$3{,}7 \cdot 10^{-24}$
2	$5{,}3 \cdot 10^{-21}$	$5{,}0 \cdot 10^{-22}$	$4{,}0 \cdot 10^{-22}$
4	$8{,}8 \cdot 10^{-20}$	$1{,}8 \cdot 10^{-20}$	$1{,}4 \cdot 10^{-20}$
8	$4{,}0 \cdot 10^{-19}$	$3{,}0 \cdot 10^{-19}$	$2{,}1 \cdot 10^{-19}$
16	$3{,}6 \cdot 10^{-18}$	$2{,}1 \cdot 10^{-18}$	$1{,}4 \cdot 10^{-18}$
32	$1{,}2 \cdot 10^{-17}$	$8{,}4 \cdot 10^{-18}$	$5{,}2 \cdot 10^{-18}$
65	$2{,}9 \cdot 10^{-17}$	$2{,}3 \cdot 10^{-17}$	$1{,}4 \cdot 10^{-17}$
125	$5{,}6 \cdot 10^{-17}$	$4{,}6 \cdot 10^{-17}$	$2{,}7 \cdot 10^{-17}$
250	$1{,}0 \cdot 10^{-16}$	$8{,}8 \cdot 10^{-17}$	$5{,}1 \cdot 10^{-17}$
500	$1{,}6 \cdot 10^{-16}$	$1{,}5 \cdot 10^{-16}$	$8{,}4 \cdot 10^{-17}$
1000	$2{,}4 \cdot 10^{-16}$	$2{,}2 \cdot 10^{-16}$	$1{,}2 \cdot 10^{-16}$

новное значение имеет реакция DT. Для этой реакции значения $<\sigma u>_{12}$, приводимые Робертсом и Карром, несколько меньше значений Козлова. Поэтому, если бы в основу вычислений положить данные Робертса и Карра, то результат энергетического баланса оказался бы менее благоприятным, чем при нашем рассмотрении.

Истинные распределения ионов по скоростям в ловушке не являются максвелловскими. Между тем мы использовали в сво-

Таблица 4

Значение величины $\langle \sigma u \rangle_{12}$ ($см^3 \cdot сек^{-1}$), по Робертсу и Карру [7]

Энергия, *кэв*	Для максвелловского распределения	Для распределения (10)	Для распределения (11)
1	$1{,}2 \cdot 10^{-21}$	$1{,}0 \cdot 10^{-22}$	$8{,}0 \cdot 10^{-23}$
2	$1{,}8 \cdot 10^{-19}$	$1{,}5 \cdot 10^{-20}$	$1{,}2 \cdot 10^{-20}$
4	$3{,}3 \cdot 10^{-18}$	$6{,}0 \cdot 10^{-19}$	$4{,}7 \cdot 10^{-19}$
8	$4{,}0 \cdot 10^{-17}$	$1{,}3 \cdot 10^{-17}$	$9{,}6 \cdot 10^{-18}$
16	$2{,}2 \cdot 10^{-16}$	$1{,}5 \cdot 10^{-16}$	$1{,}0 \cdot 10^{-16}$
32	$5{,}8 \cdot 10^{-16}$	$6{,}4 \cdot 10^{-16}$	$4{,}0 \cdot 10^{-16}$
65	$8{,}0 \cdot 10^{-16}$	$9{,}8 \cdot 10^{-16}$	$5{,}1 \cdot 10^{-16}$
125	$6{,}9 \cdot 10^{-16}$	$8{,}2 \cdot 10^{-16}$	$4{,}0 \cdot 10^{-16}$
250	$4{,}9 \cdot 10^{-16}$	$5{,}8 \cdot 10^{-16}$	$3{,}0 \cdot 10^{-16}$
500	$3{,}1 \cdot 10^{-16}$	$3{,}9 \cdot 10^{-16}$	$2{,}4 \cdot 10^{-16}$
1000	$2{,}0 \cdot 10^{-16}$	$2{,}7 \cdot 10^{-16}$	$1{,}9 \cdot 10^{-16}$

их расчетах значениям $<\sigma u>$ для максвелловских распределений. Необходимо выяснить, насколько существенно такая подмена может отразиться на окончательных результатах. С этой целью в табл. 3 и 4 приводятся данные Робертса и Карра [7] по скоростям термоядерных реакций для двух функций распределения:

$$F \sim e^{-10\left(\frac{v}{v_0}-1\right)^2} Q_1(\cos\vartheta); \tag{10}$$

$$F \sim e^{-10\left(\frac{v}{v_0}-1\right)^2} e^{-100\cos^2\vartheta}, \tag{11}$$

где v_0 — постоянная. Оба распределения имеют резкий максимум при $v = v_0$ и близки к моноэнергетическому. Угловой множитель второго распределения, сверх того, имеет резкий максимум при $v = \frac{\pi}{2}$. Поэтому второе распределение близко соответствует инжекции, перпендикулярной к оси ловушки. Как видно из таблиц, значения $<\sigma u>$ для распределений (10) и (11) незначительно отличаются от максвелловских во всей существенной области температур. Для распределения (11) они всегда меньше максвелловских. Только для реакции DT и распределения (10) при $T_i > > 20$ *кэв* они незначительно превосходят соответствующие максвелловские значения, приводимые Робертсом и Карром. Если же пользоваться данными табл. 1, то это имеет место только в температурном интервале примерно от 20 до 70 *кэв*. Поэтому можно ожидать, что влияние немаксвелловского характера скоростного спектра мало сказывается на скоростях термоядерных реакций.

5. Пусть в ловушке имеется смесь дейтерия, трития и He^3 с абсолютными концентрациями n_1, n_2, n_3 ($n_1 + n_2 + n_3 = n$) и относительными концентрациями $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ $\left(\alpha_i = \frac{n_i}{n},\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 1\right)$.

Число ядерных реакций, происходящих в 1 $см^3$ в одну секунду, определяется выражением

$$r = \frac{1}{2} n_1^2 \langle \sigma u \rangle_{11} + n_1 n_2 \langle \sigma u \rangle_{12} + n_1 n_3 \langle \sigma u \rangle_{13}. \qquad (12)$$

В каждой реакции участвуют две частицы. Поэтому число частиц N_r, прореагировавших в единице объема ловушки в единицу времени, будет вдвое больше, т. е.

$$N_r = n_1^2 \langle \sigma u \rangle_{11} + 2 n_1 n_2 \langle \sigma u \rangle_{12} + 2 n_1 n_3 \langle \sigma u \rangle_{13}. \qquad (13)$$

Отношение числа прореагировавших частиц к числу частиц, инжектированных в ловушку, равно

$$\varphi = \frac{N_r}{N_{\text{инж}}} = \frac{N_r}{n} \tau_{\text{уд}} \qquad (14)$$

или

$$\varphi = \{\alpha_1^2 \langle \sigma u \rangle_{11} + 2\alpha_1\alpha_2 \langle \sigma u \rangle_{12} + 2\alpha_1\alpha_3 \langle \sigma u \rangle_{13}\} n\tau_{\text{уд}}. \qquad (15)$$

Это отношение называется коэффициентом выгорания горючей смеси. Коэффициент выгорания является важной характеристикой термоядерного реактора, а поэтому представляет интерес вычислить его при различных температурах и при различном составе горючей смеси, вводимой в реактор. Для этого целесообразно сначала составить таблицу значений параметра $\gamma = \frac{\lambda(R)}{\varphi}$, который является вполне определенной функцией температуры, концентрации и состава горючей смеси. Параметр γ зависит от концентрации через кулоновский логарифм L и пропорционален ему. Поэтому достаточно вычислить его при одном значении концентрации *.

Рассмотрим четыре варианта реактора.

1-й вариант. Реактор на чистом дейтерии ($\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$). В этом случае из формул (1), (2) и (15) получаем

$$\gamma \equiv \frac{\lambda(R)}{\varphi} = 1{,}22 \cdot \frac{L \cdot 10^{-12}}{\langle \sigma u \rangle_{11} T_i^{3/2}}, \qquad (16)$$

где температура ионов T_i выражена в *кэв*.

2-й вариант. Реактор на смеси с равным содержанием дейтерия и трития $\left(\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2},\ \alpha_3 = 0\right)$. В этом случае

$$\gamma \equiv \frac{\lambda(R)}{\varphi} = \frac{2{,}17 L \cdot 10^{-12}}{\left\{\langle \sigma u \rangle_{12} + \frac{1}{2} \langle \sigma u \rangle_{11}\right\} T_i^{3/2}}. \qquad (17)$$

---

* В своих расчетах мы пользуемся таблицами кулоновских логарифмов, опубликованными в работе [1]. Необходимо отметить, что в табл. 2 этой работы есть опечатка. В последней строке седьмой графы напечатано 27,4; следует читать 24,7.

3-й вариант. Концентрация дейтерия выбирается равной $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ при равновесной концентрации He^3. Последняя определяется из условия, чтобы количество He^3, образующееся в реакции 1, равнялось количеству He^3, расходуемому в реакции 4. Математически это условие записывается в виде

$$\frac{1}{2} n_1^2 \langle \sigma u \rangle_{11n} = n_1 n_3 \langle \sigma u \rangle_{13},$$

откуда

$$\alpha_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{\alpha_1}{2} \cdot \frac{\langle \sigma u \rangle_{11n}}{\langle \sigma u \rangle_{13}}. \qquad (18)$$

Третьей составной частью является тритий с концентрацией $\alpha_2 = \frac{1}{2} - \alpha_3$. Для рассматриваемого варианта

$$\gamma \equiv \frac{\lambda(R)}{\varphi} = \frac{2{,}17 \times 10^{-12}}{T_i^{3/2}} \cdot \frac{L}{\langle \sigma u \rangle_{11p} + \frac{1}{2} \langle \sigma u \rangle_{11n} + 2\alpha_2 \langle \sigma u \rangle_{12}}. \qquad (19)$$

4-й вариант. Реактор на равновесной смеси дейтерия, трития и He^3. Относительная концентрация He^3 определяется выражением (18), а трития — выражением

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{2} \cdot \frac{\langle \sigma u \rangle_{11p}}{\langle \sigma u \rangle_{12}} \qquad (20)$$

($\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$). В рассматриваемом варианте, используя соотношения (18) и (20), а также соотношение $\langle \sigma u \rangle_{11} = \langle \sigma u \rangle_{11p} + \langle \sigma u \rangle_{11n}$, нетрудно привести формулу (15) к виду

$$\varphi = 2\alpha_1^2 \langle \sigma u \rangle_{11} n \tau_{уд}. \qquad (21)$$

Отсюда после подстановки численных значений получаем

$$\gamma \equiv \frac{\lambda(R)}{\varphi} = \frac{0{,}61 \cdot 10^{-12}}{k\alpha_1^2 T_i^{3/2}} \cdot \frac{L}{\langle \sigma u \rangle_{11}}. \qquad (22)$$

Множитель k учитывает зависимость ионного времени релаксации $\bar{\tau}_i$ от молекулярного веса ионов. При его вычислении мы заменили смесь ионов одинаковыми ионами с молекулярным весом, равным среднему молекулярному весу смеси. Тогда

$$k = \sqrt{\alpha_1 + \frac{3}{2}(\alpha_2 + \alpha_3)} = \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\alpha_1}.$$

Множитель k близок к единице.

Последние два варианта рассматривались Постом [9]. В табл. 5 приведены значения концентраций α_1, α_2, α_3 для этих двух вариантов.

Таблица 5

Относительные концентрации дейтерия, трития и He^3

T, кэв	3-й вариант			4-й вариант		
	α_1	α_2	α_3	α_1	α_2	α_3
20	0,5	0,35	0,15	0,77	0,0020	0,23
30	0,5	0,42	0,08	0,86	0,0030	0,14
40	0,5	0,44	0,06	0,90	0,0042	0,10
50	0,5	0,45	0,05	0,91	0,0054	0,085
60	0,5	0,46	0,04	0,92	0,0071	0,077
70	0,5	0,46	0,04	0,92	0,0081	0,073
80	0,5	0,46	0,04	0,92	0,0094	0,073
90	0,5	0,46	0,04	0,92	0,011	0,074
100	0,5	0,46	0,04	0,91	0,012	0,075
200	0,5	0,44	0,06	0,87	0,028	0,104
300	0,5	0,42	0,08	0,82	0,045	0,132
400	0,5	0,40	0,10	0,78	0,062	0,157
500	0,5	0,38	0,12	0,75	0,080	0,17
600	0,5	0,36	0,14	0,71	0,096	0,20
700	0,5	0,34	0,16	0,68	0,11	0,21
800	0,5	0,33	0,17	0,65	0,13	0,22
900	0,5	0,31	0,19	0,62	0,14	0,24
1000	0,5	0,30	0,20	0,60	0,16	0,24

В последующих расчетах мы учли зависимость среднего ионного времени релаксации $\bar{\tau}_i$ от состава смеси, понимая под m_i среднее значение массы ионов, входящих в смесь; учтена также зависимость кулоновского логарифма от температуры и концентрации плазмы. Зависимость величины L от молекулярного веса ионов не учитывалась.

Классическое выражение для среднего кулоновского логарифма вообще не зависит от молекулярного веса [см. формулу (5.3) работы [1]]. Такая зависимость появляется лишь в случае квантового выражения [см. формулу (5.13) той же работы], которым мы и должны пользоваться в интересующей нас области температур. В это выражение в качестве слагаемого входит $\ln\left(c\sqrt{\frac{\mu}{T}}\right)$, где μ — приведенная масса сталкивающихся ионов. Таким образом, с увеличением молекулярного веса кулоновский логарифм медленно растет. Мы пользуемся значениями L для ион-ионных столкновений дейтерия. Для тритон-тритонных столкновений кулоновский логарифм больше на 0,2; для дейтон-тритонных столкновений — на 0,09 и т. д. Ясно, что такими поправками следует пренебречь.

Характерными для всех вариантов являются большие значения параметра γ (см. табл. 6). Отсюда следует, что реактор, как правило, характеризуется малыми значениями коэффициента выгорания φ. Действительно, как было указано в начале статьи, в

качестве практически достижимого верхнего предела пробочного отношения можно принять ориентировочно $R = 10$. Если бы была верна аппроксимация $\lambda = \lg R$, то такому пробочному отношению соответствовало бы $\lambda(R) = 1$. Таким образом, для практически осуществимых реакторов можно было бы принять, что $\lambda(R) \lesssim 1$. Возьмем для примера $\lambda(R) = 1$, $n = 10^{14}$ *см*$^{-3}$, $T_i = 100$ *кэв*. Тогда для 1, 2, 3 и 4-го вариантов соответственно получим следующие значения коэффициента выгорания: 1/600; 1/60; 1/64; 1/350. При более низких температурах коэффициент выгорания еще меньше. Только при температурах порядка 1 *Мэв* коэффициент выгорания становится относительно большим и составляет примерно 20%. Эти выводы качественно не изменились бы, если бы допустимые значения параметра λ были в несколько раз больше принятого нами значения $\lambda = 1$.

Таким образом, лишь малая часть ионов успевает прореагировать в ловушке. Подавляющая часть их уходит через пробки, не прореагировав. Понятно, что энергия, уносимая непрореагировавшей нагретой горючей смесью, должна быть тем или иным способом использована, например превращена в электроэнергию. Сама же непрореагировавшая смесь после необходимой очистки должна быть нагрета и вновь введена в ловушку для дальнейшего сгорания. И этот процесс должен повторяться многократно.

Необходимость такого многократного повторения сильно снижает коэффициент полезного действия термоядерного реактора. В этом отношении ловушки с тороидальной топологией, в которых (в идеальном случае) потери частиц отсутствуют, по крайней мере с теоретической точки зрения, обладают существенным преимуществом по сравнению с ловушками пробочного типа.

6. Малые значения коэффициента выгорания еще не доказывают невозможности самоподдерживающейся термоядерной реакции*. Требуется рассмотрение энергетического баланса. К этому мы и перейдем. Обозначим через w_{11n}, w_{11p}, w_{12} и w_{13} энергии, освобождающиеся при ядерных реакциях, 1, 2, 3, 4 соответственно. В реакциях 1 и 3 получаются нейтроны, которые могут быть поглощены тем или иным поглотителем. При этом выделяется тепловая энергия, которая может быть использована и должна быть учтена в энергетическом балансе. Обозначим через w_c энергию нейтронного поглощения, приходящуюся на один поглощенный нейтрон. Для увеличения энергетического выхода реактора целесообразно использовать поглотитель с максимальной w_c. Поэтому в вариантах 1 и 4-м, где не требуется воспроизводства трития, в качестве поглотителя берется натрий, для ко-

* Условие (18.38), приведенное в работе [1], по существу совпадает с требованием, чтобы коэффициент выгорания был порядка единицы. Это требование не необходимо для осуществления самоподдерживающейся термоядерной реакции. Оно слишком жестко и может привести к ошибочным выводам.

Таблица 6

Значения параметра $\gamma \equiv \dfrac{\lambda(R)}{\varphi}$

T, кэв	1-й вариант			2-й вариант			3-й вариант			4-й вариант		
	$n = 10^{13}$, $см^{-3}$	$n = 10^{14}$, $см^{-3}$	$n = 10^{15}$, $см^{-3}$	$n = 10^{13}$, $см^{-3}$	$n = 10^{14}$, $см^{-3}$	$n = 10^{15}$, $см^{-3}$	$n = 10^{13}$, $см^{-3}$	$n = 10^{14}$, $см^{-3}$	$n = 10^{15}$, $см^{-3}$	$n = 10^{13}$, $см^{-3}$	$n = 10^{14}$, $см^{-3}$	$n = 10^{15}$, $см^{-3}$
20	65000	62000	58000	1230	1170	1110	1730	1640	1560	52500	50000	47500
30	18000	17000	16000	461	439	417	550	520	490	11800	11200	10600
40	7500	7200	6800	250	240	230	280	270	260	4500	4300	4100
50	4000	3800	3700	180	170	160	190	180	170	2400	2300	2200
60	2300	2200	2100	130	125	120	140	135	130	1370	1300	1230
70	1600	1500	1400	105	100	95	110	105	100	930	890	850
80	1100	1050	1000	85	81	77	92	87	83	650	620	590
90	820	780	740	72	69	65	77	74	71	480	460	440
100	630	600	570	63	60	57	67	64	61	370	350	330
200	115	110	105	27	26	25	29	28	27	74	70	67
300	45	43	40	17	16,5	16	19	18	17	32	30,5	29
400	24	23	22	13	12,5	12	14	13,5	13	18,8	18,0	17,2
500	15	14,5	14	10,2	9,8	9,3	11	10,5	10	12,8	12,3	11,8
600	10,3	9,8	9,4	8,4	8,0	7,7	9,1	8,7	8,3	9,7	9,2	8,8
700	7,6	7,3	7,0	7,1	6,8	6,5	7,7	7,4	7,1	7,7	7,3	7,0
800	5,8	5,6	5,3	6,1	5,9	5,7	6,7	6,4	6,1	6,4	6,1	5,8
900	4,6	4,4	4,2	5,3	5,1	4,9	5,8	5,6	5,4	5,4	5,2	5,0
1000	3,7	3,6	3,5	4,8	4,6	4,4	5,1	4,9	4,7	4,7	4,5	4,3

торого $w_c = 12{,}6$ *Мэв*. В вариантах 2 и 3-м необходимо воспроизводство трития, например, с помощью реакции

$$Li^6 + n \to T + He^4 + 4{,}8 \text{ Мэв}.$$

Поэтому в этих вариантах мы берем $w_c = 4{,}8$ *Мэв*. Рассматривается идеальный случай, когда все нейтроны, получающиеся в реакции $D + D \to n + He^3$, расходуются на воспроизводство трития, т. е. реагируют с ядрами Li^6. В действительности неизбежны потери нейтронов из-за их поглощения другими ядрами. Поэтому реальная установка должна предусматривать возможность размножения нейтронов, например, при помощи реакции $Be^9 + n \to 2He^4 + 2n$. Наличие подобных дополнительных реакций может сказаться на энергетическом балансе. Однако это обстоятельство не может существенно повлиять на окончательные выводы.

Энергию, выделяющуюся при ядерных реакциях в 1 $см^3$, можно представить следующим выражением:

$$P = \frac{1}{2} n_1^2 \langle \sigma u \rangle_{11p} w_{11p} + \frac{1}{2} n_1^2 \langle \sigma u \rangle_{11n} (w_{11n} + w_c) + n_1 n_2 \langle \sigma u \rangle_{12} (w_{12} + w_c) + n_1 n_3 \langle \sigma u \rangle_{13} w_{13}. \quad (23)$$

Поделив это выражение на число прореагировавших частиц N_r, найдем среднюю выделяющуюся энергию $\bar{w}$, приходящуюся на одну прореагировавшую частицу:

$$\bar{w} = \frac{\frac{\alpha_1}{2}\langle\sigma u\rangle_{11p} w_{11p} + \frac{\alpha_1}{2}\langle\sigma u\rangle_{11n}(w_{11n}+w_c) + \alpha_2\langle\sigma u\rangle_{12}(w_{12}+w_c) + \alpha_3\langle\sigma u\rangle_{13} w_{13}}{\alpha_1\langle\sigma u\rangle_{11} + 2\alpha_2\langle\sigma u_{12}\rangle + 2\alpha_3\langle\sigma u\rangle_{13}}. \quad (24)$$

Подставим в эту формулу конкретные значения входящих в нее величин. Тогда для различных вариантов получим следующие результаты.

1-й вариант

$$\bar{w} = \frac{2\langle\sigma u\rangle_{11p} + 7{,}93\langle\sigma u\rangle_{11n}}{\langle\sigma u\rangle_{11}} \text{ Мэв}. \quad (25)$$

Величина $\bar{w}$ в этом случае слабо меняется с температурой и составляет приблизительно 5 *Мэв*.

2-й вариант

$$\bar{w} = \frac{\langle\sigma u\rangle_{11p} + 2\langle\sigma u\rangle_{11n} + 11{,}2\langle\sigma u\rangle_{12}}{\langle\sigma u\rangle_{12} + \frac{1}{2}\langle\sigma u\rangle_{11}} \text{ Мэв}. \quad (26)$$

Эта величина заметно убывает с повышением температуры. Напомним, что в рассматриваемом варианте $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_3 = 0$.

Равенству концентраций дейтерия и трития соответствует максимум энергетической мощности реактора. Действительно, как видно из формулы (23), из-за относительно больших значений величин $\langle \sigma u \rangle_{12}$ и $w_{12} + w_c$ основной вклад в выделяющуюся энергию вносит слагаемое $n_1 n_2 \langle \sigma u \rangle_{12} (w_{12} + w_c)$, которое при заданной полной концентрации $n = n_1 + n_2$ обращается в максимум при $n_1 = n_2$.

3-й вариант

$$\bar{w} = \frac{5{,}57 \langle \sigma u \rangle_{11p} + 2 \langle \sigma u \rangle_{11n} + 22{,}4 \langle \sigma u \rangle_{12} \alpha_2}{\langle \sigma u \rangle_{11p} + \frac{1}{2} \langle \sigma u \rangle_{11n} + 2\alpha_2 \langle \sigma u \rangle_{12}} \text{ Мэв}. \qquad (27)$$

Эта величина также заметно убывает с повышением температуры.

4-й вариант

$$\bar{w} = \frac{\langle \sigma u \rangle_{11p} (w_{11p} + w_{12} + w_c) + \langle \sigma u \rangle_{11n} (w_{11n} + w_{13} + w_c)}{4 \langle \sigma u \rangle_{11}}.$$

Величины $(w_{11p} + w_{12})$ и $(w_{11n} + w_{13})$ случайно совпадают между собой и равны 21,6 *Мэв*. Благодаря этому случайному совпадению предыдущее выражение преобразуется в

$$\bar{w} = \frac{1}{4} (w_{11p} + w_{12} + w_c) = 8{,}55 \text{ Мэв}. \qquad (28)$$

В табл. 7 приведены результаты вычислений величины $\bar{w}$ по формулам (25), (26), (27) и (28). Основная часть энергии, выделяющейся при ядерных реакциях, уносится нейтронами. В нее мы включаем энергию нейтронного поглощения и называем нейтронной энергией. Среднюю нейтронную энергию, приходящуюся на одну прореагировавшую частицу, обозначим через $\bar{w}_n$. Значения отношения $\bar{w}_n/\bar{w}$ приведены также в табл. 7.

На долю заряженных частиц приходится относительно небольшая энергия. Это обстоятельство позволяет упростить рассмотрение энергетического баланса. Энергия нейтронов может быть превращена в электроэнергию посредством теплового цикла. В этом смысле она эквивалентна тепловой энергии. Энергию, приходящуюся на заряженные частицы, можно также считать эквивалентной тепловой энергии. Действительно, энергия заряженных продуктов реакций мала по сравнению с нейтронной энергией. Кроме того, прямое превращение энергии заряженных частиц в электрическую затруднительно из-за быстрой утечки их через магнитные пробки. Поэтому в расчетах можно считать, что вся энергия, выходящая из реактора в виде нейтронной энергии, энергии заряженных частиц и электромагнитного излучения, превращается в электрическую посредством теплового цикла, т. е. эта энергия может рассматриваться как тепловая. Если даже некоторая часть получаемой энергии преобразуется в электрическую непосредственно и с большим к. п. д., то это обстоятельство

Таблица 7

Средняя энергия $\bar{w}$ (приходящаяся на одну прореагировавшую частицу), выделяющаяся в реакторе. Доля этой энергии $\bar{w}_n/\bar{w}$, уносимая нейтронами

T_i, кэв	1-й вариант		2-й вариант		3-й вариант		4-й вариант	
	$\bar{w}$, Мэв	$\bar{w}_n/\bar{w}$, %	$\bar{w}$, Мэв	$\bar{w}_n/\bar{w}$, %	$\bar{w}$, Мэв	$\bar{w}_n/\bar{w}$, %	$\bar{w}$, Мэв	$\bar{w}_n/\bar{w}$, %
20	5,0	81	11,2	84	11,2	85	8,55	63
30	5,0	81	11,2	84	11,1	85	8,55	62
40	5,0	81	11,2	84	11,1	85	8,55	62
50	5,1	81	11,1	84	11,1	85	8,55	62
60	5,1	81	11,1	84	11,1	85	8,55	62
70	5,1	82	11,1	84	11,0	85	8,55	61
80	5,2	82	11,1	84	11,0	84	8,55	61
90	5,2	82	11,0	84	11,0	84	8,55	61
100	5,2	82	11,0	84	11,0	83	8,55	61
200	5,3	83	10,7	84	10,6	82	8,55	61
300	5,3	83	10,4	84	10,1	81	8,55	60
400	5,3	83	10,1	84	9,7	78	8,55	61
500	5,2	83	9,7	83	9,3	76	8,55	61
600	5,2	83	9,3	83	8,9	74	8,55	61
700	5,2	83	9,0	83	8,5	71	8,55	61
800	5,2	83	8,7	83	8,2	68	8,55	61
900	5,2	82	8,5	83	7,9	66	8,55	61
1000	5,2	82	8,3	82	7,6	64	8,55	61

можно учесть путем замены вводимого ниже к. п. д. η на некоторый больший эффективный коэффициент.

Ежесекундно в единицу объема реактора вводится $N_{\text{инж}}$ ионов, обладающих кинетической энергией $\frac{3}{2}N_{\text{инж}}T$. Эта кинетическая энергия получается из электрической с некоторым коэффициентом полезного действия η_k. В свою очередь, сама электроэнергия получается из тепловой с к. п. д. η_g. Энергия расходуется на получение дейтерия из воды, большая часть энергии бесполезно тратится на выделение джоулева тепла в обмотках и т. д. Обозначим через Q общее количество тепловой энергии, расходуемое на получение кинетической энергии ионов $\frac{3}{2}N_{\text{инж}}T$. Тогда можно написать

$$\frac{3}{2}N_{\text{инж}}T = \eta Q. \tag{29}$$

Полный к. п. д. η представим в виде

$$\eta = \eta_k \eta_g \eta_t, \tag{30}$$

где коэффициент η_t учитывает потери энергии на джоулево тепло в обмотках, потери, связанные с получением дейтерия из воды, и все прочие потери.

Из $N_{\text{инж}}$ введенных ионов N_r ионов вступают в реакцию. При этом выделяется энергия $N_r\bar{w} = \varphi N_{\text{инж}}\bar{w}$. Остальные ионы уходят

из ловушки. Их энергия, разумеется, должна быть использована в тепловом цикле для превращения в электроэнергию. При этом внутри ловушки энергия введенных ионов частично трансформируется: часть ее передается электронам, излучению и т. д. Эти процессы относятся к числу вредных, так как они ведут к понижению температуры ионов и связанному с ним уменьшению скоростей термоядерных реакций.

Отвлечемся от всех этих процессов трансформации, учтя их косвенно посредством коэффициента η_t. В нашем анализе существенно только, что вся энергия введенных ионов $\eta Q = \frac{3}{2} N_{\text{инж}} T$ в конце концов используется как тепловая энергия, перерабатываемая в электрическую. Из ловушки уходят преимущественно медленные ионы. Однако из изложенного выше следует, что это обстоятельство совсем не затрагивает формулы, которыми мы пользуемся при рассмотрении энергетического баланса. Ион может вступить или не вступить в реакцию, в обоих случаях его начальная кинетическая энергия после ряда трансформаций в конце концов переходит в электрическую с одним и тем же к. п. д. Для энергетического баланса существенна общая величина энергии ионов, а не те трансформации, которые она претерпевает. Преимущественный уход медленных ионов благоприятно проявляется только в том, что получается более медленное остывание плазмы в ловушке и связанный с ним более быстрый ход термоядерных реакций.

Мы видели, что при квазимаксвелловском распределении скоростей средняя энергия иона, уходящего через пробки, значительно меньше $\frac{3}{2} T$. Поэтому можно выдвинуть возражение, что инжектирование ионов со средней энергией $\frac{3}{2} T$ приведет к накоплению энергии внутри ловушки и, следовательно, к нарушению стационарности работы реактора. Казалось бы, что для поддержания необходимой температуры в ловушку можно вводить ионы со средней энергией, значительно меньше $\frac{3}{2} T$, например с энергией $\frac{1}{2} T$. Однако более внимательное рассмотрение показывает, что это возражение не столь существенно, как может показаться на первый взгляд. Значительное различие между средней энергией иона в ловушке и средней энергией уходящего иона будет только при наличии большего разброса скоростей ионов в ловушке, например при квазимаксвелловском распределении. При моноэнергетическом скоростном спектре ионов такого различия нет. Это непосредственно ясно из физических соображений и видно из формулы (8). Истинный скоростной спектр инжектируемых ионов ближе к моноэнергетическому, чем к максвелловскому. Поэтому

не столь существенна разница между средней энергией иона в ловушке и средней энергией иона, уходящего из нее.

Если даже скоростной спектр ионов в ловушке был бы близок к максвелловскому, инжектирование ионов в нее со средней энергией, значительно меньшей $\frac{3}{2}T$, было бы все же недопустимо. В противном случае термоядерные реакции в ловушке сильно замедлились бы. Действительно, ввиду малости коэффициентов выгорания, подавляющая часть инжектированных ионов уйдет из ловушки не прореагировав. Это преимущественно медленные ионы. В ловушке задержатся главным образом быстрые ионы, число которых относительно невелико. Допустим, что в ловушку с горячими ионами инжектируются менее горячие ионы со средней энергией, значительно меньшей $\frac{3}{2}T$. Тогда все ионы в ловушке разделятся на две группы: быстрые и медленные. Число быстрых ионов относительно мало. Основные столкновения происходят между медленными ионами. Эти столкновения практически не сопровождаются ядерными реакциями. Ядерные реакции возникнут в основном при столкновении быстрых ионов с медленными. Однако число таких столкновений относительно невелико. Передача энергии от быстрых ионов к медленным не может иметь существенного значения, так как она совершается за времена порядка времени удержания.

Полная энергия, ежесекундно уходящая из единицы объема реактора, равна $\mathcal{E} = \eta Q + \varphi N_{\text{инж}} \bar{w}$. Разделив это равенство почленно на $\eta Q = \frac{3}{2} N_{\text{инж}} T$, получим

$$\frac{\mathcal{E}}{Q} = \eta + \frac{2}{3} \cdot \frac{\eta \varphi \bar{w}}{T} = \eta + \frac{2}{3} \cdot \frac{\eta \lambda \bar{w}}{\gamma T}.$$

Как уже было сказано, вся энергия $\mathcal{E}$ может рассматриваться как тепловая энергия. Поэтому для получения самоподдерживающейся термоядерной реакции необходимо выполнение условия $\frac{\mathcal{E}}{Q} > 1$ или

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{\lambda \bar{w}}{\gamma T} > \frac{1-\eta}{\eta}. \tag{31}$$

Если ввести параметр

$$S = \frac{3}{2} \cdot \frac{\gamma T}{\bar{w}}, \tag{32}$$

то условию (31) можно придать вид

$$\lambda > S \frac{1-\eta}{\eta}. \tag{33}$$

Таблица 8

Значения функции $S = \frac{3}{2} \cdot \frac{\gamma T}{w}$

T, кэв	1-й вариант			2-й вариант			3-й вариант			4-й вариант		
	$n = 10^{13}$, $см^{-3}$	$n = 10^{14}$, $см^{-3}$	$n = 10^{15}$, $см^{-3}$	$n = 10^{13}$, $см^{-3}$	$n = 10^{14}$, $см^{-3}$	$n = 10^{15}$, $см^{-3}$	$n = 10^{13}$, $см^{-3}$	$n = 10^{14}$, $см^{-3}$	$n = 10^{15}$, $см^{-3}$	$n = 10^{13}$, $см^{-3}$	$n = 10^{14}$, $см^{-3}$	$n = 10^{15}$, $см^{-3}$
20	390	370	350	3,3	3,1	2,9	4,6	4,4	4,2	185	175	165
30	160	152	145	1,9	1,8	1,7	2,2	2,1	2,0	62	59	56
40	88	85	81	1,35	1,30	1,25	1,6	1,5	1,4	32	30	28
50	59	56	54	1,20	1,15	1,10	1,30	1,25	1,20	21	20	19
60	42	40	38	1,07	1,01	0,96	1,15	1,10	1,05	14,4	13,7	13,0
70	32	31	30	1,00	0,95	0,90	1,07	1,02	0,97	11,4	10,9	10,5
80	26	25	24	0,93	0,89	0,85	1,00	0,95	0,90	9,2	8,7	8,2
90	21	20	19	0,89	0,85	0,80	0,95	0,90	0,85	7,6	7,2	6,9
100	18	17	16	0,85	0,81	0,77	0,91	0,87	0,83	6,4	6,1	5,8
200	6,6	6,3	6,0	0,76	0,72	0,69	0,84	0,80	0,76	2,6	2,5	2,4
300	3,9	3,7	3,5	0,75	0,72	0,69	0,85	0,81	0,78	1,7	1,6	1,5
400	2,8	2,7	2,5	0,77	0,73	0,70	0,89	0,85	0,81	1,30	1,25	1,20
500	2,2	2,1	2,0	0,78	0,75	0,72	0,91	0,87	0,83	1,13	1,08	1,04
600	1,8	1,7	1,6	0,82	0,78	0,75	0,92	0,88	0,84	1,02	0,97	0,92
700	1,5	1,45	1,40	0,83	0,79	0,76	0,95	0,91	0,87	0,94	0,90	0,86
800	1,35	1,28	1,23	0,85	0,81	0,78	0,98	0,94	0,90	0,89	0,85	0,82
900	1,18	1,14	1,09	0,85	0,81	0,78	1,00	0,95	0,91	0,85	0,82	0,78
1000	1,09	1,04	1,00	0,86	0,82	0,79	1,01	0,97	0,93	0,83	0,80	0,76

Численные значения параметра S приведены в табл. 8 для трех значений концентрации n: 10^{13}, 10^{14} и 10^{15} $см^{-3}$. Значения S при других концентрациях легко найти, если принять во внимание, что функция S зависит от концентрации только через кулоновский логарифм L и пропорциональна ему.

Из табл. 8 видно, что при прочих равных условиях функция S, а с ней и пробочное отношение, необходимое для осуществления самоподдерживающейся термоядерной реакции, минимальны для варианта 2-го и максимальны для варианта 1-го. Таким образом, условию (33) легче всего удовлетворить в случае варианта 2-го. В этом смысле вариант 2-й является наиболее оптимальным.

7. Возможность или невозможность самоподдерживающейся термоядерной реакции в ловушке с магнитными пробками определяется практически достижимыми значениями к. п. д. η и пробочного отношения R. Если бы к. п. д. был близок к единице, то условие (33) могло бы быть выполнено уже при небольших значениях R. В действительности к. п. д. не может быть столь большим. Из трех коэффициентов (η_k, η_g, η_t), входящих в формулу (30), только один, η_g, имеет принципиальный верхний предел, определяемый теоремой Карно. Остальные два коэффициента, η_k и η_t, не имеют подобных принципиальных пределов. Однако значения их, которые могут быть достигнуты практически, еще далеки от теоретического предела $\eta_k = \eta_t = 1$. Нет оснований рассчитывать, что и в будущем техника близко подойдет к этому теоретическому пределу.

Возьмем для примера $\eta_g = \frac{1}{2}$, $\eta_k \eta_t = \frac{1}{2}$ и, следовательно, $\eta = \frac{1}{4}$. Такие высокие значения к. п. д. нельзя достигнуть при современном уровне развития техники. Вряд ли это можно сделать и в будущем. При $\eta = \frac{1}{4}$ формула (33) дает $\lambda > 3S$. Минимальное значение S для второго варианта составляет около 0,7. Следовательно, должно быть $\lambda > 2$ или $R > 100$. Это не реально, а поэтому самоподдерживающаяся термоядерная реакция невозможна ни в одном из рассмотренных вариантов реактора.

Последнее заключение основано на формуле $\lambda = \lg R$, которая, как неоднократно подчеркивалось, не вполне надежна. Существенно может сказаться немаксвелловский характер скоростного спектра ионов в ловушке. Это обстоятельство может проявиться двояко. Во-первых, скорости термоядерных реакций $\langle \sigma u \rangle$ для истинного распределения скоростей в области, где сечения велики, могут превышать их значения при максвелловском распределении. Однако табл. 3 и 4, а также дополнительные данные, содержащиеся в отчете Робертса и Карра [7], показывают, что этот эффект невелик и не может иметь существенного значения. Во-вторых, отклонения истинного спектра от максвелловского могут сказаться и на времени удержания. Так, для моно-

энергетического спектра скоростей формула (5) дает $\lambda(R) = 3{,}3 \lg R$. Имея это в виду, а также принимая во внимание нестрогость вывода формул (1) и (5), лучше пользоваться аппроксимацией $\lambda = k \lg R$, оставляя численный коэффициент k неопределенным.

Характер ответа на вопрос о возможности или невозможности самоподдерживающейся термоядерной реакции в ловушке с магнитными пробками очень чувствительно зависит от значения коэффициента k. Допустим, например, что $k = 3$ (а не единице, как мы принимали раньше). Тогда при $R = 10$ получится $\lambda = 3$. Полагая снова $\eta = \frac{1}{4}$, из формулы (33) находим, что для осуществления самоподдерживающейся термоядерной реакции необходимо $S < 1$. Для вариантов 2 и 3-го это условие выполняется при $T_i > 70$ *кэв*, для варианта 4-го — при $T_i > 600$ *кэв*. При $R = 3{,}16$ ($\lg R = 0{,}5$) соответствующее условие переходит в $S < \frac{1}{2}$. Оно не выполняется ни для одного из вариантов ни при какой температуре. При $k = 5$ и $\eta = \frac{1}{4}$ получилось бы для $R = 10$ условие $S < \frac{5}{3}$, а для $R = 3{,}16$ — условие $S < \frac{5}{6}$. Для вариантов 2 и 3-го первое условие выполняется при $T_i > 40$ *кэв*; для варианта 4-го — при $T_i > 300$ *кэв*; для варианта 1-го — при $T_i > 600$ *кэв*. Второе условие $\left(S < \frac{5}{6}\right)$ выполняется на пределе только для второго варианта при $T_i > 100$ *кэв*.

Условию (33) можно придать иную форму. Для осуществления самоподдерживающейся термоядерной реакции необходимо

$$\eta > \eta_{кр}, \tag{34}$$

где $\eta_{кр}$ — критический коэффициент полезного действия, определяемый соотношением

$$\eta_{кр} = \frac{S}{S + \lambda} = \frac{S}{S + k \lg R}. \tag{35}$$

На рис. 3, 4 и 5 приведены графики критического к. п. д. для первых двух вариантов реактора при различных значениях R и k. Согласно Будкеру, значение $k = 1$ соответствует квазимаксвелловскому распределению скоростей ионов. Согласно Джадду, Макдональду и Розенблюту, для моноэнергетического распределения $k = 3{,}3$.

Точное значение коэффициента k определить трудно. Опубликованные материалы по численному решению кинетического уравнения получены с помощью различных физических и математических упрощений, которые не всегда допустимы. Пост [9], используя результаты численных расчетов Гаррена [10] и Робертса [7], приводит выражения для отношения Q мощности энергии,

выделяющейся при ядерных реакциях, к мощности энергии, уносимой частицами, уходящими через пробки. Используя эти выражения, можно получить $k \simeq 7$. Пост приводит также выражения для коэффициента выгорания φ. Пользуясь его выражением

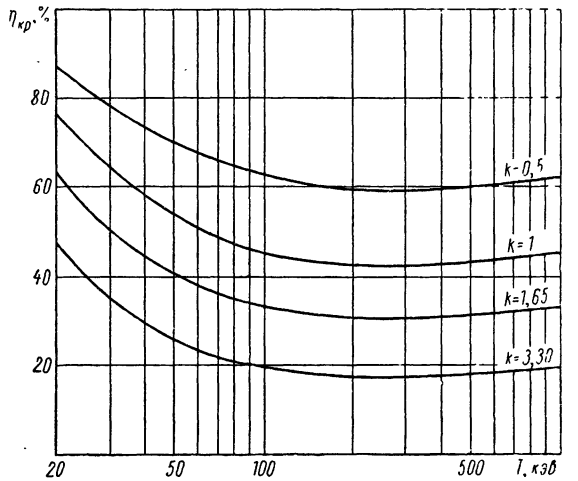


Рис. 3. Критический к. п. д. для 2-го варианта реактора. Пробочное отношение $R = 10$ ($\lg R = 1$).

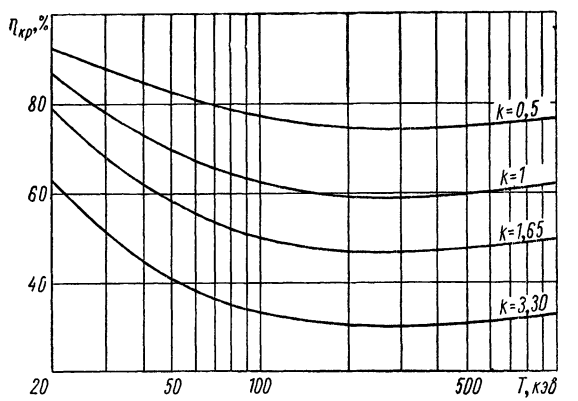


Рис. 4. Критический к. п. д. для второго варианта реактора. Пробочное отношение $R = 3{,}16$ ($\lg R = 0{,}5$).

φ для третьего варианта, найдем по-прежнему $k \simeq 7$. Выражение же φ для четвертого варианта приводит к вдвое меньшему значению $k \simeq 3{,}5$. Таким образом, данные Поста противоречивы. По-видимому, это результат опечатки. Кроме того, Пост пользовался результатами численных расчетов, в которых не учитывались два фактора, существенно влияющих на величину отношения Q, как

показали Фаулер и Ранкин [11]. Во-первых, не учитывалось охлаждение горячих ионов холодными электронами, инжектируемыми в ловушку. Во-вторых, не учитывалось влияние на уход ионов через пробки электрических полей, возникающих из-за различия скоростей ухода ионов и электронов. Оба эти обстоятельства не учитывались также при выводе формул для времени удержания, которыми мы пользовались. Путем численного решения кинетического уравнения Фаулер и Ранкин показали, что учет обоих факторов уменьшает постовское отношение Q в четыре и более раз. В такое же число раз уменьшатся время удержания и коэффициент k. Таким образом, весьма правдоподобно, что коэффи-

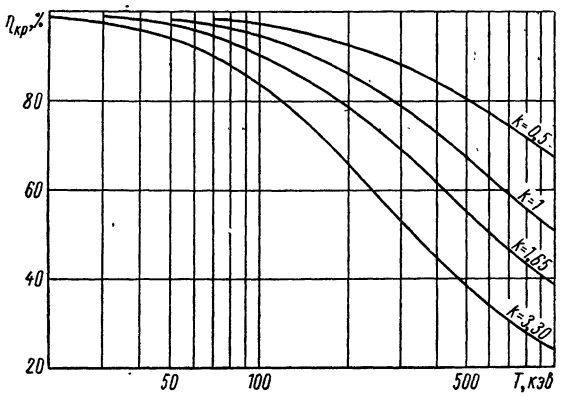


Рис. 5. Критический к. п. д. для 1-го варианта реактора. Пробочное отношение $R = 10$ ($\lg R = 1$).

циент k не превосходит единицу. Если это так, то самоподдерживающаяся термоядерная реакция в ловушке с магнитными пробками невозможна из-за потери частиц при кулоновских столкновениях.

Этот вывод должен быть усилен. В последнее время в некоторых работах вопрос о возможности самоподдерживающейся термоядерной реакции в ловушках с магнитными пробками обсуждался с точки зрения устойчивости плазмы. В нашу задачу не входит исследование этого вопроса. Ограничимся лишь кратким замечанием. Наличие конуса потерь приводит к резкой анизотропии функции распределения в скоростном пространстве. Это ведет к развитию неустойчивостей в плазме и к возрастанию потока частиц через пробки и на стенки камеры. Расчеты показывают, что связанные с этим потери частиц, по-видимому, не меньше потерь из-за кулоновских столкновений. Если это так, то самоподдерживающаяся термоядерная реакция также невозможна из-за одних только неустойчивостей, развивающихся в ловушке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сивухин Д. В. В сб. «Вопросы теории плазмы». Вып. 4, М., Атомиздат, 1964, стр. 81.
2. Sivukhin D. V. In: «Reviews of Plasma Physics». V. 4. Consultants Bureau, N. Y. 1966, p. 93.
3. Сивухин Д. В. «Атомная энергия», **19**, 510, 1965.
4. Будкер Г. И. В сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», Т. III. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 3.
5. Judd D., McDonald W. and Rosenbluth M. End Leakage Losses from the Mirror Machine, AEC report WASH-289, p. 158, Conference on Controlled Thermonuclear Reactions, Berkely, California.
6. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М., Изд-во «Наука», 1964.
7. Roberts I. E., Carr M. L. US Atomic Energy Commission, Report UCRL-5651-T. April 1960.
8. Козлов Б. Н. «Атомная энергия», **12**, 238, 1962.
9. Post R. F. Nucl. Fusion, Suppl. 1962, P 1, 99
10. Garren A. et. al. Proceeding of Second U. N. International Conference on Peaceful Uses of Atomic Energy, **31**, 65, (1958).
11. Fowler T. K., Rankin M. Plasma Physics (Journal of Nuclear Energy Part C), 1966, p. 121.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Замкнутые магнитные конфигурации для удержания плазмы. *Л. С. Соловьев, В. Д. Шафранов* 3

§ 1. Введение 3

§ 2. Общие свойства тороидальных конфигураций 11

1. Общая криволинейная система координат 12

2. Координаты, в которых магнитные силовые линии прямые . 13

3. Магнитное дифференциальное уравнение 15

4. Связь интеграла $\int \frac{dl}{B}$ с производной объема по потоку $V'_{(\Phi)}$ 17

5. Условие замыкания тока на магнитных поверхностях . . . 19

6. Натуральные координаты 23

§ 3. Ортогональная система координат с пространственной осью . . 26

1. Метрика 26

2. Дифференциальные операторы 29

§ 4. Магнитное поле вблизи заданной магнитной силовой линии . . 33

§ 5. Структура магнитных поверхностей в окрестности замкнутой силовой линии 42

§ 6. Магнитные поверхности вблизи магнитной оси 49

1. Второе приближение по ρ 50

2. Третье приближение по ρ 53

3. Четвертое и более высокие приближения по ρ 56

4. Случай винтовой симметрии 57

§ 7. О форме тороидальных магнитных поверхностей 59

§ 8. Возмущение магнитных поверхностей полем первой гармоники . 63

1. Смещение магнитной оси под действием поперечного поля . . 64

2. Случай однородных конфигураций 65

3. Изменение формы сечений магнитных поверхностей под действием поперечного поля 67

§ 9. Решение уравнений для параметров магнитных поверхностей . . 70

§ 10. Возмущение тороидальных манитных поверхностей 72

1. Метод возмущений для нахождения магнитных поверхностей . 72

2. Влияние отдельной гармоники возмущающего поля 77

3. Возмущения второго и более высоких приближений . . . 80

4. Резонансные явления в окрестности магнитной оси 82

5. Примеры расщепленных магнитных поверхностей 92

§ 11. Равновесие плазмы в тороидальных ловушках 101

1. Общие уравнения 102

2. Выражение для плотности тока 104

3. Возмущения магнитного поля 107

4. Магнитные поверхности при наличии плазмы 109

5. Равновесие плазмы в двухзаходном стелларатore 110

6. Равновесие плазмы в ловушках с пространственной магнитной осью 113

7. Равновесие плазмы при наличии продольного тока 116

Стр.

§ 12. Влияние кривизны на классические коэффициенты диффузии и теплопроводности 124
§ 13. Интегральные характеристики тороидальных магнитных конфигураций 130
1. Удельный объем $V'(\Phi)$ 133
2. Удельный объем магнитных конфигураций с прямой магнитной осью 135
3. Средний угол прокручивания силовых линий $\iota = 2\pi\chi'(\Phi)$ . . 136
4. Удельный объем $V'(\Phi)$ конфигураций с сечением, близким к круговому 138
5. Оценка удельного объема $V'(\Phi)$ на сепаратрисе 140
§ 14. Некоторые конкретные системы 140
1. Конфигурации с прямой магнитной осью 141
2. Конфигурации с винтовой магнитной осью 144
3. Замкнутые однородные конфигурации 151
4. Однородные конфигурации с круговой магнитной осью 155
5. Однородные конфигурации с пространственной магнитной осью . 160
§ 15. Винтовые магнитные конфигурации 166
1. Удельный объем винтовой магнитной трубки 167
2. Средний угол прокручивания силовых линий $\iota = 2\pi\chi'(\Phi)$ . . . 171
3. Точные выражения для удельного объема $V'(\Phi)$ и угла прокручивания $\iota = 2\pi\chi'(\Phi)$ 172
4. Отношение удельных объемов на магнитной оси и сепаратрисе 173
5. Результаты численных расчетов 173
§ 16. Об удержании заряженных частиц в замкнутых тороидальных конфигурациях 174
1. Движение одиночных зарядов в вакууме 177
2. Движение зарядов в бесстолкновительной плазме 181
Приложение I. Магнитные поверхности вблизи эллиптической и гиперболической магнитных осей 188
1. Система координат 188
2. Магнитные поверхности в окрестности замкнутой силовой линии 189
3. Представление магнитных поверхностей в виде рядов по степеням удаления от магнитной оси 191
4. Возмущение магнитной конфигурации поперечными полями . 196
Приложение II. Вычисление поверхностных функций ψ и ψ^* методом усреднения 199
1. Приближенный интеграл уравнений магнитных силовых линий . 199
2 Устойчивость магнитных поверхностей 201
3. Приближенные интегралы дрейфовых уравнений 203
Приложение III. Число зацеплений двух замкнутых кривых . . 205
Приложение IV. Некоторые интегралы, встречающиеся при расчете удельного объема $V'(\Phi)$ и угла прокручивания $\iota = 2\pi\mu(\Phi)$ 206
Литература 207

Турбулентные процессы в тороидальных системах. *Б. Б. Кадомцев, О. П. Погуце* 209

Введение 209
§ 1. Равновесие 213
1. Равновесие идеальной плазмы. Система координат 213
2. Дрейфовые потоки в равновесной плазме 217
3. Дрейфовые траектории частиц 220
4. Равновесие разреженной плазмы 225
§ 2. Гидромагнитная неустойчивость 227
1. Желобковая неустойчивость 227
2. Винтовая неустойчивость 233

Стр.
§ 3. Дрейфовые и диссипативные неустойчивости 235
1. Выбор параметров, ширина локализации возмущений . . . 235
2. Уравнения, описывающие диссипативные гидромагнитные неустойчивости 240
3. Токово-конвективная неустойчивость 250
4. Дрейфово-диссипативная неустойчивость 253
5. Гравитационная диссипативная неустойчивость 256
6. Температурная дрейфовая неустойчивость 259
7. Бесстолкновительные неустойчивости, раскачиваемые электронами 265
8. Непотенциальные неустойчивости 268
9. Неустойчивость плотной плазмы 272
§ 4. Неустойчивость на запертых частицах 276
1. Бесстолкновительная неустойчивость 276
2. Диссипативная неустойчивость на запертых частицах . . . 285
3. Неустойчивость, связанная с конечными орбитами 287
§ 5. Высокочастотные неустойчивости 289
1. Дрейфово-циклотронная неустойчивость 289
2. Ионно-звуковая неустойчивость 291
§ 6. Винтовые магнитные ячейки 293
§ 7. Тепловая конвекция плазмы с током 302
1. Основные уравнения 302
2. Конвекция в отдельной ячейке 305
3. Поток тепла при наличии конвекции 312
§ 8. Перенос тепла и частиц из-за температурной дрейфовой неустойчивости 320
1. Турбулентная теплопроводность 320
2. Взаимодействие ячеек (квазимоды) 326
3. Турбулентная диффузия 328
§ 9. Аномальная диффузия на запертых частицах 330
§ 10. Диффузия в системах с малым широм 334
1. Дрейфово-диссипативная неустойчивость 334
2. Неустойчивость, связанная с конечными орбитами 338
3. Дрейфовая неустойчивость 339
§ 11. Сводка формул 340
Заключение 346
Литература 349

Циклотронная неустойчивсть анизотропной плазмы. *А. В. Тимофеев, В. И. Пистунович* 351

§ 1. Введение. Классификация неустойчивостей 351
а) общие соотношения 353
б) раскачка циклотронных колебаний с нормальной дисперсией ($\omega \frac{\partial \mathrm{Re}\,\varepsilon}{\partial \omega} > 0$) 354
в) раскачка циклотронных колебаний с аномальной дисперсией ($\omega \frac{\partial \mathrm{Re}\,\varepsilon}{\partial \omega} \leqslant 0$) 356
г) колебания с частотой $\omega \gg \omega_i$ 358
§ 2. Основное уравнение 359
§ 3. Устойчивость плазмы с анизотропным максвелловским распределением ионов 361
а) ионно-звуковые колебания ($\mu < 1$) 361
б) диссипативная неустойчивость ($\mu \lesssim 1$, $\tau \gg 1$) 364
в) электронные ленгмюровские [электронно-звуковые колебания ($\mu \gtrsim 1$)] 368

г) неустойчивость гидродинамического типа ($\mu \gtrsim 1$, $\tau \gg 1$) . . 370
§ 4. Устойчивость плазмы с распределением ионов по скоростям в виде δ-функции 373
а) циклотронные колебания плазмы с холодными электронами (неустойчивость гидродинамического типа) 373
б) колебания с частотой $\omega \gg \omega_i$ 377
в) циклотронные колебания плазмы с горячими электронами (диссипативная неустойчивость) 380
г) неустойчивость поперечных колебаний, $k_\parallel \ll k_\perp$ 382
§ 5. Устойчивость анизотропной плазмы при наличии холодных ионов 384
§ 6. Устойчивость плазмы с неравновесным распределением электронов по скоростям 385
а) анизотропное максвелловское распределение 385
б) распределение по скоростям в виде δ-функции 388
§ 7. Заключение. Основные результаты 388
Приложение 391
Литература 393

К магнитногидродинамической теории пинч-эффекта в высокотемпературной плотной плазме. *В. Ф. Дьяченко, В. С. Имшенник* . . . 394

Введение 394
§ 1. Магнитогидродинамические уравнения пинч-эффекта с учетом процессов диссипации 401
а) Физические предположения. Уравнения в общей векторной форме 401
б) Одномерные цилиндрические симметричные уравнения . . . 403
в) Коэффициенты диссипации полностью ионизованной плазмы . 404
г) Безразмерная форма уравнений и определяющие параметры . 406
д) Граничные и начальные условия в общей задаче 408
§ 2. Предельный случай бесконечно большой электропроводности плазмы и постоянной силы электрического тока 410
а) Переход к предельному случаю однопараметрической задачи . 410
б) Обсуждение результатов решения однопараметрической задачи 412
в) Эффект ионной теплопроводности 421
г) Кумулятивное увеличение температуры 423
д) Термоядерный выход нейтронов и пространственное распределение мягкого рентгеновского излучения 423
§ 3. Конечная электропроводность и переменный электрический ток. Некоторые сравнения с экспериментом 425
а) Учет конечной электропроводности в случае постоянного электрического тока 425
б) Общий случай переменного электрического тока с конечным значением электропроводности 427
в) Некоторые сравнения с экспериментальными результатами . . 433
Заключение 436
Литература 437

Энергетический баланс и вопрос о возможности самоподдерживающейся термоядерной реакции в ловушке с магнитными пробками. *Д. В. Сивухин* 439

Литература 466

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

Выпуск 5

Редактор **В. Н. Безрукова**
Художественный редактор **А. С. Александров**
Технический редактор **Н. А. Власова**
Корректор **Н. [illegible]ирьова**

Сдано в набор 6. I. 1967 г.
Подписано в печать 15. V. 1967 г.
Бумага 60 × 90¹/₁₆, типографская № 1
Усл. печ. л. 29,5. Уч.-изд. л. 31,19 Т-00592,
Тираж 5500 экз. Заказ изд. 1184
Зак. тип. 736
Цена 2 р. 06 к.
Атомиздат, Москва, К-31, ул. Жданова, 5/7

Экспериментальная типография ВНИИПП
Комитета по печати при Совете
Министров СССР
Москва И-51, Цветной бульвар, 30
Отпечатано в Калужской областной типографии управления по печати
г. Калуга, пл. Ленина, 5

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

АТОМИЗДАТ · 1967